CRITICAL SOBOLEV INEQUALITIES AND ITS APPLICATION TO THE NONLINEAR EVOLUTION EQUATIONS IN THE FLUID MECHANICS

小川 卓克 †

九州大学 大学院 数理学研究科
812-8581 福岡市 東区 箱崎

1. Uniqueness Criterion

ここでは以下のような Navier-Stokes 方程式の弱解の一意性について考える。

$$\begin{cases} \partial_t u + u\cdot\nabla u = -\nabla p + \Delta u + f, & t>0, x\in\mathbb{R}^n, \\ \quad \text{div } u = 0, & t>0, x\in\mathbb{R}^n, \\ \quad u(0,x) = u_0(x). \end{cases} \tag{1.1}$$

以下、考える問題が一意性なので 外力項 f は 0 と仮定する。

大きな 初期値に対する Navier-Stokes 方程式の 弱い解、いわゆる Leray-Hopf の弱解は、方程式から自然に得られる エネルギー不等式 :

$$\|u(t)\|_2^2 + 2\int_0^t \|\nabla u(t)\|_2^2 d\tau \le \|u_0\|_2^2$$

を元に $u\in L^\infty(0,T;L^2_\sigma(\mathbb{R}^n))\cap L^2(0,T;\dot H^1(\mathbb{R}^n))$ の 正則性を持つ 超函数の意味での解として構成されることが知られている。. この弱解は 上記の 正則性から自然に得られる、以下のような時空の 可積分性 (可微分性) を持つことがわかる。

$$u\in L^\sigma(0,T;L^q(\mathbb{R}^n)),\quad \frac{2}{\sigma}+\frac{n}{q}=\frac{n}{2},\quad 2\le q\le\frac{2n}{n-2}. \tag{1.2}$$

一方、Leray 自身によって提唱された 弱解の一意性の問題は、 今日まで完全な意味では まだ解かれていない。 わずかに 弱解に 付加条件を課した場合においてのみ、 いくつ

Abstract for the seminar in Kagurazaka on July 24 1999,
† 一部 小薗英雄氏 (東北大) 谷内靖氏 (名古屋大) との共同研究.

かの結果が知られている。すなわち、二つの 弱解の内 一方の解 u に対して 以下の条件 (Serrin の uniqueness criterion)

$$u \in L^{\theta}(0,T;L^{p}(\mathbb{R}^n)), \quad \frac{2}{\theta}+\frac{n}{p}=1, \quad n<p\leq\infty \tag{1.3}$$

を課せば 二つの弱解は一致することが知られている (Ohyama [19], Serrin [24], Giga [12]) 。$n=3$ の場合においては (1.2) と (1.3) に gap があることがわかる。Serrin の 条件は非線形項と同じ 構造を持つ 3 重線形な形式 $(u\cdot\nabla v,w)$ に対する評価に起因するものである。

さて、ここで考えたいのは u そのものではなくその微分、 あるいは渦度 $\omega=\mathrm{rot}\ u(t)$ に対する一意性のための条件である。Sobolev の不等式から $|\nabla|^r u$ に対する条件は

$$|\nabla|^r u \in L^{\theta}(0,T;L^{p}(\mathbb{R}^n)), \quad \frac{2}{\theta}+\frac{n}{p}=1+r. \tag{1.4}$$

となることが直ちにわかる。 したがって ∇u に対する条件は $L^{\theta}(0,T;L^{p}(\mathbb{R}^n))$ ただし $\frac{2}{\theta}+\frac{n}{p}=2.$ である。

一方、 $\mathrm{rot}\ \omega=\mathrm{rot}\ (\mathrm{rot}\ u)=-\Delta u+\nabla(\mathrm{div}\ u)=-\Delta u,$ から

$$\nabla_i u=\nabla_i(-\Delta)^{-1}\mathrm{rot}\ \omega \tag{1.5}$$

となり 右辺には 特異積分作用素が現れる。したがって ∇u に対する 上記の条件の内 その臨界条件である $p=\infty$ (したがって 必然的に $\theta=1$) の場合は 渦度 ω によって一意性の条件が与えられるかどうかは微妙な問題となる。

かたや、Euler 方程式

$$\begin{cases} \partial_t u+u\cdot\nabla u=-\nabla p, & t>0, x\in\mathbb{R}^n,\\ \quad \mathrm{div}\ u=0, & t>0, x\in\mathbb{R}^n,\\ \quad u(0,x)=u_0(x), \end{cases} \tag{1.6}$$

の解の break down が 生じるか否かを議論する Euler 方程式の解の regularity critierion については Beale-Kato-Majda [2] によって その渦度 ω が $L^1(0,T;L^{\infty})$ に属せば $[0,T)$ のなめらかな解は 時刻 T においても正則となり解が延長できることが示されている。 さらにこの結果は Kozono-Taniuichi [16] によって、解の渦度に対する $\omega\in BMO$ (後述) と言う、より弱い条件にゆるめられている。

これらの結果は実は すべて対数型の Sobolev 不等式によって得られている。実際 Beale-Kato-Majda [2] においては以下の不等式が用いられた。$f=(f_1,f_2,f_3)\in W^{s,p}$ $s>1+n/p$ に対して $\mathrm{div}\ f=0$ であれば

$$\|\nabla f\|_{\infty}\leq C(1+\|\nabla f\|_2+\|\mathrm{rot} f\|_{\infty}(1+\log^{+}\|f\|_{W^{s,p}}))). \tag{1.7}$$

Kozono-Taniuchi ([16]) においては (1.5) の 特異積分作用素の有界性を回復するためにそれを有界にするような (semi) norm を考えた。具体的には 有界平均振動 の函数 (BMO

) の semi norm を用いて; for $f \in W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ with div $f = 0$,

$$\|f\|_\infty \le C\big(1 + \|f\|_{BMO}(1 + \log^+ \|f\|_{W^{s,q}})\big), \quad s > n/p + 1. \quad . \tag{1.8}$$

ただし BMO とは $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ なる函数であって、

$$\sup_{x,R} \frac{1}{|B_R|} \int_{B_R(x)} |u(x) - \bar{u}_{B_R(x)}| dx < \infty$$

となるものである。ここで $\bar{u}_{B_R(x)}$ は n 次元 球 $B_R(x)$ 上での u の積分平均である。

ここで我々が示したいことは、 こうした 対数型 Sobolev の不等式を、 より一般な空間であるところの 斉次 Besov 空間において拡張すること、さらにそれを用いて、より広い空間における弱解の 一意性のための、 渦度の条件を与えることである。

Euler 方程式の弱解の正則性に対する条件から $\omega \in L^\infty(0,T;BMO)$ が対応する条件と推測されるが、一意性の場合は 双方の解に 十分な正則性を仮定できない分だけ問題が難しくなる。すなわち 対数型 Sobolev 不等式の右辺に現れる 正則性を要求する 項に対して解の正則性 があらかじめ 十分仮定できない点が もっとも困難な点である。ここではそれについて Navier-Stokes 方程式の持つ 粘性の効果 を利用することにより Euler 方程式の正則性に近い条件で 一意性が示せることを述べる。

2. Besov Spaces and Critical Sobolev Inequality

Sobolev 型の不等式を Besov 空間の ' 言葉' によって記述することを試みる。(c.f., [26]). ϕ_j $j = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \cdots$ を 周波数 変数 ξ 空間における Littlewood-Payley の 2 進 単位分解 とする。すなわち $\hat{\phi}_j(\xi) = \phi(2^{-j}\xi)$ かつ $\sum_{j=-\infty}^{\infty} \phi_j(\xi) = 1$ $\xi \neq 0$ である。

Definition. homogeneous Besov space $\dot{B}^s_{p,\rho} = \{f \in \mathcal{S}'; \|f\|_{\dot{B}^s_{p,\rho}} < \infty\}$ は以下の semi norm によって与えられる。

$$\|f\|_{\dot{B}^s_{p,\rho}} = \Big(\sum_{j=-\infty}^{\infty} \|2^{js}\phi_j * f\|_p^\rho\Big)^{1/\rho'}$$

ここで $s \in \mathbb{R}$, $1 \le p, \rho \le \infty$ である。

以下では 非負の 対数函数 $\log^+ r$ をしばしば用いるがそれは

$$\log^+ r = \begin{cases} \log\ r, & e < r, \\ 1, & 0 \le r \le e. \end{cases}$$

で与えられるものとする。

対数型の 臨界型 Sobolev 不等式は Brezis-Gallouet [4], Brezis-Wainger[5] らに よって導入されたが その後 Beale-Kato-Majda [2] によって そのベクトル場 版が構成された。(更なる 一般化については [10], [25], [22], [16], [15] などを参照).

Theorem 2.1 ([15], [21]). $1 \le \nu < \rho \le \infty$ かつ $\kappa > 0$ とする。 $q \in [1, \infty]$, $\nu < \sigma$ に対して、n q σ のみに依存する ある定数 C が存在して、$f \in \dot{B}^{n/q+\kappa}_{\infty,\sigma} \cap \dot{B}^{n/q-\kappa}_{\infty,\sigma}$ に対して以下が成り立つ。

$$\|f\|_{\dot{B}^0_{\infty,\nu}} \le C\|f\|_{\dot{B}^0_{\infty,\rho}}\Big(1 + \Big(\frac{1}{\kappa}\log^+ \frac{\|f\|_{\dot{B}^{n/q+\kappa}_{q,\sigma}} + \|f\|_{\dot{B}^{n/q-\kappa}_{q,\sigma}}}{\|f\|_{\dot{B}^0_{\infty,\rho}}}\Big)^{1/\nu-1/\rho}\Big). \tag{2.1}$$

Remark. 不等式 $\|f\|_{\dot{B}^0_{\infty,\rho}} \le \|f\|_{\dot{B}^{n/q}_{n/q,\rho}}$ によって右辺に現れる $\|f\|_{\dot{B}^0_{\infty,\rho}}$ の項は $\|f\|_{\dot{B}^{n/q}_{q,\rho}}$ に 書き換えることが可能である。さらに、Besov semi norm のはじめの指数 ∞ についても たとえば $\|f\|_{\dot{B}^0_{p,\nu}}$ のように変更することが可能である。

この不等式は Besov 空間における 補間不等式の一種とみなせる。実際

$$\dot{B}^0_{\infty,\nu} \subset \dot{B}^{n/q+\kappa}_{q,\sigma} \cap \dot{B}^{n/q-\kappa}_{q,\sigma}$$

の形の埋め込みはよく知られていた。この不等式は 高い正則性の部分の依存度が実は 対数函数 (のべき乗) で 顕に表せると言う点にある。二つ目の指数の大小が 逆さまの場合、すなわち $\rho < \nu$ のとき, 不等式

$$\|f\|_{\dot{B}^0_{\infty,\nu}} \le C\|f\|_{\dot{B}^0_{\infty,\rho}}$$

がいつも成立することは $l^\rho \subset l^\nu$ から 明らかであろう。

不等式自身は より一般的な形

$$\|f\|_{\dot{B}^0_{\infty,\nu}} \le C\|f\|_{\dot{B}^0_{\infty,\rho}}\Big(1 + \Big(\frac{1}{\kappa}\log^+ \frac{\|f_+\|_{\dot{B}^{n/q+\kappa}_{q,\sigma}} + \|f_-\|_{\dot{B}^{n/q-\kappa}_{q,\sigma}}}{\|f\|_{\dot{B}^0_{\infty,\rho}}}\Big)^{1/\nu-1/\rho}\Big), \tag{2.2}$$

ただし $f_+ = \sum_{j>0} \phi_j * f$ かつ $f_- = f - f_+$ で述べることもできる。

Theorem 2.1 はまた 既知の 対数型 Sobolev 不等式の拡張になっていて、 実際 はじめに得られた Brezis-Gallouet 型の不等式 [4]

$$\|f\|_\infty \le C\|\nabla f\|_2\big(1 + (\log^+ \|f\|_{W^{2,2}})\big)^{1/2} \quad f \in H^1(\mathbb{R}^2) \tag{2.3}$$

や より一般の Brezis-Wainger 型 不等式 [5] (の一部) $f \in W^{s,n}(\mathbb{R}^n)$, $s > n/p + 1$

$$\|f\|_\infty \le C\|\nabla f\|_n\big(1 + (\log^+ \|f\|_{W^{s,n}})\big)^{1-1/n} \tag{2.4}$$

を得ることができる。また ベクトル値 版である Beale-Kato-Majda 型 不等式 [2], $f = (f_1, f_2, f_3)$ div $f = 0$, $f \in W^{s,p}(\mathbb{R}^3)$ $1 + n/p < s$

$$\|\nabla f\|_\infty \le C\big(1 + \|\nabla f\|_2 + \|\mathrm{rot} f\|_\infty(1 + \log^+ \|f\|_{W^{s,p}})\big), \tag{2.5}$$

あるいは Kozono-Taniuchi 型不等式 ([16]);

$$\|f\|_\infty \le C\big(1 + \|f\|_{BMO}(1 + \log^+ \|f\|_{W^{s,q}})\big), \quad f \in (W^{s,p}(\mathbb{R}^n))^3 \tag{2.6}$$

を導くことができる。

3. Uniqueness condition by vorticity

Navier-Stokes 方程式の弱解の 一意性に対する条件を 示す。

Definition. X を norm 空間 とする。$\alpha > 0$ に対して $u(t)$ が $L(\log L)^{\alpha}(I;X)$ に属すとは

$$\int_I \|u(t)\|_X (\log^+ \|u(t)\|_X)^{\alpha} dt < \infty$$

のとき。とくに $L\log L(I;X)$ は

$$\int_I \|u(t)\|_X \log^+ \|u(t)\|_X dt < \infty$$

のときである。

Theorem 3.1 (Uniqueness[21]). u と $\tilde{u}$ が ともに 初期値 u_0 の *Navier-Stokes* 方程式の *Leray-Hopf* の意味での 弱解 であるとしある $1 \leq \rho \leq \infty$ に対して 一方の解の 渦度 $\omega = \mathrm{rot}\ u$ が $\mathrm{rot}\ u = \omega \in L(\log L)^{1/\rho'}([0,T];\dot{B}^0_{\infty,\rho})$ ただし $1/\rho + 1/\rho' = 1$ であり かつ 他方の 解 $\tilde{u}$ が以下の エネルギー不等式を満たすと仮定する。

$$\|\tilde{u}(t)\|_2^2 + 2\int_0^t \|\nabla \tilde{u}(\tau)\|_2^2 d\tau \leq \|u_0\|_2.$$

このとき $u = \tilde{u}$ である。

$\dot{B}^0_{\infty,1}(\mathbb{R}^n) \subset L^{\infty}(\mathbb{R}^n) \subset BMO(\mathbb{R}^n) \subset \dot{B}^0_{\infty,\infty}(\mathbb{R}^n)$ の埋め込みに注意すれば 直ちに以下の 系 を得る。

Corollary 3.2 (limiting vorticity condition). u と $\tilde{u}$ が ともに 初期値 u_0 の *Navier-Stokes* 方程式の *Leray-Hopf* の意味での 弱解 であるとしある $1 \leq \rho \leq \infty$ に対して 一方の解の 渦度 $\omega = \mathrm{rot}\ u$ が $\omega = \mathrm{rot}\ u \in L\log L([0,T];BMO)$ であり かつ 他方の 解 $\tilde{u}$ が以下のエネルギー不等式を満たすと仮定する。

$$\|\tilde{u}(t)\|_2^2 + 2\int_0^t \|\nabla \tilde{u}(\tau)\|_2^2 d\tau \leq \|u_0\|_2.$$

このとき $u = \tilde{u}$ である。

References

[1] Adams, R.A., *Sobolev Spaces*, Academic Press, New York, 1975

[2] Beale, J.T., Kato, T., Majda, A., *Remarks on the breakdown of smooth solutions for the 3-D Euler equations*, Comm. Math.Phys. , **94** (1984), 61-66.

[3] Bergh, J., Löfström, J., *Interpolation Spaces, An Introduction* , Springer-Verlag, Belrin-New York-Heidelberg. , (1976).

[4] Brezis, H., Gallouet, T., *Nonlinear Schrödinger equations* , Nonlinear Anal. T.M.A. , **4** (1980), 677-681.

[5] Brezis, H., Wainger, S., *A note on limiting cases of Sobolev embedding and convolution inequalities.*, Comm. Partial Differential Equations , **5** (1980), 773-789.

[6] Cannone, M., Planchon, F., *On the non stationary Navier-Stokes equations with an external force*, preprint.
[7] Chae, D. *Weak solutions of 2-D Euler equations with initial vorticity in $L\log L$.*, J. Diffential Equations., **103** (1993), 323-337.
[8] Chanillo, S., *Sobolev inequalities involving divergence free maps*, Comm. Partial Diff. Equations, **16** (1991), 1969-1994.
[9] Coifman.R.,Lions P.L., Meyer Y., Semmes,S., *Compensated compactness and Hardy spaces* , J.Math. Pures Appl., **77** (1993) 247-286.
[10] Engler, H., *An alternative proof of the Brezis-Wainger inequality*, Comm. Partial Differential equations. , **14** no. 4 (1989), 541-544.
[11] Furioli,G.,Lemarié-Rieusset,P.G.,Terraneo,T., *Sur l'unicité dans $L^3(\mathbb{R}^3)$ des mild des équations de Navier-Stokes* C.R.Acad,Sci Paris (1997)
[12] Giga,Y., *Solutions for semilinear Parabolic eqautions in L^p and regularity of weak solutions of the Navier-Stokes system* J. Differential Equations **61** (1986) 186-212
[13] Gilberg, D., Trudinger,N., *Elliptic Partial Differential Equation for Second Order,* 2nd Ed. Springer, Berlin, New York 1983.
[14] Hayashi, N., von Wahl, W., *On the global strong solutions of coupled Klein-Gordon -Schrödinger equations.* , J. Math. Soc. Japan , **39** (1987), 489-497.
[15] Kozono, H., Ogawa, T.,Taniuchi, Y., *Critical Sobolev inequalities and application to the semilinear evolution equations*, work in preparation.
[16] Kozono, H., Taniuchi, Y., *Limitting case of the Sobolev inequality in BMO with application to the Euler equations*, preprint
[17] Lions, P.L., Masmoudi, N., *Unicité des soluitions faibles de Navier-Stokes dans $L^n(\Omega)$*, C.R. Acad Sci. Paris, **327** (1998), 491-496.
[18] Miyakawa,T., *Hardy Spaces of solenoidal vector fields, with applications to the Navier-Stokes equations*, Kyushu J. Math., **50** (1996) 1-64.
[19] Ohyama, T., *Interior regularity of weak solutions of the time-dependent Navier-Stokes equation*, Proc. Japan Acad., **36** (1960), 273-277.
[20] Ogawa, T., *A proof of Trudinger's inequality and its application to the nonlinear Schrödinger equations*, Nonlinear Anal. T.M.A., **14** (1990), 765-769.
[21] Ogawa, T.,Taniuchi, Y., *The limiting uniqueness criterion by vorticity to Navier-Stokes in BMO and Besov spaces*, preprint.
[22] Ozawa, T., *On critical cases of Sobolev's inequalities*, J. Funct. Anal., **127** (1995), 259-269.
[23] Ponce, G., *Remarks on a paper by J.T..Beale, T. Kato and A. Majda*, Comm. Math. Phys. , **98** (1985), 349-353.
[24] Serrin,J., *On the interior regularity of weak solutions of the Navier-Stokes equations*, Arch.Rat.Mech. Anal., **9** (1962), 187-185.
[25] Taylor, M.E., *Pseudodifferential operators and nonlinear PDE* , Progress of Mathematics, Birkhäuser, Boston, Basel, Berlin, 1991
[26] Triebel, H., *Theory of Function Spaces II* , Birkhäuser, 1983
[27] Vishik, M., *Hydrodynamics in Besov spaces*, Arch. Rational Mech. Anal. , **145** (1998), 197-214.
[28] Yudovich, V. I., *Uniqueness theorem for the basic nonstationary problem in the dynamics of an ideal incompressible fluid*, Math. Research Letters. , **2** (1995), 27-38.