Order preserving operator inequalities and their recent applications

古田 孝之　(Takayuki Furuta)　東京理科大 理
山崎 丈明　(Takeaki Yamazaki)　東京理科大 理

1 Introduction

本講演では、表題の内容について、古田研の結果を主にして、survey 風に解説させていただきます。

ここではヒルベルト空間 H 上の有界線形作用素について考える。作用素 T が positive ($T \geq 0$ と書く) とはこの場合 positive definite とし、$(Tx, x) \geq 0$ が全ての $x \in H$ で成り立つことと定義する。そして、T が strictly positive ($T > 0$ と書く) とは、T が positive かつ invertible と定義する。また、positive operator について、次の有名な不等式が知られている。

Theorem A (Löwner-Heinz inequality 1934 [55, 64]).
$A \geq B \geq 0$ ensures $A^\alpha \geq B^\alpha$ for any $\alpha \in [0, 1]$.

この Theorem A はシンプルで非常にわかりやすい形をしているが、指数 $\alpha \in [0, 1]$ という強い制限のもとでしか成り立たないところが、応用上不便であった。そこで、応用上使いやすいように次の定理が確立された。

Theorem B (Furuta 1987 [30]).

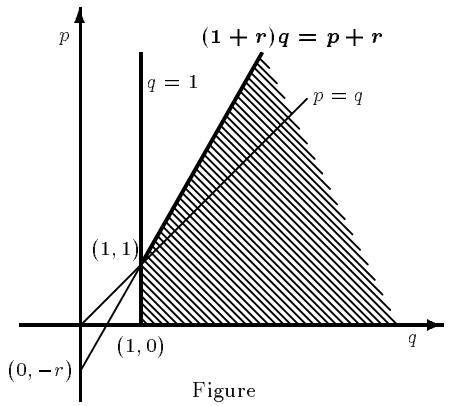
If $A \geq B \geq 0$, then for each $r \geq 0$,

(i) $\quad (B^{\frac{r}{2}} A^p B^{\frac{r}{2}})^{\frac{1}{q}} \geq (B^{\frac{r}{2}} B^p B^{\frac{r}{2}})^{\frac{1}{q}}$

and

(ii) $\quad (A^{\frac{r}{2}} A^p A^{\frac{r}{2}})^{\frac{1}{q}} \geq (A^{\frac{r}{2}} B^p A^{\frac{r}{2}})^{\frac{1}{q}}$

hold for $p \geq 0$ and $q \geq 1$ with $(1 + r)q \geq p + r$.



Figure

Theorem B の (i) または (ii) において、$r = 0$ とおくと、Theorem A を得ることができる。さらに、Theorem B の (i) と (ii) は互いに同値だということも知られている。ここで、Theorem B は次のように考える事が出来る。$f(\square) = (A^{\frac{r}{2}} \square A^{\frac{r}{2}})^{\frac{1}{q}}$, $g(\square) = (B^{\frac{r}{2}} \square B^{\frac{r}{2}})^{\frac{1}{q}}$ とした時、一般的には "$A \geq B \geq 0$ ならば $A^p \geq B^p$" ということは $p > 1$ の時には成り立たないが、Theorem B では、上の図で示されている p, q, r の範囲内では "$A \geq B \geq 0$ ならば $f(A^p) \geq f(B^p)$ や $g(A^p) \geq g(B^p)$" が成り立つということを言っている。また、上の図で描かれた p, q, r の範囲は Theorem B の (i) または (ii) の成り立つ範囲であり、それが best possible domain であることが、[72] で示されている。なお、Theorem B の別証明は [15, 31, 61] で得られており、[32] では 1 ページの簡単な証明が示されている。そして、Theorem B は今までに多くの研究者によって研究されており、今までに (A), (B), (C) の 3 つの分野で次のような応用が知られている。

(A) OPERATOR INEQUALITIES

(**A**-1) Several characterizations of operators $\log A \geq \log B$ and their applications;
(**A**-2) Applications to the relative operator entropy;

(**A**-3) Applications to Ando-Hiai log majorization;

(**A**-4) Generalized Aluthge transformation on p-hyponormal operators;

(**A**-5) Several classes associated with log-hyponormal and paranormal operators;

(**A**-6) Order preserving operator inequalities;

(**A**-7) Operator functions implying order preserving inequalities.

(B) NORM INEQUALITIES

(**B**-1) Several generalizations of Heinz-Kato theorem;

(**B**-2) Generalizations of some theorems on norms;

(**B**-3) An extension of Kosaki trace inequality and parallel results.

(C) OPERATOR EQUATIONS

(**C**-1) Generalizations of Pedersen-Takesaki theorem and related results.

この講演では、Theorem B を使った最近の応用をいくつか紹介する。

2 Recent applications of Theorem B

2.1 Several characterizations of operators $\log A \geq \log B$ and their applications

positive invertible operator A と B において、$A \geq B$ よりも弱い order として、$\log A \geq \log B$ (chaotic order と呼ぶ) が知られている。この chaotic order は、例えば次の節で紹介する operator entropy への応用が知られているが、Theorem B を使うことによって、今までに、次のような chaotic order の characterization が示されている。

Theorem C ([16, 20, 22, 23, 25, 34, 75]). *Let A and B be positive invertible operators. Then the following assertions are mutually equivalent;*

(i) $\log A \geq \log B$,

(ii) $A^r \geq (A^{\frac{r}{2}} B^p A^{\frac{r}{2}})^{\frac{r}{p+r}}$ *for all* $p \geq 0$ *and* $r \geq 0$.

この、Theorem C は $p = r$ の時は [7] で示されている。なお、最近は Uchiyama [75] によって、Theorem B において、簡単な変数変換だけを使った Theorem C の別証明が知られている。以下、Uchiyama [75] による証明をここに紹介する。

Proof. (i) $\Longrightarrow$ (ii) を示す。"$A \geq B$ ensures $e^{rA} \geq (e^{\frac{rA}{2}} e^{pB} e^{\frac{rA}{2}})^{\frac{r}{p+r}}$ for $p \geq 0$ and $r \geq 0$" を示せばよい。

$A \geq B$ であることから、$1 + \frac{A}{n} \geq 1 + \frac{B}{n} \geq 0$ が十分大きな n に対して成り立つことがわかる。そこで、$1 + \frac{A}{n} \geq 1 + \frac{B}{n} \geq 0$ に対して、p の代わりに np, r の代わりに nr として Theorem B を適用すると、

$$\left(1 + \frac{A}{n}\right)^{\frac{np+nr}{q}} \geq \left\{\left(1 + \frac{A}{n}\right)^{\frac{nr}{2}} \left(1 + \frac{B}{n}\right)^{np} \left(1 + \frac{A}{n}\right)^{\frac{nr}{2}}\right\}^{\frac{1}{q}} \tag{1}$$

for $r \geq 0$, $p \geq 0$ and $q \geq 1$ with $(1 + nr)q \geq np + nr$ が成り立つ。また、selfadjoint operator X に対して、$(1 + \frac{X}{n})^n \longrightarrow e^X$ as $n \longrightarrow \infty$ である事がわかっているので、よって (1) 式において $n \longrightarrow \infty$ とすることで $e^{rA} \geq (e^{\frac{rA}{2}} e^{pB} e^{\frac{rA}{2}})^{\frac{r}{p+r}}$ for $p \geq 0$ and $r \geq 0$ を示すことができた。

(ii) $\Longrightarrow$ (i) を示す。(ii) より、$\log A^r \geq \log (A^{\frac{r}{2}} B^p A^{\frac{r}{2}})^{\frac{r}{p+r}}$ が成り立つので、log の性質を使うことによって、$\log A \geq \log (A^{\frac{r}{2}} B^p A^{\frac{r}{2}})^{\frac{1}{p+r}}$ を得る。よって、$p = 0$ とすることで、$\log A \geq \log B$ となり、(i) を得た。 □

また、chaotic order の characterization として、 Theorem C の他に、次の結果を得た。

Theorem 1 ([11, 80]). *Let A and B be positive invertible operators satisfying $MI \geq B \geq mI > 0$. Then the following assertions are mutually equivalent;*

(i) $\log A \geq \log B$,
(ii) $M_h(p)A^p \geq B^p$ *for all* $p \geq 0$.

where $h = \frac{M}{m} > 1$ *and* $M_h(p) = \dfrac{h^{\frac{p}{h^p-1}}}{e\log(h^{\frac{p}{h^p-1}})}$.

Remark. Theorem 1 にでてくる $M_h(p)$ という数は、$p = 1$ の時は Specht's ratio と呼ばれ、例えば [13, 14, 71] で研究されている。

2.2 Applications to the relative operator entropy

chaotic order を使った代表的な応用として、operator entropy が知られている。

Definition 2 (Relative operator entropy [12]). *Let A and B be positive invertible operators. Then the relative operator entropy $S(A|B)$ is defined by*

$$S(A|B) = A^{\frac{1}{2}}(\log A^{\frac{-1}{2}}BA^{\frac{-1}{2}})A^{\frac{1}{2}}.$$

特に、 $S(A|I) = -A\log A$ のことを usual operator entropy [69] と呼ばれている。そして、 relative operator entropy に関して、これまでに次の結果が示されている。

Theorem D ([34, 35]). *Let A, B and C be positive invertible operators. Then the following assertions are mutually equivalent;*

(i) $\log A \geq \log B \geq \log C$.
(ii) $(B^{\frac{r}{2}}A^pB^{\frac{r}{2}})^{\frac{r}{p+r}} \geq B^r \geq (B^{\frac{r}{2}}C^pB^{\frac{r}{2}})^{\frac{r}{p+r}}$ *for all* $p \geq 0$ *and* $r \geq 0$.
(iii) $S(B^{-r}|A^p) \geq S(B^{-r}|B^p) \geq S(B^{-r}|C^p)$ *for all* $p \geq 0$ *and* $r \geq 0$.

さらに、Theorem D の (iii) において、B を B^{-1} に置き換えて、$p = r = 1$ と置くと、次のように relative operator entropy と usual operator entropy の関係としての次の結果が得られる。

Corollary E ([35]). *Let A, B and C be positive invertible operators satisfying* $\log A \geq \log B^{-1} \geq \log C$. *Then*

$$S(B|A) \geq -2B\log B \geq S(B|C).$$

2.3 Aluthge transformation on p-hyponormal operators

operator T が normal であるとは、$T^*T = TT^*$ を満たすことであるが、normal を拡張した operator class として、次の operator class が知られている。

Definition F.

(i) T: *hyponormal* $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $T^*T \geq TT^*$.
(ii) T: *p-hyponormal for* $p > 0$ $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $(T^*T)^p \geq (TT^*)^p$.
(iii) T: log-*hyponormal* $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ T *is invertible and* $\log T^*T \geq \log TT^*$.
(iv) T: *paranormal* $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\| T^2x \| \geq \|Tx\|^2$ *for every unit vector* $x \in H$.

この p-hyponormal については、Theorem A を使うことによって、$p \geq q > 0$ の時、T: p-hyponormal $\Longrightarrow$ T: q-hyponorml であることがわかる。このように、T: p-hyponormal であれば、それより弱い operator class に入ることがわかるが、Theorem B を使うことによって、次の結果が得られている。

Theorem G ([1, 2]). *Let $T = U|T|$ be a p-hyponormal operator for $p \in (0, 1]$ and U be unitary operator. Then the following assertions hold:*

(i) $\tilde{T} = |T|^{\frac{1}{2}}U|T|^{\frac{1}{2}}$ *is* $(p + \frac{1}{2})$*-hyponormal for* $p \in (0, \frac{1}{2}]$,
(ii) $\tilde{T} = |T|^{\frac{1}{2}}U|T|^{\frac{1}{2}}$ *is hyponormal for* $p \in [\frac{1}{2}, 1]$.

Remark. この$T = |T|^{\frac{1}{2}}U|T|^{\frac{1}{2}}$ は Aluthge transformation と呼ばれ、現在ではこれの一般化 [3, 4, 5, 37, 51, 58, 81, 83] や更にlog-hyponormal についての Aluthge transformation などについても研究がなされている [74]。

Proof. T が p-hyponormal である、すなわち $(T^*T)^p \geq (TT^*)^p$ が成り立つことは、$|T| = (T^*T)^{\frac{1}{2}}$ より $|T|^{2p} \geq |T^*|^{2p} = U|T|^{2p}U^*$ が成り立ち、結局次の式を得る。

$$U^*|T|^{2p}U \geq |T|^{2p} \geq U|T|^{2p}U^*. \tag{2}$$

そこで、$A = U^*|T|^{2p}U$, $B = |T|^{2p}$, $C = U|T|^{2p}U^*$ と置くと、(2) 式より $A \geq B \geq C \geq 0$ である。また、U が unitary であることから $U^*|T|U = A^{\frac{1}{2p}}$ が成り立つ。

(a) $p \in (0, \frac{1}{2}]$ の時。Theorem B を使うことによって、次の式を得る。

$$\begin{aligned}
(\tilde{T}^*\tilde{T})^{p+\frac{1}{2}} &= (|T|^{\frac{1}{2}}U^*|T|U|T|^{\frac{1}{2}})^{p+\frac{1}{2}} \\
&= (B^{\frac{1}{4p}}A^{\frac{1}{2p}}B^{\frac{1}{4p}})^{\frac{1+\frac{1}{2p}}{\frac{1}{2p}+\frac{1}{2p}}} \\
&\geq B^{1+\frac{1}{2p}} = |T|^{1+2p} \\
&\geq (B^{\frac{1}{4p}}C^{\frac{1}{2p}}B^{\frac{1}{4p}})^{\frac{1+\frac{1}{2p}}{\frac{1}{2p}+\frac{1}{2p}}} \\
&= (|T|^{\frac{1}{2}}U|T|U^*|T|^{\frac{1}{2}})^{p+\frac{1}{2}} \\
&= (\tilde{T}\tilde{T}^*)^{p+\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

よって、$\tilde{T} = |T|^{\frac{1}{2}}U|T|^{\frac{1}{2}}$ は $(p + \frac{1}{2})$-hyponormal for $p \in (0, \frac{1}{2}]$ である。

(b) $p \in [\frac{1}{2}, 1]$ の時。U は unitary であるから (2) 式より

$$(U^*|T|U)^{2p} \geq |T|^{2p} \geq (U|T|U^*)^{2p}$$

が成り立つ。そこで Theorem A を適用すると、

$$U^*|T|U \geq |T| \geq U|T|U^*$$

が成り立つ。よって、

$$\tilde{T}^*\tilde{T} = |T|^{\frac{1}{2}}U^*|T|U|T|^{\frac{1}{2}} \geq |T|^2 \geq |T|^{\frac{1}{2}}U|T|U^*|T|^{\frac{1}{2}} = \tilde{T}\tilde{T}^*$$

となり、$\tilde{T} = |T|^{\frac{1}{2}}U|T|^{\frac{1}{2}}$ は hyponormal である。 □

2.4 On powers of p-hyponormal and log-hyponormal operators

前の節で紹介した p-hyponormal や log-hyponormal について、最近では Theorem B を使うことによってこれらの operator class の n 乗についても研究されている。

Theorem H ([5]). *Let T be a p-hyponormal operator for $p \in (0,1]$. The inequalities*

$$(T^{n*}T^n)^{\frac{p}{n}} \geq (T^*T)^p \geq (TT^*)^p \geq (T^nT^{n*})^{\frac{p}{n}}$$

hold for all positive integer n.

今までは、T が hyponormal でも一般的に T^2 も hyponormal なるとは限らないということが知られていたが [54]、Theorem H では T が p-hyponormal ならば T^n は $(\frac{p}{n})$-hyponormal であるということを示している。この結果の拡張として、次の結果を得た。

Theorem 3 ([53]). *Let T be a p-hyponormal operator for $p \in (0,1]$. Then*

(i) $(T^*T)^{p+1} \leq (T^{2*}T^2)^{\frac{p+1}{2}} \leq \cdots \leq (T^{n*}T^n)^{\frac{p+1}{n}}$,
(ii) $(TT^*)^{p+1} \geq (T^2T^{2*})^{\frac{p+1}{2}} \geq \cdots \geq (T^nT^{n*})^{\frac{p+1}{n}}$,

hold for all positive integer n.

Theorem 3 において、それぞれの式に対して、Theorem A を使い、更に、T が p-hyponormal であることを考えることによって Theorem H を得る。

また、log-hyponormal についても、次の結果が示されている。

Theorem I ([4]). *If T is* log*-hyponormal, then T^{2^n} is* log*-hyponormal for any positive integer n.*

そして、これの拡張にあたる次の結果も得た。

Theorem 4 ([79]). *Let T be a* log*-hyponormal operator. Then*

(i) $(T^*T) \leq (T^{2*}T^2)^{\frac{1}{2}} \leq \cdots \leq (T^{n*}T^n)^{\frac{1}{n}}$,
(ii) $(TT^*) \geq (T^2T^{2*})^{\frac{1}{2}} \geq \cdots \geq (T^nT^{n*})^{\frac{1}{n}}$,

hold for all positive integer n.

Corollary 5 ([79]). *Let T be a* log*-hyponormal operator. Then T^n is also a* log*-hyponormal operator for all positive integer n.*

2.5 Several classes associated with log-hyponormal and paranormal operators

2.3 節で紹介した、hyponormal や p-hyponormal、log-hyponormal は operator inequality で定義された class であるが、最近これらの class に対して Theorem B を使った研究がなされている [1, 3, 4, 5, 44, 53, 56, 74, 79, 81, 83]. そして、次のような operator class が新しく定義された。

Definition 6 ([44]). *For each $k > 0$,*

(i) *T: class A* $\overset{\text{def}}{\iff}$ $|T^2| \geq |T|^2$.
(ii) *T: class $A(k)$* $\overset{\text{def}}{\iff}$ $(T^*|T|^{2k}T)^{\frac{1}{k+1}} \geq |T|^2$.
(iii) *T: absolute-k-paranormal* $\overset{\text{def}}{\iff}$ $\| |T|^kTx \| \geq \|Tx\|^{k+1}$ *for every unit vector $x \in H$.*

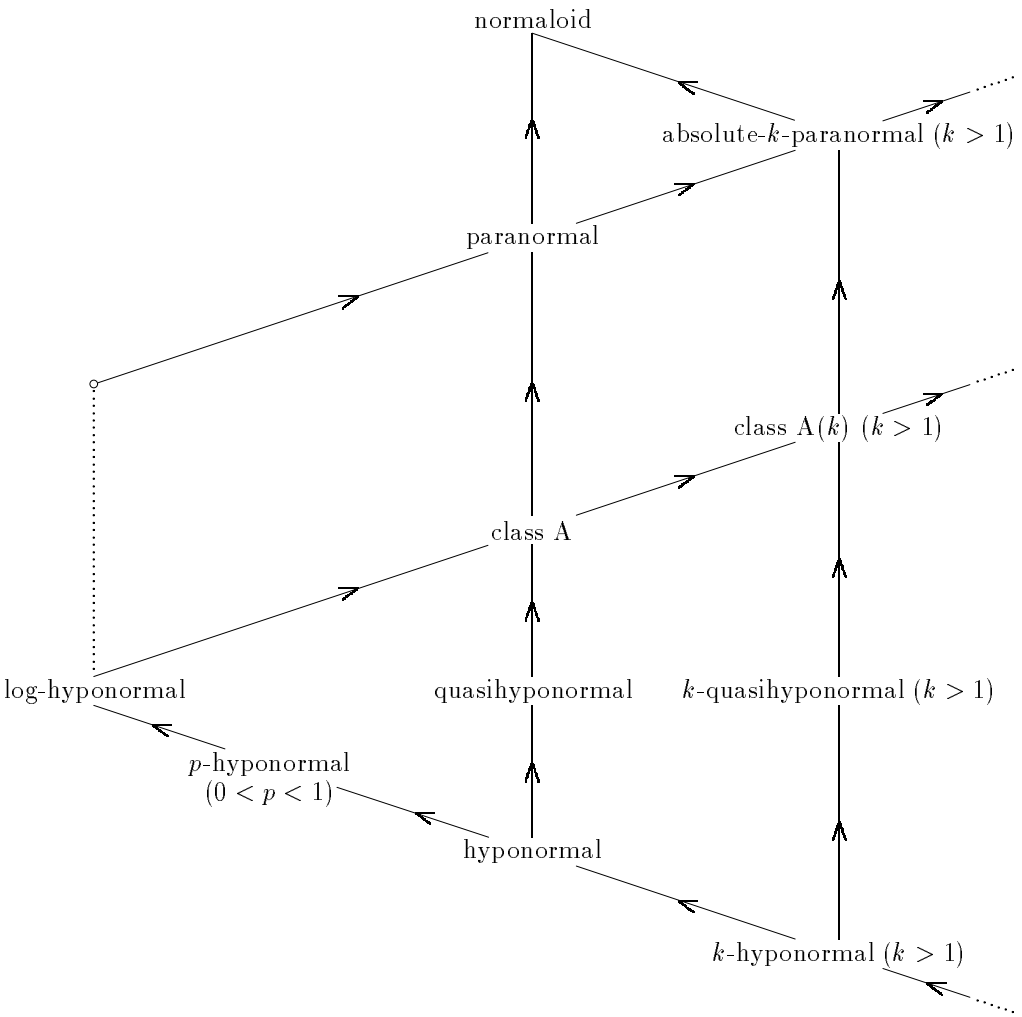
なお、class A は class A(1) のことであり、paranormal は absolute-k-paranormal のことであることが Definition 6 からわかる。また、この operator class を考えることによって、従来知られていた p-hyponormal と log-hyponormal との関係について、次のような結果を得た。

Theorem 7 ([44]). *Let $T \in B(H)$. Then the following assertions hold;*

(i) *T: log-hyponormal $\Longrightarrow$ T: class A.*
(ii) *T: class A $\Longrightarrow$ T: paranormal.*
(iii) *T: invertible and class A $\Longrightarrow$ T: class $A(k)$ for $k \geq 1$.*
(iv) *For each $k > 0$, T: class $A(k)$ $\Longrightarrow$ T: absolute-k-paranormal.*
(v) *T: paranormal $\Longrightarrow$ T: absolute-k-paranormal for $k \geq 1$.*

これまでは、Ando [6] によって、"log-hyponormal $\Longrightarrow$ paranormal " であることが示されていたが、Theorem 7 では operator inequality を使うことによって、log-hyponormal と paranormal の関係について自然な解釈を与えることができ、Ando の結果を拡張している。

最後に、これらの operator class の関係図を下の図に挙げておく。



参考文献

[1] A.Aluthge, *On p-hyponormal operators for* $0 < p < 1$, Integr. Equat. Oper. Th., **13** (1990), 307–315.

[2] A.Aluthge, *Properties of p-hyponormal operators*, unpublished dissertion, Vanderbilt University, Nashville, TN, August 1990.

[3] A.Aluthge, *Some generalized theorems on p-hyponormal operators*, Integr. Equat. Oper. Th., **24** (1996), 497–501.

[4] A.Aluthge and D.Wang, *An operator inequality which implies paranormality*, Math. Inequal. Appl., **2** (1999), 113–119.

[5] A.Aluthge and D.Wang, *Powers of p-hyponormal operators*, preprint.

[6] T.Ando, *Operators with a norm condition*, Acta. Sci. Math. Szeged, **33** (1972), 169–178.

[7] T.Ando, *On some operator inequalities*, Math. Ann., **279** (1987), 157–159.

[8] T.Ando and F.Hiai, *Log majorization and complementary Golden-Thompson type inequalities*, Linear Algebra Appl., **197, 198** (1994), 113–131.

[9] M.Cho and M.Itoh, *Putnam's inequality for p-hyponormal operators*, Proc. Amer. Math. Soc., **123** (1995), 2435–2440.

[10] B.P.Duggal, *On p-hyponormal contraction*, Proc. Amer. Math. Soc., **123** (1995), 81–86.

[11] J.I.Fujii, T.Furuta, T.Yamazaki and M.Yanagida, *Simplified proof of characterization of chaotic order via Specht's ratio*, to appear in Scientiae Mathematicae.

[12] J.I.Fujii and E.Kamei, *Uhlmann's interpolational method for operator means*, Math. Japon., **34** (1989), 541–547.

[13] J.I.Fujii and Y.Seo, *Determinant for positive operators*, Scientiae Mathematicae, **1** (1998), 153–156.

[14] J.I.Fujii and Y.Seo, *Determinant for positive operators and Specht's theorem*, to appear in Scientiae Mathematicae.

[15] M.Fujii, *Furuta's inequality and its mean theoretic approach*, J. Operator Theory, **23** (1990), 67–72.

[16] M.Fujii, T.Furuta and E.Kamei, *Furuta's inequality and its application to Ando's theorem*, Linear Algebra Appl., **179** (1993), 161–169.

[17] M.Fujii, T.Furuta and E.Kamei, *Complements to the Furuta inequality*, Proc. Japan. Acad., **70** (1994), Ser.A, 239–242.

[18] M.Fujii, T.Furuta and E.Kamei, *Complements to the Furuta inequality, III*, Math. Japon., **45** (1997), 25–32.

[19] M.Fujii, T.Furuta and E.Kamei, *Complements to the Furuta inequality, IV*, Math. Japon, **45** (1997), 511–518.

[20] M.Fujii, T.Furuta and D.Wang, *An application of the Furuta inequality to operator inequalities on chaotic orders*, Math. Japon., **40** (1994), 317–321.

[21] M.Fujii, S.Izumino, R.Nakamoto and Y.Seo, *Operator inequalities related to Cauchy-Schwarz and Hölder-McCarthy inequalities*, Nihonkai Math. J. **8** (1997), 117–122.

[22] M.Fujii, J.F.Jiang and E.Kamei, *A characterization of orders defined by* $A^\delta \geq B^\delta$ *via Furuta inequality*, Math. Japon., **45** (1997), 519–525.

[23] M.Fujii, J.F.Jiang and E.Kamei, *Characterization of chaotic order and its application to Furuta inequality*, Proc. Amer. Math. Soc., **125** (1997), 3655–3658.

[24] M.Fujii, J.F.Jiang and E.Kamei, *The monotonicity of operator functions associated with the Furuta inequality*, Math. Japon., **46** (1997), 337–343.

[25] M.Fujii, J.F.Jiang, E.Kamei and K.Tanahashi, *A characterization of chaotic order and a problem*, J. Inequal. Appl., **2** (1998), 149–156.

[26] M.Fujii and E.Kamei, *Mean theoretic approach to the grand Furuta inequality*, Proc. Amer. Math. Soc., **124** (1996), 2751–2756.

[27] M.Fujii, A.Matsumoto and R.Nakamoto, *A short proof of the best possibility for the grand Furuta inequality*, preprint.

[28] M.Fujii, R.Nakamoto and H.Watanabe, *The Heinz-Kato-Furuta inequality and hyponormal operators*, Math. Japon., **40** (1994), 469–472.

[29] T.Furuta, *On the class of paranormal operators*, Proc. Japan. Acad., **43** (1967), 594–598.

[30] T.Furuta, $A \geq B \geq 0$ *assures* $(B^r A^p B^r)^{1/q} \geq B^{(p+2r)/q}$ *for* $r \geq 0$, $p \geq 0$, $q \geq 1$ *with* $(1+2r)q \geq p+2r$, Proc. Amer. Math. Soc., **101** (1987), 85–88.

[31] T.Furuta, *A proof via operator means of an order preserving inequality*, Linear Algebra Appl., **113** (1989), 129–130.

[32] T.Furuta, *An elementary proof of an order preserving inequality*, Proc. Japan Acad., **65** (1989), 126.

[33] T.Furuta, *Two operator functions with monotone property*, Proc. Amer. Math. Soc., **111** (1991), 511–516.

[34] T.Furuta, *Applications of order preserving operator inequalities*, Oper. Theory Adv. Appl., **59** (1992), 180–190.

[35] T.Furuta, *Furuta's inequality and its application to the relative operator entropy*, J. Operator Theory, **30** (1993), 21–30.

[36] T.Furuta, *Extension of the Furuta inequality and Ando-Hiai log-majorization*, Linear Algebra Appl., **19** (1995), 139–155.

[37] T.Furuta, *Generalized Aluthge transformation on p-hyponormal operators*, Proc. Amer. Math. Soc., **124** (1996), 3071–3075.

[38] T.Furuta, *Characterizations of chaotic order via generalized Furuta inequality*, J. Inequal. Appl. **1** (1997), 11–24.

[39] T.Furuta, *Parallelism related to the inequality "* $A \geq B \geq 0$ *ensures* $(A^{\frac{r}{2}} A^p A^{\frac{r}{2}})^{\frac{1+r}{p+r}} \geq (A^{\frac{r}{2}} B^p A^{\frac{r}{2}})^{\frac{1+r}{p+r}}$ *for* $p \geq 1$, $r \geq 0$*"*, Math. Japon., **45** (1997), 203–209.

[40] T.Furuta, *Operator inequalities associated with Hölder-McCarthy and Kantorovich inequalities*, J. Inequal. Appl. **2** (1998), 137–148.

[41] T.Furuta, *Simplified proof of an order preserving operator inequality*, Proc. Japan Acad., **74** (1998), 114.

[42] T.Furuta, *Generalized Furuta inequality in Banach* $*$*-algebras and its applications*, Math. Ineqal. Appl., **2** (1999), 289–295.

[43] T.Furuta, M.Hashimoto and M.Ito, *Equivalence relation between generalized Furuta inequality and related operator functions*, Scientiae Mathematicae, **1** (1998), 257–259.

[44] T.Furuta, M.Ito and T.Yamazaki, *A subclass of paranormal operators including class of log-hyponormal and several related classes*, Scientiae Mathematicae, **1** (1998), 389–403.

[45] T.Furuta and D.Wang, *A decreasing operator function associated with Furuta inequality*, Proc. Amer. Math. Soc., **126** (1998), 2427–2432.

[46] T.Furuta, T.Yamazaki and M.Yanagida, *Equivalence relations among Furuta-type inequalities with negative powers*, Scientiae Mathematicae, **1** (1998), 223–229.

[47] T.Furuta, T.Yamazaki and M.Yanagida, *On a conjecture related to Furuta-type inequalities with negative powers*, Nihonkai Math. J., **9** (1998), 213–218.

[48] T.Furuta, T.Yamazaki and M.Yanagida, *Operator functions implying generalized Furuta inequality*, Math. Ineqal. Appl., **1** (1998), 123–130.

[49] T.Furuta, T.Yamazaki and M.Yanagida, *Order preserving operator inequalities via Furuta inequality*, Math. Japon., **48** (1998), 471–476.

[50] T.Furuta, T.Yamazaki and M.Yanagida, *Order preserving operator function via Furuta inequality "*$A \geq B \geq 0$ *ensures* $(A^{\frac{r}{2}} A^p A^{\frac{r}{2}})^{\frac{1+r}{p+r}} \geq (A^{\frac{r}{2}} B^p A^{\frac{r}{2}})^{\frac{1+r}{p+r}}$ *for* $p \geq 1$ *and* $r \geq 0$*"*, to appear in Proc. 96-IWOTA.

[51] T.Furuta and M.Yanagida, *Further extension of Aluthge transformation on p-hyponormal operators*, Integr. Equat. Oper. Th., **29** (1997), 122–125.

[52] T.Furuta and M.Yanagida, *Generalized means and convexity of inversion for positive operators*, Amer. Math. Monthly, **105** (1998), 258–259.

[53] T.Furuta and M.Yanagida, *On powers of p-hyponormal and* log*-hyponormal operators*, preprint.

[54] P.R.Halmos, *A Hilbert Space Problem Book 2nd ed.*, Springer Verlag, New York, 1982.

[55] E.Heinz, *Beiträge zur Störungstheorie der Spektralzerlegung*, Math. Ann., **123** (1951), 415–438.

[56] T.Huruya, *A note on p-hyponormal operators*, Proc. Amer. Math. Soc., **125** (1997), 3617–3624.

[57] V.Istrăţescu, T.Saito and T.Yoshino *On a class of operators*, Tohoku Math. J., **18** (1966), 410–413.

[58] M.Ito, *Some classes of operators associated with generalized Aluthge transformation*, preprint

[59] M.Ito, *Several properties on class A including p-hyponormal and* log*-hyponormal operators*, preprint

[60] E.Kamei, *Complements to the Furuta inequality, II*, Math. Japon., **45** (1997), 15–23.

[61] E.Kamei, *A satellite to Furuta's inequality*, Math. Japon., **33** (1988), 883–886.

[62] E.Kamei, *Monotonicity of the Furuta inequality on its complementary domain*, Math. Japon., **49** (1999), 21–26.

[63] E.Kamei, *Parametrization of the Furuta inequality*, Math. Japon., **49** (1999), 65–71.

[64] K.Löwner, *Über monotone Matrixfunktionen*, Math. Z., **38** (1934), 177–216.

[65] C.A.McCarthy, c_p, Israel J. Math. **5** (1967), 249–271.

[66] J.Mićić, Y.Seo, S.E.Takahashi and M.Tominaga, *Inequalities of Furuta and Mond-Pečarić*, Math. Ineqal. Appl. **2** (1999), 83–111.

[67] B.Mond and J.E.Pečarić, *Convex inequalities in Hilbert spaces*, Houston J. Math. **19** (1993), 405–420.

[68] B.Mond and J.E.Pečarić, *A matrix version of the Ky Fan generalization of the Kantorovich inequality*, Linear and Multilinear Algebra **36** (1994), 217–221.

[69] M.Nakamura and H.Umegaki, *A note on the entropy for operator algebras*, Proc. Japan Acad., **37** (1961), 149–154.

[70] G.K.Pedersen, *Some operator monotone functions*, Proc. Amer. Math. Soc., **36** (1972), 309–310.

[71] W.Specht, *Zur Theorie der elementaren Mittel*, Math. Z. **74** (1960) 91–98.

[72] K.Tanahashi, *Best possibility of the Furuta inequality*, Proc. Amer. Math. Soc., **124** (1996), 141–146.

[73] K.Tanahashi, *The best possibility of the grand Furuta inequality*, to appear in Proc. Amer. Math. Soc.

[74] K.Tanahashi, *On* log*-hyponormal operators*, preprint.

[75] M.Uchiyama, *Some exponential operator inequalities*, preprint.

[76] H.Umegaki, *Conditional expectation in operator algebra IV (entropy and information)*, Kodai Math. Sem. Rep., **14** (1962), 58–85.

[77] D.Xia, *Spectral theory of hyponormal operators*, Birkhauser Verlag, Boston, 1983.

[78] T.Yamazaki, *Simplified proof of Tanahashi's result on the best possibility of generalized Furuta inequality*, to appear in Math. Ineqal. Appli.

[79] T.Yamazaki, *Extension of the results on p-hyponormal and* log*-hyponormal operators by Aluthge and Wang*, preprint.

[80] T.Yamazaki and M.Yanagida, *Characterizations of chaotic order associated with Kantorovich inequality*, to appear in Scientiae Mathematicae.

[81] M.Yanagida, *Some applications of Tanahashi's result on the best possibility of Furuta inequality*, Math. Ineqal. Appl., **2** (1999), 297–305.

[82] T.Yoshino, *Introduction to Operator Theory*, Pitman Research Notes in Math. Ser., 300, Longman Scientific and technical, 1993

[83] T.Yoshino, *The p-hyponormality of the Aluthge transform*, Interdiscip. Inform. Sci., **3** (1997), 91–93.