

ベクトル束によるエルミート対称空間の特徴づけ A characterization of the Hermitian symmetric spaces by vector bundles

明治大学理工学部 長友 康行 (Yasuyuki Nagatomo)
Department of Mathematics, Meiji University

本講演の目的は次の二つの定理を紹介することである。 M を多様体としたとき、複素ベクトル空間 $\mathbf{C}^N$ をファイバーとする M 上の自明束 $M \times \mathbf{C}^N \rightarrow M$ を $\underline{\mathbf{C}^N}$ と表すことにする。

以下、 M を完備ケーラー多様体とし、 $V \rightarrow M$ を M 上の、 $\mathbf{C}^N \subset H^0(M; V)$ により大域的に生成される正則ベクトル束とする。したがって、次の正則ベクトル束の完全列が存在する:

$$(1) \quad 0 \rightarrow \text{Ker } ev \rightarrow \underline{\mathbf{C}^N} \xrightarrow{ev} V \rightarrow 0.$$

$\mathbf{C}^N$ にエルミート内積を与えると、 V にエルミート計量 h が誘導される。これを (V, h) と表す。

定理 1. $\mathbf{C}^N$ が以下の条件を満たすエルミート内積を持つと仮定する。

- (i) (V, h) は平坦な部分束を持たない。
 - (ii) (1) の第 2 基本形式 $B \in \Gamma(T^{0,1} \otimes V^* \otimes \text{Ker } ev)$ ([1] 参照) が次を満たす:
 - (ii-a) $B^* B$ のトレースは定数倍を除いてケーラー計量と一致する。
 - (ii-b) $\nabla B \in \Gamma(T^* \otimes T^* \otimes V^* \otimes \text{Ker } ev)$ は $(0, 2)$ 成分を持たない。
- このとき、 M は古典型かつコンパクト型のエルミート対称空間であり、 V は等質ベクトル束となる。また、 (V, h) のエルミート接続は標準接続である。

定理 2. $\mathbf{C}^N$ が以下の条件を満たすエルミート内積を持つと仮定する。

- (i) (i-a) (V, h) は平坦部分束を持たず、 (V, h) の曲率は平行である。
 - (ii) (1) の第 2 基本形式 $B \in \Gamma(T^{0,1} \otimes V^* \otimes \text{Ker } ev)$ が次を満たす:
 - (ii-a) $B^* B$ のトレースは定数倍を除いてケーラー計量と一致する。
 - (ii-b) $\nabla^2 B \in \Gamma(T^* \otimes T^* \otimes T^* \otimes V^* \otimes \text{Ker } ev)$ は $(0, 3)$ 成分を持たない。
- このとき、 M はコンパクト型のエルミート対称空間であり、 V は等質ベクトル束となる。また、 (V, h) のエルミート接続は標準接続である。

証明は高橋の定理および do Carmo-Wallach 理論の一般化 [2], [3] に基づき、中川-高木の結果 [4] を拡張することにより達成される。

REFERENCES

- [1] S.Kobayashi, “Differential Geometry of Complex Vector Bundles”, Iwanami Shoten and Princeton University Press, Tokyo (1987)
- [2] Y.Nagatomo, *Harmonic maps into Grassmann manifolds*, arXiv:mathDG/1408.1504
- [3] Y.Nagatomo, *Holomorphic maps into Grassmann manifolds (Harmonic maps into Grassmann manifolds III)*, Annals of Global analysis and Geometry **60** (2021), 33-63
- [4] H.Nakagawa and R.Takagi, *On locally symmetric Kaehler submanifolds in a complex projective space*, J. Math. Soc. Japan **28** (1976), 638-667