面積について

加藤　圭一*

1　面積とは

1) 面積を考える基本となるのは，長方形の面積である．すなわち，次が基本となる．

「よこの長さが a，たての長さが b の長方形の面積は，ab である.」

2) 底辺の長さが a，高さが h の三角形の面積は，よこの長さが a，縦が h の長方形の面積の半分であるから

$$\frac{1}{2}ah$$

である．
3) 多角形は，いくつかの三角形に分割できるから，面積が計算可能である．
4) 一般の図形の面積について，考察してみよう．面積を測りたい図形を D とする．D を含む多角形 E を考えると

$$(\text{D の面積}) \leqq (\text{E の面積})$$

である．したがって，

$$\sup_{F \subset D} (\text{F の面積}) \leqq (\text{D の面積}) \leqq \inf_{E \supset D} (\text{E の面積})$$

ただし，$\sup_{F \subset D}$ は，D に含まれる多角形 F についての上限を意味し，$\inf_{E \supset D}$ は，D を含む多角形 E についての下限を意味する．

*東京理科大学理学部第一部数学科 e-mail: kato@ma.kagu.tus.ac.jp

2　円周率，円の面積

半径 r の円に内接する正 n 角形の一辺の長さを ℓ_n，半径 r の円に外接する正 n 角形の一辺の長さを L_n とする．内接する正 n 角形の周の長さは $n\ell_n$ であり，外接する正 n 角形の周の長さは nL_n だから，3 以上のすべての自然数 n について，

$$n\ell_n < 2\pi r < nL_n$$

が成立する．

逆に，3 以上のすべての自然数 n について，

$$n\ell_n < a < nL_n$$

をみたす数 a は，$2\pi r$ 以外ない．

半径 r の円の面積を S，内接する正 n 角形の面積を s_n，外接する正 n 角形の面積を S_n とすると，

$$s_n < S < S_n$$

がすべての 3 以上の自然数 n で成り立つ．

内接正 n 角形は，3 辺の長さが r, r, ℓ_n の 2 等辺三角形 n 個に分けられる．3 辺の長さが r, r, ℓ_n の 2 等辺三角形の面積は，

$$\frac{1}{2} \times \ell_n \times \sqrt{r^2 - \frac{\ell_n^2}{4}} = \frac{\ell_n}{2}\sqrt{r^2 - \frac{\ell_n^2}{4}}$$

だから，

$$s_n = \frac{n\ell_n}{2}\sqrt{r^2 - \frac{\ell_n^2}{4}}$$

となる．外接正 n 角形は，底辺の長さが L_n，高さが r の 2 等辺三角形 n 個に分けられるから，

$$S_n = \frac{nL_nr}{2}$$

である．

従って，3 以上のすべての自然数 n について，

$$\frac{n\ell_n}{2}\sqrt{r^2 - \frac{\ell_n^2}{4}} \leqq S \leqq \frac{nL_nr}{2}$$

となる．n を大きくすると，ℓ_n はいくらでも小さくなるから，

$$S = \pi r^2$$

がわかる．

ℓ_n，L_n については，

$$\begin{cases} L_{2n} = \frac{L_n\ell_n}{L_n+\ell_n} = \frac{1}{\frac{1}{\ell_n}+\frac{1}{L_n}} \\ \ell_{2n} = \sqrt{\frac{\ell_nL_{2n}}{2}} \end{cases}$$

(n=1,2,3,$\cdots$) が成り立つことがわかっている．

問：これを示せ．

3　曲面の面積

次に曲がった面 (曲面) の面積について考えよう．

地球は (近似的に) 球体であるが，個人所有の土地の面積を考える場合には，長方形の土地であれば，

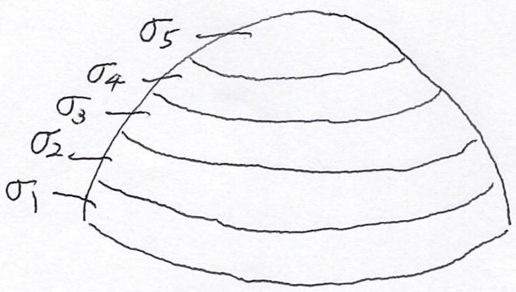
$$(\text{面積}) = (\text{たて}) \times (\text{よこ})$$

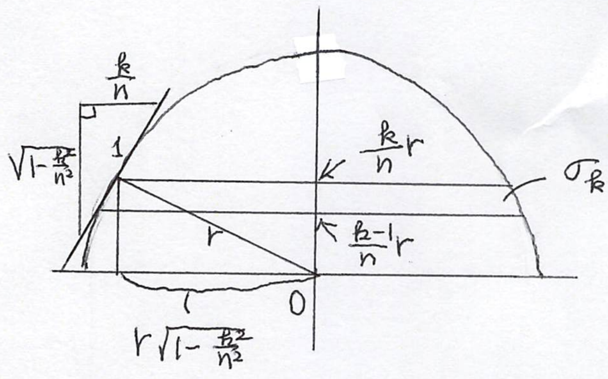
と計算する．地球の半径が個人所有の土地に対して非常に大きいから，この方法でまったく問題が起こらないのである．このことをヒントにすると，曲面の面積は曲面を非常に多くの部分に分け，各部分では，平面だと思って計算すればよい．

半径 r の球面の場合を考えてみよう．半径 r の球面の半分の面積を計算しよう．半球面を高さ $\frac{r}{n}$ きざみで輪切りにし，下から k 番目を σ_k とする．s_k は鉛直方向に対して，$(\frac{k}{n}, \sqrt{1-\frac{k^2}{n^2}})$ に傾いていると考えられるから，

$$(\sigma_k\text{のはば}) \cong \frac{1}{n}r \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\frac{k^2}{n^2}}} = \frac{r}{n\sqrt{1-\frac{k^2}{n^2}}}$$

と考えられる．





ゆえに，

$$(\sigma_k\text{の面積}) \cong 2\pi r\sqrt{1-\frac{k^2}{n^2}} \times \frac{r}{n\sqrt{1-\frac{k^2}{n^2}}} = \frac{2\pi r^2}{n}$$

となる．したがって，

$$\text{半径 1 の球面の半分} = \sum_{k=1}^{n}(\sigma_k\text{面積}) \cong \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n} \times 2\pi r^2 = 2\pi r^2$$

となる．n を大きくすると，誤差はいくらでも小さくなると考えられるので，半径 r の球面の面積は，$4\pi r^2$ であることがわかる．