abstract:

非負作用素の作用素解析

村松壽延, (中央大学理工学部数学教室)

1．この講演のテーマは，小松彦三郎氏の意味での非負作用素 A について，ある関数のクラス $\mathcal{F}$ 属する関数 f 対する関数 $f(A)$ を定義し，その基本的性質を調べることである．関数の和差積と作用の和差積が対応していると言う意味で「作用素解析」と呼んでよいであろう．$\mathcal{F}$ は複素平面から負の実軸と原点を除いた領域で正則な関数からなる代数 (複素数体上の作用環) である．主な手段は「一般化した Stieltjes 変換」である．

2．「作用素解析」という名でよく知られているのは

Hilbert 空間の自己共役作用素の関数，
Banach 空間の有界作用素の Dunford Integral，
Banach 空間の線型作用素の半群の生成作用素に関する
Bochner-Feller-Hille-Phillips 理論，

である．

A.V. Balakrishnan, 1960, Krasnose1'skii-Sobolevskii, 加藤敏夫，吉田耕作，等による 作用素の分数べきの研究を統一し一般化し，小松彦三郎は非負作用素の分数べきの組織的理論を構成し、関連する問題と共に、一連の論文で報告している (1966 年)．

分数べき λ^α はこれから述べる関数の環 (代数) $\mathcal{F}$ に属していて，非負作用素の分数べきに関する小松理論の一般化になっている．

3．定義．$\mathcal{F}$ は複素平面から負の実軸と原点を除いた領域で正則な関数 f で，"indices" が有限のある重み ω とある正整数，m と n について評価式

$$|f(\zeta)| \le \begin{cases} C|\zeta|^m(\mathrm{Re}\zeta)^{-m}\omega(\mathrm{Re}\zeta), & \mathrm{Re}\zeta > 0 \ \text{のとき}, \\ C|\zeta|^n|\mathrm{Im}\zeta|^n\omega(|\zeta|), & \mathrm{lm}\zeta \neq 0 \ \text{のとき}, \end{cases} \tag{1}$$

を満たすものの全体である．ここで「重み」とは 正数値の可測関数を意味する．

定理 1．$\mathcal{F}$ に属する関数 f に対して，正整数 k と m と重み ω と 関数 $f_{m,k}$ を

$$f(t) = \int_0^\infty f_{k,m}(\lambda)\lambda^{k-1}t^m(\lambda+t)^{-k-m}d\lambda \ (\text{すべての } t>0 \text{ ついて}), \tag{2}$$

$$-k < \underline{\mathrm{ind}}\,\omega \le \overline{\mathrm{ind}}\,\omega < m, \tag{3}$$

$$|f_{k,m}(t)| \le C\omega(t) \qquad (\text{すべての } t>0 \text{ ついて}), \tag{4}$$

が成立するように選ぶことができる．ただし，C は定数で，$\underline{\mathrm{ind}}\,\omega$ と $\overline{\mathrm{ind}}\,\omega$ は，それぞれ，重み ω の 下指標と上指標を表す．

4 . この定理により， Banach 空間の非負作用素 A に対して，$f \in \mathcal{F}$ について，線型作用素 $f(A)$ を，空間
$E^{\omega}_{1,k,m}(A) := \{x;\, \omega(\lambda)\|\lambda^k A^m(\lambda + A)^{-k-m}x\|_X \in L_1(\mathsf{R}_+, d\lambda/\lambda)\,\}.$
に属する点 x について公式

$$f(A)_{k,m}x = \int_0^{\infty} f_{k,m}(\lambda)\lambda^{k-1}A^m(\lambda + A)^{-k-m}x\,d\lambda \tag{5}$$

で与えられる線型作用素の閉拡張と定義する . ここで，作用素 A が非負作用素であるとは 閉線型作用素で，レゾルベント集合 $\rho(A)$ が負の実軸を含み，すべての $\lambda > 0$ についてレゾルベントが $\|\lambda(\lambda + A)^{-1}\| \leq M$ を満たすことをいう .

$f(A)$ が k と m の選び方によらないことが証明できる .

5 . 例 . 任意の複素数 α について， 正整数 k と m を $-k < \mathrm{Re}\alpha < m$ にとると，

$$t^{\alpha} = \frac{\Gamma(k+m)}{\Gamma(k+\alpha)\Gamma(m-\alpha)}\int_0^{\infty} \lambda^{k+\alpha-1}t^m(\lambda + t)^{-k-m}d\lambda. \tag{6}$$

$(\omega(t) = t^{\mathrm{Re}\alpha})$. である . したがって，われわれは 正の分数べき と 負の分数べきを統一的に扱うことができる . また，この作用素解析により，$A^{\alpha}\log A$ を扱うことができる .

6 .定理 2 . (積の公式) A が Banach 空間 X 上の非負作用素，f と g が $\mathcal{F}$ に属するとき， $\mathcal{D}((fg)(A))\cap\mathcal{D}(g(A)) \subset \mathcal{D}(f(A)g(A))$ が成立し ，$\mathcal{D}((fg)(A))\cap\mathcal{D}(g(A))$ に属する任意の x について等式

$$(fg)(A)x = f(A)g(A)x$$

が成立する .