Small Data Blowup for Systems of Semilinear Wave Equations with Different Propagation Speeds

太田 雅人 (Masahito OHTA) 静岡大学工学部
Email : tsmoota@eng.shizuoka.ac.jp

1 導入

この講演では, 半線形波動方程式系の小さな初期データに対する初期値問題 :

$$(1)\qquad \begin{cases} (\partial_t^2 - c_j^2\Delta)u_j = F_j(u,\partial u), & (x,t)\in \mathbb{R}^3\times[0,\infty), \\ u_j(x,0)=\varepsilon f_j(x),\ \partial_t u_j(x,0)=\varepsilon g_j(x), & x\in\mathbb{R}^3,\ j=1,\cdots,m \end{cases}$$

の古典解の大域的存在・非存在について考える. ここで, f_j, $g_j \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ で $\varepsilon > 0$ は初期値の小ささを表すパラメータで $c_j > 0$ は伝播速度を表す. 特に, 小さなデータに対する大域的存在・非存在に関して臨界的な状況の下で, 伝播速度の違いがどのような影響を及ぼすのかに興味がある. 以下, 空間 3 次元の場合に話を限定する.

定義　任意の f, $g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}^m)$ に対して ある $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(f,g) > 0$ が存在して $0 < \varepsilon \le \varepsilon_0$ ならば (1) の古典解が大域的に存在するとき (1) に対して Small Data Global Existence が成り立つといい SDGE と略す. SDGE が成り立たないとき Small Data Blowup が起こるといい SDB と略す. □

このような問題を考えるとき 次の 3 つの場合に分けて考える必要がある.

Case 1　非線形項に未知関数の導関数が含まれない場合, すなわち $F = F(u)$

Case 2　非線形項に未知関数自身が含まれない場合, すなわち $F = F(\partial u)$

Case 3　それ以外の一般の場合, すなわち非線形項に未知関数もその導関数も含む場合

まず, 単独の場合 $(m = 1)$ の臨界指数がいくつであったかを思い出す. Case 1, Case 2 の典型例としてそれぞれ

$$(2)\qquad (\partial_t^2 - \Delta)u = |u|^p, \qquad (x,t)\in\mathbb{R}^3\times[0,\infty),$$

$$(3)\qquad (\partial_t^2 - \Delta)u = |\partial_t u|^p, \qquad (x,t)\in\mathbb{R}^3\times[0,\infty)$$

を考える. このとき 次の定理が知られている.

定理 1　(2) に対して $p > 1+\sqrt{2} \Longrightarrow$ SDGE,　$p \leq 1+\sqrt{2} \Longrightarrow$ SDB.
(John 79 [7], Schaeffer 85 [14], Zhou 92 [19])

定理 2　(3) に対して $p > 2 \Longrightarrow$ SDGE,　$p \leq 2 \Longrightarrow$ SDB.
(John 81 [8], Sideris 83 [15], Hidano and Tsutaya 95 [4], Tzvetkov 98 [17])

さて 単独方程式 (3) に関連した system $(m = 2)$

$$\left\{ \begin{array}{ll} (\partial_t^2 - c^2\Delta)u = F_1(\partial_t u, \partial_t v), & (x,t) \in \mathbb{R}^3 \times [0,\infty), \\ (\partial_t^2 - \Delta)v = F_2(\partial_t u, \partial_t v), & (x,t) \in \mathbb{R}^3 \times [0,\infty) \end{array} \right. \tag{4}$$

を考える. 定理 2 から F_1, F_2 が 2 次のときが SDGE と SDB の critical case と考えられる. まず $(F_1, F_2) = (\partial_t u \partial_t v, \partial_t u \partial_t v)$ の場合を考えると $c = 1$ ならば 定理 2 から明らかに SDB であるが, $c \neq 1$ のとき次が成り立つ.

定理 3 (Kovalyov 89 [9])　$c \neq 1$ ならば (4) with $(F_1, F_2) = (\partial_t u \partial_t v, \partial_t u \partial_t v)$ に対して SDGE が成り立つ. □

Kovalyov はこのような現象を "Resonance-type behaviour in a system of nonlinear wave equations" と呼んでいる. さて Kovalyov 89 [9] では

$$(F_1, F_2) = (\partial_t u \partial_t v, (\partial_t u)^2),\ ((\partial_t v)^2, \partial_t u \partial_t v),\ ((\partial_t v)^2, (\partial_t u)^2)$$

の場合に対しては未解決であったが 2 次元の場合の Agemi and Yokoyama 98 [1], Hoshiga and Kubo [5] を経て Yokoyama [18] により これらの場合に対しても $c \neq 1$ ならば (4) に対して SDGE が成り立つことが示された. これらの結果より Case 2 に対しては伝播速度の違いにより critical SDGE が得られることが分かり, ほとんど完全に解明されたといってよい. 現在は, これらの研究の続きとして Case 3 に対する critical SDGE の研究が Hoshiga, Katayama, Kubo, Kubota, Tsutaya, Yokoyama らにより行われている.

次に 単独方程式 (2) に関連した system

$$\left\{ \begin{array}{ll} (\partial_t^2 - c^2\Delta)u = |u|^{p_1}|v|^{p_2}, & (x,t) \in \mathbb{R}^3 \times [0,\infty), \\ (\partial_t^2 - \Delta)v = |u|^{q_1}|v|^{q_2}, & (x,t) \in \mathbb{R}^3 \times [0,\infty) \end{array} \right. \tag{5}$$

を考える. ここで p_2 と q_1 は 1 以上の定数で p_1 と q_2 は 0 または 1 以上の定数とする. 定理 1 より $p_1 + p_2 = q_1 + q_2 = 1 + \sqrt{2}$ の場合が critical case と考えられる. Kubo [10] によると p_1, p_2, q_1, q_2 がすべて 1 以上で $p_1 + p_2 = q_1 + q_2 = 1 + \sqrt{2}$ のとき $c \neq 1$ ならば

(5) に対して SDGE が成り立つ (但し 古典解ではなく適当な意味の弱解に対して). これに対して $p_1 = q_2 = 0$ のときは次が成り立つ.

定理 4 (Kubo and Ohta [12]) $p_1 = q_2 = 0, p_2 = q_1 = 1 + \sqrt{2}$ のとき $c \neq 1$ でも SDB が起こる. □

註 1. 我々の知る限り, 定理 4 は異なる伝播速度をもつ半線形波動方程式系に対する critical SDB に関する初めての結果であると思われる (先ほど述べたように critical SDGE に関しては多くの研究がある).

2. $p_1 = 0$ and $q_1 q_2 > 0$ 及び $q_2 = 0$ and $p_1 p_2 > 0$ の場合については現在 計算中である.

定理 4 はもう少し一般化できるが, それは節を変えて次の節で述べることにする.

2 主結果

(5) で $p_1 = q_2 = 0$ とし $p_2 = p, q_1 = q$ とおく. すなわち

$$
(6) \qquad \begin{cases} (\partial_t^2 - c^2\Delta)u = |v|^p, & (x,t) \in \mathbb{R}^3 \times [0,\infty), \\ (\partial_t^2 - \Delta)v = |u|^q, & (x,t) \in \mathbb{R}^3 \times [0,\infty), \\ u(x,0) = \varepsilon f_1(x),\ \partial_t u(x,0) = \varepsilon g_1(x), & x \in \mathbb{R}^3, \\ v(x,0) = \varepsilon f_2(x),\ \partial_t v(x,0) = \varepsilon g_2(x), & x \in \mathbb{R}^3 \end{cases}
$$

を考える. ここで $c > 0, 1 < p \leq q < \infty, \varepsilon > 0, f_j, g_j \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ $(j = 1, 2)$ とする.

まず $c = 1$ の場合を考える. このときは $p < 1 + \sqrt{2} < q$ の場合にどうなるかが, 問題となり, 面白いところでもある. 以下

$$
(7) \qquad \alpha = 1 - p(q-2), \quad \beta = 1 - q(p-2).
$$

とおく. このとき

定理 5 $c = 1$ とする. (6) に対して

$\alpha + p\beta < 0$ and $p > 2 \Longrightarrow$ SDGE, $\quad \alpha + p\beta \geq 0 \Longrightarrow$ SDB.

(Del Santo, Georgiev and Mitidieri [2] for $\alpha + p\beta \neq 0$, Deng [3] for $\alpha + p\beta > 0$, Kurokawa and Takamura [13] and Kubo and Ohta [11] for $\alpha + p\beta = 0$)

次がこの講演の主結果である.

Theorem A (Kubo and Ohta [12]) Let $c > 0$ and $1 < p \leq q < \infty$. Assume that $\alpha + p\beta \geq 0$ with (7). Then the SDB occurs for (6) even if $c \neq 1$.

Remark 1 When $c = 1$, a similar result to Theorem A holds in two space dimensional case (see [11]). However, there are some difficulties to treat the case $c \neq 1$ in two space dimensional case, so it is an open problem whether a similar result to Theorem A holds or not when $c \neq 1$ in two space dimensional case.

参考文献

[1] R. Agemi and K. Yokoyama, The null conditions and global existence of solutions to systems of wave equations with different propagation speeds, *in* "Advances in nonlinear partial differential equations and stochastics" (S. Kawashima and T. Yanagisawa ed.), Series on Adv. in Math. for Appl. Sci., Vol. 48, 43–86, World Scientific, Singapore, 1998.

[2] D. Del Santo, V. Georgiev and E. Mitidieri, Global existence of the solutions and formation of singularities for a class of hyperbolic systems, *in* "Geometric optics and related topics" (F. Colombini and N. Lerner ed.), Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications, Vol. 32, 117–140, Berkhäuser, Boston, 1997.

[3] K. Deng, Nonexistence of global solutions of a nonlinear hyperbolic system, *Trans. Amer. Math. Soc.* **349** (1997), 1685–1696.

[4] K. Hidano and K. Tsutaya, Global existence and asymptotic behavior of solutions for nonlinear wave equations, *Indiana Univ. Math. J.* **44** (1995), 1273–1305.

[5] A. Hoshiga and H. Kubo, Global small amplitude solutions of nonlinear hyperbolic systems with a critical exponent under the null condition *SIAM J. Math. Anal.* (to appear).

[6] F. John, "Plane waves and spherical means applied to partial differential equations," Interscience, New York, 1955.

[7] F. John, Blow-up of solutions of nonlinear wave equations in three space dimensions, *Manuscripta Math.* **28** (1979), 235–268.

[8] F. John, Blow-up of solutions for quasi-linear wave equations in three space dimensions, *Comm. Pure Appl. Math.* **34** (1981), 29–51.

[9] M. Kovalyov, Resonance-type behaviour in a system of nonlinear wave equations, *J. Differential Equations* **77** (1989) 73–83.

[10] H. Kubo, Private communication.

[11] H. Kubo and M. Ohta, Critical blowup for systems of semilinear wave equations in low space dimensions, Preprint (1998).

[12] H. Kubo and M. Ohta, Small blowup for systems of semilinear wave equations with different propagation speeds in three space dimensions, Preprint (1999).

[13] Y. Kurokawa and H. Takamura, Critical curve for p-q systems of nonlinear wave equations in three space dimensions, Preprint (1998).

[14] J. Schaeffer, The equation $u_{tt} - \Delta u = |u|^p$ for the critical value of p, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh* **101A** (1985), 31–44.

[15] T. C. Sideris, Global behavior of solutions to nonlinear wave equations in three space dimensions, *Comm. Partial Differential Equations* **8** (1983), 1283–1323.

[16] H. Takamura, An elementary proof of the exponential blow-up for semilinear wave equations, *Math. Meth. Appl. Sci.* **17** (1994) 239–249.

[17] T. Tzvetkov, Existence of global solutions to nonlinear massless Dirac system and wave equation with small data, *Tsukuba J. Math.* **22** (1998) 193–211.

[18] K. Yokoyama, Global existence of classical solutions to systems of wave equations with critical nonlinearity in three space dimensions, *J. Math. Soc. Japan* (to appear).

[19] Y. Zhou, Blow up of classical solutions to $\Box u = |u|^{1+\alpha}$ in three space dimensions, *J. Partial Differential Equations* **5** (1992) 21–32.