ASYMPTOTIC BEHAVIOR OF EIGENVALUES OF THE STOKES OPERATOR AND ELLIPTIC OPERATORS

東京理科大学大学院理学研究科数学専攻
三森　旬

$\mathcal{A}$ が自己共役, 下に半有界で, そのレゾルベントがコンパクトな作用素であるとすると $\mathcal{A}$ のスペクトルは実数で下に有界, 重複度有限な固有値のみで構成される. ここで $\mathcal{A}$ の固有値列 $(\lambda_i)_{i\in\mathbb{N}}$ を $\lambda_1 \le \lambda_2 \le \lambda_3 \le \cdots \to \infty$ であり, かつ重複度の分だけ繰り返されるように並び替え, 分布関数を実数 $\lambda \ge 0$ に対し

$$N(\lambda) = \sharp\{i \in \mathbb{N} \mid \lambda_i \le \lambda\}$$

と定義する.

この $N(\lambda)$ は $\mathcal{A}$ の固有値を直接考えずとも, 対応する variational triplet (V, H, a) について検討することで評価を与えることができる. (V, H, a) に対しては $N(\lambda) = N(\lambda; V, H, a)$ と書くことにすると次が成り立つ.

$$N(\lambda; V, H, a) = \inf_{E \in \mathcal{E}_\lambda(V,H,a)} \operatorname{codim}_V E = \sharp\{n \in \mathbb{N}\cup\{0\} \mid d_n(S_a; H) \ge \lambda^{-\frac{1}{2}}\}$$

ここで, $\mathcal{E}_\lambda(V, H, a) = \{E : V$ の閉部分空間 $\mid a - \lambda : E$ 上 strongly coercive$\}$, d_n は n 次 Kolmogorov diameter, $S_a = \{u \in V \mid a(u, u) \le 1\}$ である.

空でない有界な開集合 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ に対し 2 つの Hilbert 空間 $V_0(\Omega) = \{u \in (H_0^1(\Omega))^n \mid \operatorname{div} u = 0\}$ $L(\Omega) = (L^2(\Omega))^n$ と $V_0(\Omega)$ 上の form $a(u, v) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \int_\Omega \frac{\partial u_i}{\partial x_j}(x)\overline{\frac{\partial v_i}{\partial x_j}(x)}\, dx$ を定義する. このとき $(V_0(\Omega), L(\Omega), a)$ は variational triplet となり, $N(\lambda; V_0(\Omega), L(\Omega), a)$ は fractal な境界を持つ場合も含む Ω 上の Stokes 作用素の固有値の分布関数を意味する. Caetano は [1] でこの $N(\lambda; V_0(\Omega), L(\Omega), a)$ に対し漸近評価を与えている.

Caetano [1] の結果は Métivier [2] によっているところが大きい.

Métivier [2] は楕円型偏微分作用素の固有値に対する $N(\lambda)$ の評価を variational triplet (V, H, a) を使って与えており, その適用範囲も広い.

この研究では Caetano [1] による結果を Métivier [2] にまで立ち返り 2 つの論文を比較しつつ, 丁寧な確認を試みた.

また, Métivier [2] は, V_0 を V の閉部分空間としたとき V の閉部分空間 $Z_\lambda = \{u \in V \mid \forall v \in V_0 : a(u, v) = \lambda(u, v)_H\}$ に対して,

$$N(\lambda; V, H, a) + \dim\,(V_0 \cap Z_\lambda) = N(\lambda; V_0, H, a) + N(\lambda; Z_\lambda, H, a)$$

であると述べている. この等式は先のどちらの論文でも重要な役を担っている. 実際に空間が 1 次元の場合について例を考察し確認を行った.

主な参考文献

[1] A.M.Caetano, "*Eigenvalue asymptotics of the Stokes operator for fractal domains*", Proc. London Math. Soc. (3) 76 (1998) 579-602.

[2] G.Métivier, "*Valeurs propres de problèmes aux limites elliptiques irréguliers*", Bull. Soc. Math. France, Mémoire 51-52(1977) 125-219.