閉線形作用素の超幾何関数

岡沢　登

東京理大・理

さて A は Banach 空間 X 内の右非負作用素とする: 即ち, A は閉作用素で, $\rho(-A) \supset (1,\infty)$ かつ $\|(\xi+A)^{-1}\| \le M\xi^{-1}\ \ \forall\,\xi \in (1,\infty)$ が成立するものとする. このとき $1+A$ は有界な逆を持つ非負作用素であり, その負冪が定義される. $0<\alpha<1$ のときの公式が最も良く知られている:

$$(1+A)^{-\alpha} = \frac{\sin\pi\alpha}{\pi}\int_0^\infty \xi^{-\alpha}(1+A+\xi)^{-1}\,d\xi.$$

これは有界作用素である: $\|(1+A)^{-\alpha}\| \le M\ (0<\alpha<1)$. ここで $1+\xi = t^{-1}$ とおくと

$$(1+A)^{-\alpha} = \frac{\sin\pi\alpha}{\pi}\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{-\alpha}(1+tA)^{-1}\,dt. \tag{1}$$

この表示を得たことが右非負作用素の超幾何関数を考えるきっかけになった.

周知の通り, 超幾何関数 $F(\alpha,\beta,\gamma;z)$ は単位円内: $|z|<1$ では超幾何級数によって定義される:

$$F(\alpha,\beta,\gamma;z) := \sum_{n=0}^\infty \frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n-1)}{n!\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+n-1)}\,z^n\ \ (|z|<1).$$

例えば

$$(1+z)^{-\alpha} = \sum_{n=0}^\infty \frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)}{n!}(-z)^n = F(1,\alpha,1;-z)\ \ (|z|<1).$$

特殊関数の本によれば, $F(\alpha,\beta,\gamma;z)$ は次の積分表示を持つ: $0<\mathrm{Re}\,\beta<\mathrm{Re}\,\gamma$ で $z \in \mathbf{C}\setminus[0,\infty)$ のとき

$$F(\alpha,\beta,\gamma;z) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)}\int_0^1 t^{\beta-1}(1-t)^{\gamma-\beta-1}(1-tz)^{-\alpha}\,dt. \tag{2}$$

ここで $(1-tz)^{-\alpha}$ は $(1-tz)^{-\alpha}\to 1\ (t\downarrow 0)$ となる分枝をとるものとする. 従って

$$(1+z)^{-\alpha} = \frac{\sin\pi\alpha}{\pi}\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{-\alpha}(1+tz)^{-1}\,dt.$$

これは (1) と完全に対応している. そこで (2) の $-z \in \mathbf{C}$ を右非負作用素 A で置き換えて

$$F(\alpha,\beta,\gamma;A) := \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)}\int_0^1 t^{\beta-1}(1-t)^{\gamma-\beta-1}(1+tA)^{-\alpha}\,dt$$

と定義する. これで実積分表示できる非有界作用素の関数の例が増えるはずである.