Recent applications of order preserving operator inequalities

山崎 丈明　(Takeaki Yamazaki)　東京理科大 理

0 Introduction

ここではヒルベルト空間 H 上の有界線形作用素について考える。作用素 T が positive ($T \geq 0$ と書く) とはこの場合 positive definite とし、$(Tx, x) \geq 0$ が全ての $x \in H$ で成り立つことと定義する。そして、T が strictly positive ($T > 0$ と書く) とは、T が positive かつ invertible と定義する。また、positive operator について、次の有名な不等式が知られている。

Theorem L-H (Löwner-Heinz inequality 1934).
$A \geq B \geq 0$ ensures $A^\alpha \geq B^\alpha$ for any $\alpha \in [0, 1]$.

この Theorem L-H はシンプルで非常にわかりやすい形をしているが、指数 $\alpha \in [0, 1]$ という強い制限のもとでしか成り立たないところが、応用上不便であった。そこで、応用上使いやすいように次の定理が確立された。

Theorem F (Furuta 1987 [8].)

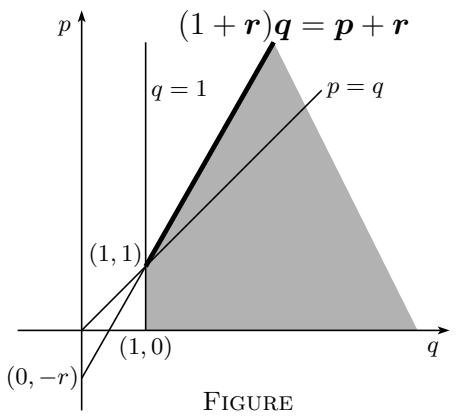
If $A \geq B \geq 0$, then for each $r \geq 0$,

(i) $(B^{\frac{r}{2}} A^p B^{\frac{r}{2}})^{\frac{1}{q}} \geq (B^{\frac{r}{2}} B^p B^{\frac{r}{2}})^{\frac{1}{q}}$

and

(ii) $(A^{\frac{r}{2}} A^p A^{\frac{r}{2}})^{\frac{1}{q}} \geq (A^{\frac{r}{2}} B^p A^{\frac{r}{2}})^{\frac{1}{q}}$

hold for $p \geq 0$ and $q \geq 1$ with $(1 + r)q \geq p + r$.



FIGURE

この講演では、Theorem F を使った最近の応用をいくつか紹介する。

1 On powers of class A(k) operators including p-hyponormal and log-hyponormal operators and related classes

Normal operator ($T^*T = TT^*$) を含む作用素のクラスとして、次が知られている。

Definition.
T : *hyponormal* $\overset{\text{def}}{\iff} T^*T \geq TT^*$.
T : *p-hyponormal for $p > 0$* $\overset{\text{def}}{\iff} (T^*T)^p \geq (TT^*)^p$.
T : *log-hyponormal* $\overset{\text{def}}{\iff}$ *T is invertible and* $\log T^*T \geq \log TT^*$.
T : *paranormal* $\overset{\text{def}}{\iff} \|T^2x\| \geq \|Tx\|^2$ *for* $\|x\| = 1$.

これらの作用素のクラスについては、非常に多くの研究がなされてきている。また、T が normal や paranormal である時は、任意の自然数 n に対して T^n もそれぞれ同じクラスに入ることが知られているが [7]、T が hyponormal である時は、T^2 は hyponormal になるとは限らないという事が [12] で示されている。これに関連して、最近 p-hyponormal, log-hyponormal に対して、次の結果が Theorem F の応用として示された。

Theorem 1.A ([1, 15]). *Let T be a p-hyponormal operator for $p > 0$. Then T^n is a $\min\{1, \frac{p}{n}\}$-hyponormal operator for all positive integer n.*

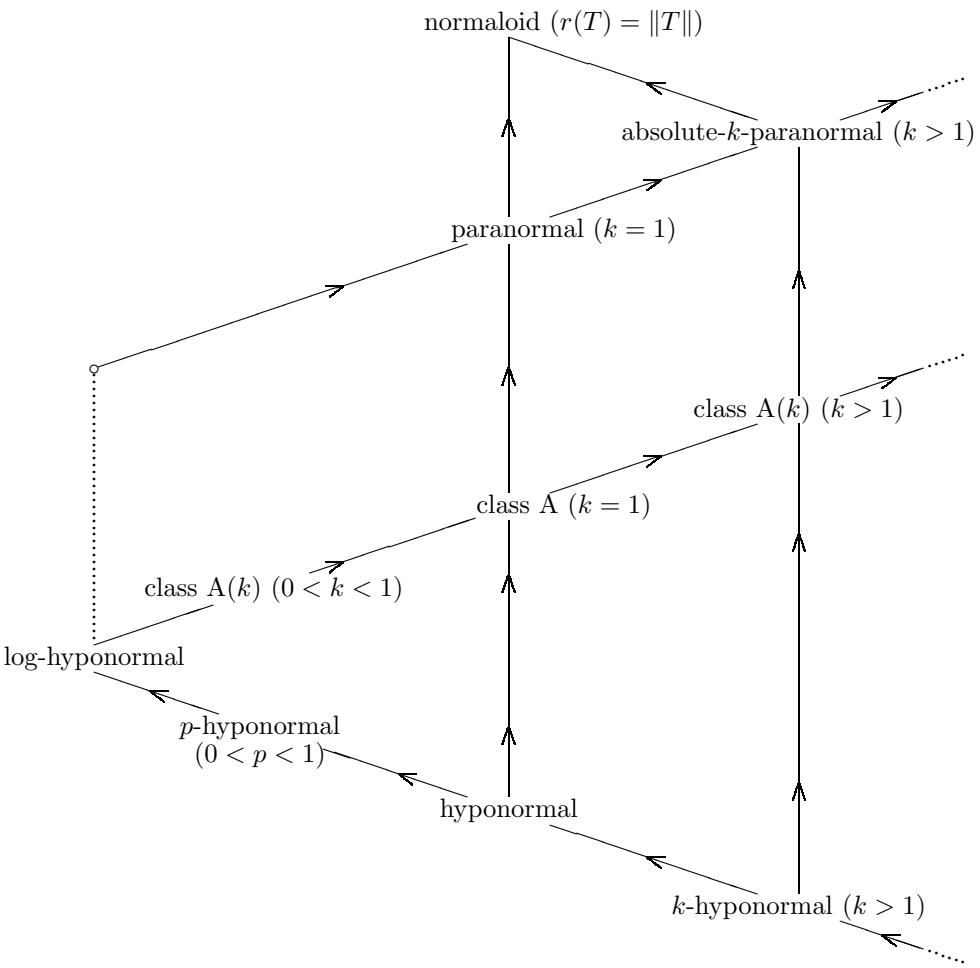
Theorem 1.B ([16]). *Let T be a* log*-hyponormal operator. Then T^n is also a* log*-hyponormal operator for all positive integer n.*

このように、p-hyponormal や log-hyponormal は operator inequality で定義されたクラスであるので Theorem F が非常に有効である。また、最近これらのクラスに関する Theorem F を使った応用として、次のような作用素のクラスが定義された。

Definition ([10]). *For each $k > 0$,*

(i) *T: class A* $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $|T^2| \geq |T|^2$.
(ii) *T: class $A(k)$* $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $(T^*|T|^{2k}T)^{\frac{1}{k+1}} \geq |T|^2$.
(iii) *T: absolute-k-paranormal* $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\| \, |T|^k Tx \, \| \geq \|Tx\|^{k+1}$ *for every unit vector $x \in H$.*

なお、class A $\Longleftrightarrow$ class A(1) であり、paranormal $\Longleftrightarrow$ absolute-1-paranormal であることが Definition からわかる。また、これらの作用素のクラスと従来知られていた p-hyponormal と log-hyponormal との関係は下図の様になっていることが示された [10]。



この図からわかるように、class A(k) と absolute-k-paranormal が parallel なクラスになっていることに注意する。また、最近 class A に関して、次の結果が得られている [14]。

Theorem 1.D ([14]). *Let T be an invertible class A operator, then T^n is also a class A operator for all positive integer n.*

Theorem 1.D は paranormal operator の n 乗もまた paranormal である [7] というよく知られた結果と parallel な関係にあることが見て取れることから大変興味深い結果である。

本講演では、最初に class A の拡張である class A(k) operator のべき乗についての次の結果を紹介する。

Theorem 1.1 ([17]). *Let T be an invertible class A(k) operator for $k \in (0,1]$. Then T^n is a class A($\frac{k}{n}$) operator for all positive integer n.*

さらに、最近 class A(k) の拡張として、次の作用素のクラスが定義された。

Definition ([6]). *For each $s,t>0$,*

(i) *T: class A(s,t)* $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $(|T^*|^t|T|^{2s}|T^*|^t)^{\frac{t}{s+t}} \geq |T^*|^{2t}$.
(ii) *T: class AI(s,t)* $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ *T is an invertible and class A(s,t) operator.*

ここで、class A$(k,1) \Longleftrightarrow$ class A(k) であることに注意しておく。これらの作用素のクラスについては、次の結果が示されている。

Theorem 1.F ([6]). *T: class AI(s,t) $\Longrightarrow$ T: class AI(p,r) for $p \geq s$ and $r \geq t$.*

私達は、Theorem 1.1 を示したのと同様の手法によって、class AI(s,t) operator のべき乗や Aluthge-Wang [2] によって定義された w-hyponormal operator ($|\tilde{T}| \geq |T| \geq |(\tilde{T})^*|$ where $T = U|T|$ is a polar decomposition and $\tilde{T} = |T|^{\frac{1}{2}}U|T|^{\frac{1}{2}}$) のべき乗に関する以下の結果を示した。

Theorem 1.4 ([17]). *Let T be a class AI(s,t) operator for $s,t \in (0,1]$. Then T^n is a class AI($\frac{s}{n},\frac{t}{n}$) operator for all positive integer n.*

Corollary 1.5 ([17]). *Let T be an invertible w-hyponormal operator. Then T^n is a class AI($\frac{1}{2n},\frac{1}{2n}$) operator for all positive integer n.*

また、class A(s,t) と parallel な関係かつ absolute-k-paranormal の拡張であるものとして、次の作用素のクラスを定義した。

Definition ([20]). *For each $s,t>0$,*
T: absolute-(s,t)-paranormal $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\||T|^s|T^*|^t x\|^t \geq \||T^*|^t x\|^{s+t}$ *for all unit vector $x \in H$.*

なお、absolute-$(k,1)$-paranormal $\Longleftrightarrow$ absolute-k-paranormal であることが Definition によりわかる。そして、この absolute-(p,r)-paranormal についての性質をいくつか示した [19, 20]。

2 Further extensions of characterizations of chaotic order associated with Kantorovich type inequalities

Theorem F の拡張として、次の Theorem G が知られている。

Theorem G (Furuta 1995 [9]). *If $A \geq B \geq 0$ with $A>0$, Then for each $t \in [0,1]$ and $p \geq 1$,*

$$A^{1-t+r} \geq \{A^{\frac{r}{2}}(A^{\frac{-t}{2}}B^pA^{\frac{-t}{2}})^sA^{\frac{r}{2}}\}^{\frac{1-t+r}{(p-t)s+r}}$$

holds for any $s \geq 1$ and $r \geq t$.

Theorem G は Theorem F 自身と、Ando-Hiai [3] による log majorization に関する結果と同値な作用素不等式を interpolate している。

一方、$A, B > 0$ のとき、$A \geq B$ よりも弱い order として、$\log A \geq \log B$ (chaotic order と呼ぶ) が知られている。 この chaotic order に関して、次のような characterization が示されている。

Theorem 2.C ([18]). *Let A and B be positive invertible operators satisfying $MI \geq A \geq mI > 0$. Then the following assertions are mutually equivalent:*

(i) $\log A \geq \log B$.

(ii) $\frac{(m^p+M^p)^2}{4m^pM^p}A^p \geq B^p$ *for all* $p \geq 0$.

Theorem 2.D ([4, 18]). *Let A and B be positive invertible operators satisfying $MI \geq A \geq mI > 0$. Then the following assertions are mutually equivalent:*

(i) $\log A \geq \log B$.

(ii) $M_h(p)A^p \geq B^p$ *for all* $p > 0$, *where* $h = \frac{M}{m} > 1$ *and* $M_h(p) = \dfrac{h^{\frac{p}{hp-1}}}{e\log(h^{\frac{p}{hp-1}})}$.

Theorem 2.D にでてくる $M_h(p)$ という数に関して、特に $p = 1$ の時は Specht's ratio と呼ばれ、例えば [5] で研究されている。

この Theorem 2.C に関して、最近 Furuta-Seo [11] によって Theorem G の応用である次の拡張が示されている。

Theorem 2.G ([11]). *Let A and B be positive invertible operators satisfying $MI \geq A \geq mI > 0$. Then the following assertions are mutually equivalent:*

(i) $\log A \geq \log B$.

(ii) *For each* $\alpha \in [0,1]$, $p \geq 0$ *and* $u \geq 0$,

$$\frac{\left(M^{(p+\alpha u)s} + m^{(p+\alpha u)s}\right)^2}{4M^{(p+\alpha u)s}m^{(p+\alpha u)s}}A^{(p+\alpha u)s} \geq (A^{\frac{\alpha u}{2}}B^pA^{\frac{\alpha u}{2}})^s$$

holds for $s \geq 1$ *such that* $(p+\alpha u)s \geq (1-\alpha)u$.

(iii) $\dfrac{\left(M^p + m^p\right)^2}{4M^pm^p}A^p \geq B^p$ *holds for* $p \geq 0$.

これらの定理について、私達は更なる拡張を得た。

Theorem 2.3 ([13]). *Let A and B be positive invertible operators satisfying $MI \geq A \geq mI > 0$, and*

$$K_+(m,M,p) = \frac{(p-1)^{p-1}}{p^p}\frac{(M^p - m^p)^p}{(M-m)(mM^p - Mm^p)^{p-1}}.$$

Then the following assertions are mutually equivalent:

(i) $\log A \geq \log B$.

(ii) *For each natural number* n, $\alpha \in [0,1]$, $p \geq 0$ *and* $u \geq 0$,

$$K_+\left(m^{\frac{(p+\alpha u)s+ru}{n+1}}, M^{\frac{(p+\alpha u)s+ru}{n+1}}, n+1\right)A^{(p+\alpha u)s} \geq (A^{\frac{\alpha u}{2}}B^pA^{\frac{\alpha u}{2}})^s$$

holds for all $s \geq 1$ *and* $r \geq 1-\alpha$ *such that* $\{nr + (n+1)\alpha\}u \geq (p+\alpha u)s$.

(iii) *For each natural number* n *and* $p \geq nu \geq 0$,

$$K_+\left(m^{\frac{p+ru}{n+1}}, M^{\frac{p+ru}{n+1}}, n+1\right)A^p \geq B^p$$

holds for real numbers r *such that* $nru \geq p$.

実際、Theorem 2.3 の (ii) において $n = 1$, $ru = (p + \alpha u)s$、(iii) において $n = 1$, $ru = p$ と置くことによって Theorem 2.G を含み、さらに Theorem 2.C と Theorem 2.D を interpolate することを示すことができる。また、本講演では Theorem 2.3 の証明を吟味することによって得られた更なる拡張も紹介したい。

参考文献

[1] A.Aluthge and D.Wang, *Powers of p-hyponormal operators*, J. Inequal. Appl., **3** (1999), 279–284.

[2] A.Aluthge and D.Wang, *w-Hyponormal operators*, to appear in Integral Equations Operator Theory.

[3] T.Ando and F.Hiai, *Log majorization and complementary Golden-Thompson type inequalities*, Linear Algebra Appl., **197, 198** (1994), 113–131.

[4] J.I.Fujii, T.Furuta, T.Yamazaki and M.Yanagida, *Simplified proof of characterization of chaotic order via Specht's ratio*, Scientiae Mathematicae, **2**, (1999), 63–64.

[5] J.I.Fujii and Y.Seo, *Determinant for positive operators and Specht's theorem*, Scientiae Mathematicae, **1** (1998), 153–156.

[6] M.Fujii, D.Jung, S.H.Lee, M.Y.Lee and R.Nakamoto, *Some classes of operators related to paranormal and* log-*hyponormal operators*, to appear in Math. Japon.

[7] T.Furuta, *On the class of paranormal operators*, Proc. Japan. Acad., **43** (1967), 594–598.

[8] T.Furuta, $A \geq B \geq 0$ *assures* $(B^r A^p B^r)^{1/q} \geq B^{(p+2r)/q}$ *for* $r \geq 0$, $p \geq 0$, $q \geq 1$ *with* $(1+2r)q \geq p+2r$, Proc. Amer. Math. Soc., **101** (1987), 85–88.

[9] T.Furuta, *Extension of the Furuta inequality and Ando-Hiai log-majorization*, Linear Algebra Appl., **219** (1995), 139–155.

[10] T.Furuta, M.Ito and T.Yamazaki, *A subclass of paranormal operators including class of log-hyponormal and several related classes*, Scientiae Mathematicae, **1** (1998), 389–403.

[11] T.Furuta and Y.Seo, *An application of generalized Furuta inequality to Kantorovich type inequalities*, Scientiae Mathematicae, **2** (1999), 393–399.

[12] P.R.Halmos, *A Hilbert Space Problem Book 2nd ed.*, Springer Verlag, New York, 1982.

[13] M.Hashimoto and T.Yamazaki, *Further extensions of characterizations of chaotic order associated with Kantorovich type inequalities*, to appear in Scientiae Mathematicae.

[14] M.Ito, *Several properties on class A including p-hyponormal and* log-*hyponormal operators*, Math. Inequal. Appl., **2** (1999), 569–578.

[15] M.Ito, *Generalizations of the results on powers of p-hyponormal operators*, to appear in J. Inequal. Appl.

[16] T.Yamazaki, *Extensions of the results on p-hyponormal and* log-*hyponormal operators by Aluthge and Wang*, SUT. J. Math., **35** (1999), 139–148.

[17] T.Yamazaki, *On powers of class A(k) operators including p-hyponormal and* log-*hyponormal operators*, Math. Inequal. Appl., **3** (2000), 89–96.

[18] T.Yamazaki and M.Yanagida, *Characterizations of chaotic order associated with Kantorovich inequality*, Scientiae Mathematicae., **2** (1999), 37–50.

[19] T.Yamazaki and M.Yanagida, *A characterization of* log-*hyponormal operators via p-paranormality*, Scientiae Mathematicae, **3** (2000), 19–22.

[20] T.Yamazaki and M.Yanagida, *A further generalization of paranormal operators*, Scientiae Mathematicae, **3** (2000), 23–32.