

Geometric criteria for multiplicity-freeness of representations of Heisenberg group

笹木 集夢 (東海大学理学部数学科)*

本稿で述べる研究結果は、Ali Baklouti 氏 (Sfax 大学) との共同研究に基づく。

1. 背景

小林俊行によって提唱された複素多様体における可視的作用の概念は、リー群の表現の無重複 (multiplicity-free) という性質に統一的説明を与えるという理論における複素幾何的条件として重要な役割を果たす。連結な複素多様体 D にリー群 G が正則に作用しているという設定において、次の条件 (V.0)–(S.2) を満たす D の実部分多様体 S (これをスライスという) および D 上の反正則な微分同相写像 σ が存在するときに**強可視的** (strongly visible) であるという ([4, Definition 3.3.1]) :

$$D' := G \cdot S \text{ は空でない } D \text{ の開集合である,} \quad (\text{V.0})$$

$$\sigma|_S = \text{id}_S, \quad (\text{S.1})$$

$$\text{任意の } x \in D' \text{ に対して } \sigma(x) = g \cdot x \text{ を満たす } g \in G \text{ が存在する.} \quad (\text{S.2})$$

(V.0)–(S.2) を満たすスライス S は自動的に全実 (totally real) となる。つまり、任意の $x \in S$ に対して $J_x(T_x S) \cap T_x S = \{0\}$ が成り立つ。ただし、 J は D の概複素構造を表す。

G -同変かつエルミートな正則ベクトル束 $\mathcal{V} \rightarrow D$ に対して、正則な切断全体の空間 $\mathcal{O}(D, \mathcal{V})$ に G の連続表現 ϖ が定義される。小林は、 G が底空間 D に強可視的に作用するという設定の下で、各ファイバー $\mathcal{V}_x$ 上の固定部分群 G_x のユニタリ表現における無重複という性質が $\mathcal{O}(D, \mathcal{V})$ に実現される G の任意のユニタリ表現に伝播するという理論を構築した (無重複性の伝播定理, [4, 5])。特に、無重複性の伝播定理を自明直線束 $\mathcal{V} := D \times \mathbb{C}$ に対して適用すると、 D における G の強可視的作用から D 上の正則関数全体のなす空間 $\mathcal{O}(D)$ に実現されるユニタリ表現の無重複性を説明することができる。

ここで、表現論におけるいくつかの概念をまとめておく。

- リー群 G のユニタリ表現 $(\pi, \mathcal{H})$ が、ある単射な連続写像 $\iota : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{O}(D, \mathcal{V})$ で $\iota \circ \pi(g) = \varpi(g) \circ \iota$ が任意の $g \in G$ で成り立つとき、 $(\pi, \mathcal{H})$ は $(\varpi, \mathcal{O}(D, \mathcal{V}))$ に実現されるという ([4, Definition 1.5.3])。
- リー群 G のユニタリ表現 $(\pi, \mathcal{H})$ に対して、

$$\text{End}_G(\mathcal{H}) := \{f \in \text{End}(\mathcal{H}) : \pi(g) \circ f = f \circ \pi(g) \ (\forall g \in G)\} \quad (1.1)$$

が可換環であるとき、 $(\pi, \mathcal{H})$ は無重複であるという ([4, Definition 1.5.1])。実際に、 G が簡約リー群や冪零リー群の場合はユニタリ表現 π は一意に既約分解され、この場合は π が上の意味で無重複であることと、ほとんど至るところの $\tau \in \widehat{G}$ に対してその重複度が 1 以下であることと同値である ([4, Proposition 1.5.2])。

部分多様体幾何とリー群作用 2020 (2021 年 3 月 19 日～20 日, 世話人: 小池直之氏, 田中真紀子氏, 馬場蔵人氏) 記録集。

本研究は科研費 (課題番号 19K03453) の助成を受けたものである。

* 〒259-1292 神奈川県平塚市北金目 4-1-1.

e-mail: atsumu@tokai-u.jp

- $(\varpi, \mathcal{O}(D, \mathcal{V}))$ に実現される任意の G のユニタリ表現が無重複であるとき, $(\varpi, \mathcal{O}(D, \mathcal{V}))$ は無重複であるという ([4, Definition 1.5,3]).

近年, 無重複表現を背景に強可視的作用の分類理論が進展し, これまでに複素等質空間, エルミート対称空間, 旗多様体, 複素ベクトル空間, 複素冪零軌道, 複素球等質空間に対してなされた. これらの研究は, 半単純対称空間に対するカルタン分解などの群の分解定理, あるいは球面への推移的作用がスライスを具体的に構成するための土台となっている. さらに, リーマン幾何における polar 作用, シンプレクティック幾何における coisotropic 作用, 複素幾何における強可視的作用と 3 つの異なる概念は近接した関係にあることが明らかとなっている [4, Section 4]¹.

一方で, 冪零リー群や可解リー群などの簡約ではないリー群の等質空間に対する群の分解定理や軌道分解の一般理論は未発展であるものの, 強可視的作用の視点による理論の構築に興味をもっていた. 最近になって, Ali Baklouti 氏 (Sfax 大学) から冪零リー群の表現の無重複性の研究に関連して同問題に興味があることを何度か相談を受けていた. そこで, 本格的に冪零リー群の等質空間における可視的作用の研究に取り掛かり, その第一歩として Heisenberg リー群の等質空間に対する研究から始めることとなった.

2. 主結果

以下, $G = \mathbf{H}_n$ を連結かつ単連結な Heisenberg 群でその次元が $2n+1$ とする. Heisenberg 群 $\mathbf{H}_n$ は半直積群 $\mathbb{R}^{2n} \ltimes \mathbb{R}$ に同型な 2-step な冪零リー群で, G のリー環 $\mathfrak{g}$ の中心 $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ は 1 次元である. 本稿では, Heisenberg リー環 $\mathfrak{g}$ の基底 $\mathcal{B}$ として

$$\mathcal{B} \equiv \mathcal{B}_{(n,n,1)} := \{X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_n, Z\}$$

で $[X_i, Y_i] = Z$ ($1 \leq i \leq n$) かつそれ以外の交換子が 0 であるものを選び, 以後はこの基底を固定する.

H を G の非自明な連結閉部分群でそのリー環を $\mathfrak{h}$ と表す. このとき, 写像

$$H \times \mathbb{R}^d \rightarrow G, \quad (h, (t_1, \dots, t_d)) \mapsto h e^{t_1 W_1} \dots e^{t_d W_d} \quad (2.1)$$

が微分同相写像となるような $\mathfrak{g}$ の線型独立な元 $\{W_1, \dots, W_d\}$ を選ぶことができる². ただし, $d := \dim \mathfrak{g} - \dim \mathfrak{h} > 0$ である. $\{W_1, \dots, W_d\}$ で生成される $\mathfrak{g}$ の部分空間を $\mathfrak{q}$ で表し, $\exp \mathfrak{q}$ で生成される G の部分群を Q とする.

G, H の複素化をそれぞれ $G^{\mathbb{C}}, H^{\mathbb{C}}$ と表す. Heisenberg 群 G は複素 Heisenberg 等質空間 $D := G^{\mathbb{C}}/H^{\mathbb{C}}$ に自然に作用し, この作用は正則である. そこで, 本稿では複素 Heisenberg 等質空間 D における G の部分群 Q の作用が強可視的となるような非自明な連結閉部分群 H を分類することが目標である.

本問題に対する結果は, 表現論の無重複という性質を特徴付ける形で得られた. 主結果を述べるために表現論の準備をしておこう. Heisenberg 等質空間 $M = G/H$ は, 微分同相写像 (2.1) によって $\exp \mathfrak{q} \simeq \mathfrak{q}$ と微分同相になり, よって複素等質空間 D は $\mathfrak{q}$ の複素化 $\mathfrak{q}^{\mathbb{C}}$ と双正則微分同相である. 実ベクトル空間 $\mathfrak{q}$ 上の Lebesgue 測度を M 上に誘

¹ 無重複表現と可視的作用に関する小林理論, および可視的作用の分類理論の最近の発展については概説記事 [8] にてまとめた.

² $\{W_1, \dots, W_d\}$ を $\mathfrak{g}$ における $\mathfrak{h}$ の余指数基底 (co-exponential basis) とよぶ. 半単純リー群とは異なる冪零リー群の特徴の 1 つである.

導することで G -不変測度を定める．特に， M 上の G -不変測度は定数倍を除いて一意である．この測度に関する M 上の 2 乗可積分関数全体のなすヒルベルト空間を $L^2(M)$ で表す．Heisenberg 群 G の M への自然な作用は， $L^2(M)$ への表現を定める．これを準正則表現といい π_H で表す．また， π_H の G の部分群 Q への制限を $\pi_H|_Q$ で表す．

同様に， D における G の作用から D 上の正則関数全体の空間 $\mathcal{O}(D)$ 上に G の連続表現 ϖ が自然に定義され，この表現の Q への制限を $\varpi|_Q$ で表す．

定理 2.1 ([2]). Heisenberg 群 G の非自明な連結閉部分群 H に対して，次の 5 つの条件は同値である：

- (i) 複素 Heisenberg 等質空間 $D = G^{\mathbb{C}}/H^{\mathbb{C}}$ における Q の作用は強可視的である．
- (ii) 準正則表現 π_H は無重複である．
- (iii) 準正則表現 π_H の Q への制限 $\pi_H|_Q$ は無重複である．
- (iv) G の連続表現 ϖ の Q への制限 $\varpi|_Q$ は無重複である．
- (v) $\mathfrak{h} \neq \mathfrak{h}_{(m,0,0)} := \text{span}_{\mathbb{R}}\{X_1, \dots, X_m\}$ ($m = 1, \dots, n-1$).

3. 複素 Heisenberg 等質空間の分類

本章では，本稿の主結果に対する議論が Heisenberg 群の連結な部分群の分類に帰着できることについて解説する (命題 3.2 参照)．

第 2 章の設定を継続する．基底 $\mathcal{B}$ の部分集合 $\mathcal{B}_{(k,\ell,\varepsilon)}$ をそれぞれ

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{(p,q,1)} &:= \{X_1, \dots, X_p, Y_1, \dots, Y_q, Z\}, & \mathcal{B}_{(p,q,0)} &:= \{X_1, \dots, X_p, Y_1, \dots, Y_q\}, \\ \mathcal{B}_{(m,0,1)} &:= \{X_1, \dots, X_m, Z\}, & \mathcal{B}_{(m,0,0)} &:= \{X_1, \dots, X_m\} \end{aligned}$$

で定める ($1 \leq p, q, m \leq n$)．有限集合 $\mathcal{B}_{(k,\ell,\varepsilon)}$ で生成される $\mathfrak{g}$ の部分環を $\mathfrak{h}_{(k,\ell,\varepsilon)} = \text{span}_{\mathbb{R}} \mathcal{B}_{(k,\ell,\varepsilon)}$ で定めるとき，次の事実が知られている：

補題 3.1 ([1, Proposition 3.1]). Heisenberg リー環 $\mathfrak{g}$ の非自明な部分環 $\mathfrak{h}$ は次にいずれかに同型である：

$$\mathfrak{h}_{(0,0,1)}, \quad \mathfrak{h}_{(p,q,1)} \quad (1 \leq p \leq q \leq n, (p,q) \neq (n,n)), \quad \mathfrak{h}_{(m,0,1)}, \quad \mathfrak{h}_{(m,0,0)} \quad (1 \leq m \leq n).$$

さらに，2 つの同型な $\mathfrak{g}$ の部分環 $\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2$ に対して， $\mathfrak{g}$ 上の自己同型写像 φ で $\mathfrak{h}_1$ に制限すると $\mathfrak{h}_1$ から $\mathfrak{h}_2$ への同型写像を与えるものが存在する．

補題 3.1 の設定において， $\mathfrak{g}$ 上の自己同型写像 φ を $\mathfrak{g}$ の複素化 $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ に複素線型に拡張すると，この φ は $\mathfrak{h}_1$ の複素化 $\mathfrak{h}_1^{\mathbb{C}}$ から $\mathfrak{h}_2$ の複素化 $\mathfrak{h}_2^{\mathbb{C}}$ への複素リー環としての同型を与える．

Heisenberg 群 G の連結な閉部分群 $H_{(k,\ell,\varepsilon)}$ を $H_{(k,\ell,\varepsilon)} = \exp \mathfrak{h}_{(k,\ell,\varepsilon)}$ で定める．補題 3.1 より， G の非自明な連結閉部分群 H は

$$H_{(0,0,1)}, \quad H_{(p,q,1)}, \quad H_{(m,0,1)}, \quad H_{(m,0,0)} \tag{3.1}$$

のいずれかと同型である．よって，複素 Heisenberg 等質空間 $G^{\mathbb{C}}/H^{\mathbb{C}}$ は

$$G^{\mathbb{C}}/H_{(0,0,1)}^{\mathbb{C}}, \quad G^{\mathbb{C}}/H_{(p,q,1)}^{\mathbb{C}}, \quad G^{\mathbb{C}}/H_{(m,0,1)}^{\mathbb{C}}, \quad G^{\mathbb{C}}/H_{(m,0,0)}^{\mathbb{C}} \tag{3.2}$$

のいずれかと双正則微分同相である．以下， $D_{(k,\ell,\varepsilon)} := G^{\mathbb{C}}/H_{(k,\ell,\varepsilon)}^{\mathbb{C}}$ とおく．

Heisenberg リー環の基底 $\mathcal{B}$ における部分集合 $\mathcal{B}' \neq \emptyset$ に対して, その補集合を $(\mathcal{B}')^c$ で表す. 非自明な部分環 $\mathfrak{h} = \text{span}_{\mathbb{R}} \mathcal{B}'$ の $\mathfrak{g}$ における補空間として $\mathfrak{q} := \text{span}_{\mathbb{R}} (\mathcal{B}')^c$ を選ぶ. このとき, $H = \exp \mathfrak{h}$ とおくと, (2.1) より G の分解

$$G = (\exp \mathfrak{q})H = H(\exp \mathfrak{q}) \quad (3.3)$$

が成り立つ. $\exp \mathfrak{q}$ で生成される G の閉部分群を Q とする: $Q = \langle \exp \mathfrak{q} \rangle$. 特に, $\mathfrak{q}_{(k,\ell,\varepsilon)} := \text{span}_{\mathbb{R}} (\mathcal{B}_{(k,\ell,\varepsilon)})^c$, $Q_{(k,\ell,\varepsilon)} := \langle \exp \mathfrak{q}_{(k,\ell,\varepsilon)} \rangle$ とする.

命題 3.2. Heisenberg 群 G の非自明な連結な閉部分群 H は $H_{(k,\ell,\varepsilon)}$ と同型であるとする. このとき, $G^{\mathbb{C}}/H_{(k,\ell,\varepsilon)}^{\mathbb{C}}$ における $Q_{(k,\ell,\varepsilon)}$ の作用が強可視的ならば, $G^{\mathbb{C}}/H^{\mathbb{C}}$ における Q の作用も強可視的である.

Proof. 補題 3.1 により, $\mathfrak{g}$ の自己同型写像 φ で $\varphi|_{\mathfrak{h}_{(k,\ell,\varepsilon)}}$ がリー環の同型 $\mathfrak{h}_{(k,\ell,\varepsilon)} \simeq \mathfrak{h}$ を誘導するものを選ぶ. このとき, φ は $\mathfrak{q}_{(k,\ell,\varepsilon)}$ から $\mathfrak{q}$ への線型同型写像を導く. この φ を $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ 上複素線型に拡張したものは, 複素 Heisenberg 群 $G^{\mathbb{C}} = \exp \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ への正則な自己同型写像へ持ち上がる. これにより, $H_{(k,\ell,\varepsilon)} \simeq H$ かつ $Q_{(k,\ell,\varepsilon)} \simeq Q$ を導く. さらに, この φ は複素 Heisenberg 等質空間上の双正則微分同相写像 $D_{(k,\ell,\varepsilon)} := G^{\mathbb{C}}/H_{(k,\ell,\varepsilon)}^{\mathbb{C}} \rightarrow G^{\mathbb{C}}/H^{\mathbb{C}}$ を導く.

仮定より, $D_{(k,\ell,\varepsilon)}$ の実部分多様体 $S_{(k,\ell,\varepsilon)}$ および反正則微分同相写像 $\sigma_{(k,\ell,\varepsilon)}$ で (V.0)–(S.2) を満たすものが存在する. このとき, $S := \varphi(S_{(k,\ell,\varepsilon)})$ は $G^{\mathbb{C}}/H^{\mathbb{C}}$ の実部分多様体で, $Q_{(k,\ell,\varepsilon)} \cdot S_{(k,\ell,\varepsilon)}$ が $D_{(k,\ell,\varepsilon)}$ の空でない開集合であることから,

$$Q \cdot S = \varphi(Q_{(k,\ell,\varepsilon)}) \cdot \varphi(S_{(k,\ell,\varepsilon)}) = \varphi(Q_{(k,\ell,\varepsilon)} \cdot S_{(k,\ell,\varepsilon)})$$

は $\varphi(D_{(k,\ell,\varepsilon)}) = D$ の空でない開集合である. 次に, $\sigma := \varphi \circ \sigma_{(k,\ell,\varepsilon)} \circ \varphi^{-1}$ とおくと, σ は D 上の反正則微分同相写像で $\sigma|_S = \text{id}_S$ を満たす. さらに, $x \in Q \cdot S$ に対して, $\varphi^{-1}(x) \in Q_{(k,\ell,\varepsilon)} \cdot S_{(k,\ell,\varepsilon)}$ は (S.2) より $\sigma_{(k,\ell,\varepsilon)}(\varphi^{-1}(x)) = q \cdot \varphi^{-1}(x)$ と表される ($q \in Q_{(k,\ell,\varepsilon)}$). これより,

$$\sigma(x) = \varphi \circ \sigma_{(k,\ell,\varepsilon)} \circ \varphi^{-1}(x) = \varphi(q \cdot \varphi^{-1}(x)) = \varphi(q) \cdot x.$$

したがって, $G^{\mathbb{C}}/H^{\mathbb{C}}$ における Q の作用は強可視的である. □

4. 証明の概略

本章では, 定理 2.1 の証明の概略を述べる. 証明の流れを次の表に示す. なお, 条件 (vi) は余随伴軌道の次元に関する条件で詳細は第 4.3 節 (系 4.3) で述べる.

$$\begin{array}{ccccc} \text{(v)} & \xrightarrow{\S 4.4} & \text{(i)} & \xrightarrow{\S 4.1} & \text{(iv)} \\ \S 4.3 \updownarrow & & & & \downarrow \S 4.5 \\ \text{(vi)} & \xleftrightarrow{\S 4.3} & \text{(ii)} & \xleftarrow{\S 4.2} & \text{(iii)} \end{array}$$

4.1. (i) $\Rightarrow$ (iv)

(i) $\Rightarrow$ (iv) は無重複性の伝播定理の主張そのものである.

4.2. (iii) $\Rightarrow$ (ii)

(iii) を仮定すると, ユニタリ表現の無重複性の定義より ((1.1) 参照) $\text{End}_Q(L^2(M))$ は可換環である. $\text{End}_G(L^2(M)) \subset \text{End}_Q(L^2(M))$ より, 部分環 $\text{End}_G(L^2(M))$ も可換環である. これで (ii) がしただう.

4.3. (ii) $\Leftrightarrow$ (v) の証明

条件(ii)と(v)の同値性は、Corwin–Greenleafによって与えられた連結な冪零リー群の誘導表現の既約分解公式を我々の設定に適用することで証明される．この公式および公式を説明するために必要な Kirillov の軌道理論を Heisenberg 群の設定で概説しよう．

Heisenberg 群 G のリー環 $\mathfrak{g}$ に対して、その双対空間 $\mathfrak{g}^*$ には G が余随伴表現として作用する．つまり、 $g \in G$ および $\xi \in \mathfrak{g}^*$ に対して $g \cdot \xi = \text{Ad}^*(g)\xi := \xi \circ \text{Ad}(g)^{-1}$ ．第3章で選んだ $\mathfrak{g}$ の基底 $\mathcal{B}$ に対してその双対基底 $\mathcal{B}^* = \{X_1^*, \dots, X_n^*, Y_1^*, \dots, Y_n^*, Z^*\}$ をとる．以下、

$$\mathfrak{g}_0 := \text{span}_{\mathbb{R}}\{X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_n\} \quad (4.1)$$

とし、 $\mathfrak{g}_0^*$ で $\mathfrak{g}_0$ の双対空間とする．このとき、余随伴軌道は次のいずれかとなる：

補題 4.1. (1) $\gamma \in \mathbb{R}^\times$ と $\xi \in \mathfrak{g}_0^*$ に対して、 $G \cdot (\xi + \gamma Z^*) = \{\eta + \gamma Z^* : \eta \in \mathfrak{g}_0^*\} = \mathfrak{g}_0^* + \gamma Z^*$ ．

特に、 $G \cdot (\xi + \gamma Z^*)$ の次元は $2n$ となる．また、 $\xi \in \mathfrak{g}_0^*$ のとき、 $G \cdot \xi = \{\xi\}$ ．

(2) 次で定める R は軌道空間 $\mathfrak{g}^*/G$ の完全代表系である．

$$R := \mathbb{R}^\times Z^* \sqcup \mathfrak{g}_0^*.$$

Heisenberg 群 G (より一般に単連結な冪零リー群) に対して、Kirillov の軌道理論とは軌道空間 $\mathfrak{g}^*/G \simeq R$ と G の既約表現の同値類全体 $\widehat{G}$ の間に 1 対 1 の対応があることを指す．Heisenberg 群の場合、 $G \cdot (\gamma Z^*)$ ($\gamma \neq 0$) に対応する表現は 1 変数 γ によって特徴付けられる無限次元既約表現でそれを τ_γ で表し、一方で $\xi_{\alpha, \beta} := \sum_{i=1}^n \alpha_i X_i^* + \sum_{j=1}^n \beta_j Y_j^* \in \mathfrak{g}_0^*$ に対して $G \cdot \xi_{\alpha, \beta}$ に対する表現は $2n$ 変数 $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ によって特徴付けられる 1 次元表現でこれを $\tau_{\alpha, \beta}$ で表すこととする．

準正則表現 π_H が H の自明表現 $\mathbf{1}$ の誘導表現 $\text{Ind}_H^G \mathbf{1}$ として実現できることから、Corwin–Greenleaf の公式 [3] によって $\text{Ind}_H^G \mathbf{1}$ の既約分解は次で与えられる．なお、以下は [7, Theorem 1.1] から引用した．

事実 4.2 (Corwin–Greenleaf の公式). Heisenberg 群 G とその連結な閉部分群 H に対して、準正則表現 π_H の既約分解は次で与えられる：

$$\pi_H \simeq \int_{(G \cdot \mathfrak{q}^*)/G}^{\oplus} m_{\pi_H}(\xi) \tau_\xi d\xi.$$

ここで、 $d\xi$ は $\mathfrak{q}^*$ 上の Lebesgue 測度を射影 $\mathfrak{q}^* \rightarrow (G \cdot \mathfrak{q}^*)/G$ を経由して誘導された $(G \cdot \mathfrak{q}^*)/G$ 上の G -不変測度で、 $m_{\pi_H} : (G \cdot \mathfrak{q}^*)/G \rightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ は次で定義される重複度関数である： $\xi \in G \cdot \mathfrak{q}^*$ に対して

- (a) $2 \dim(H \cdot \xi) < \dim(G \cdot \xi)$ ならば、 $m_{\pi_H}(\xi) = \infty$ ．
- (b) $2 \dim(H \cdot \xi) = \dim(G \cdot \xi)$ ならば、 $m_{\pi_H}(\xi)$ は $\mathfrak{q}^* \cap (G \cdot \xi)$ 内の H -軌道の個数、つまり $(\mathfrak{q}^* \cap G \cdot \xi)/H$ の濃度に等しい．

事実 4.2 を用いて (ii) $\Leftrightarrow$ (v) を示そう．なお、 $\pi_{H_{(k, \ell, \varepsilon)}}$ を単に $\pi_{(k, \ell, \varepsilon)}$ と表すこととする．

Proof. 2 つの同型な G の閉部分群 H_1, H_2 に対して、 π_{H_1} が無重複であることと π_{H_2} が無重複であることは同値である．よって、 H は (3.1) で挙げた $H_{(k, \ell, \varepsilon)}$ のみ考察すればよい．

Case 1. まず, $H_{(k,\ell,\varepsilon)} \not\simeq H_{(m,0,0)}$ ($1 \leq m < n$) とする. このとき, $\mathfrak{h}_{(k,\ell,\varepsilon)}$ は $\mathfrak{g}$ の中心 $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = \mathbb{R}Z$ を含むため, $\mathfrak{q}_{(k,\ell,\varepsilon)}^*$ は $\mathfrak{g}_0^*$ の部分空間になる. よって, 補題 4.1 より任意の $\xi \in \mathfrak{q}_{(k,\ell,\varepsilon)}^*$ に対して $G \cdot \xi = \{\xi\}$ となる. 特に, $(G \cdot \mathfrak{q}_{(k,\ell,\varepsilon)}^*)/G \simeq \mathfrak{q}_{(k,\ell,\varepsilon)}^*$ が成り立つ. ゆえに, $H_{(k,\ell,\varepsilon)} \cdot \xi = G \cdot \xi$ となり, $2 \dim(H_{(k,\ell,\varepsilon)} \cdot \xi) = \dim(G \cdot \xi) = 0$ がすべての $\xi \in \mathfrak{q}_{(k,\ell,\varepsilon)}^*$ で満たされる. さらに, $\mathfrak{q}_{(k,\ell,\varepsilon)}^* \cap (G \cdot \xi) = \{\xi\} = H_{(k,\ell,\varepsilon)} \cdot \xi$ であることから, 事実 4.2 を適用すると $m_{\pi_{(k,\ell,\varepsilon)}}(\xi) = 1$ がすべての $\xi \in \mathfrak{q}^*$ に対して成り立つ. したがって, $\pi_{(k,\ell,\varepsilon)}$ は無重複である.

Case 2. 次に, $H_{(m,0,0)}$ ($1 \leq m < n$) を考察する. $\mathfrak{q}_{(m,0,0)}^* \supset \mathbb{R}Z^*$ に注意しよう. 実数 $\gamma \neq 0$ に対して, 補題 4.1 より $\dim(G \cdot (\gamma Z^*)) = 2n$ であった. 一方で, γZ^* を通る $H_{(m,0,0)}$ 軌道は直接計算によって

$$H_{(m,0,0)} \cdot (\gamma Z^*) = \mathbb{R}Y_1^* + \cdots + \mathbb{R}Y_m^* + \gamma Z^* \quad (4.2)$$

であることがわかる. よって, $\dim(H_{(m,0,0)} \cdot (\gamma Z^*)) = m$ である. したがって, $2 \dim(H_{(m,0,0)} \cdot (\gamma Z^*)) = \dim(G \cdot (\gamma Z^*))$ であるための必要十分条件は $m = n$ である. 特に, $m < n$ のときは $m_{\pi_{(m,0,0)}}(\gamma Z^*) = \infty$ である.

最後に, $m = n$ として $m_{\pi_{(n,0,0)}}(\gamma Z^*)$ を計算しよう. $\mathfrak{q}_{(n,0,0)}^* = \mathbb{R}Y_1^* + \cdots + \mathbb{R}Y_n^* + \mathbb{R}Z^*$ であるから, (4.2) を考慮すると,

$$\mathfrak{q}_{(n,0,0)}^* \cap (G \cdot (\gamma Z^*)) = \mathbb{R}Y_1^* + \cdots + \mathbb{R}Y_n^* + \gamma Z^* = H_{(n,0,0)} \cdot (\gamma Z^*)$$

と表すことできる. すなわち, $\mathfrak{q}_{(n,0,0)}^* \cap (G \cdot (\gamma Z^*))$ は単一 $H_{(n,0,0)}$ -軌道になることから, 事実 4.2 より $m_{\pi_{(n,0,0)}}(\gamma Z^*) = 1$ となる.

以上で, (ii) $\Leftrightarrow$ (v) の証明が完了した. □

本証明により, 次の系を得た. なお, 以下の主張において $\xi \in \mathfrak{g}^*$ が generic であるとは, G -軌道 $G \cdot \xi$ が $\mathfrak{g}^*$ における G -軌道で最大次元のときをいう.

系 4.3. Heisenberg 群 G の非自明な連結閉部分群 H に対して, 定理 2.1 の条件 (ii), (v) および次の条件は同値である:

(vi) 任意の generic な $\xi \in \mathfrak{q}^*$ に対して, $2 \dim(H \cdot \xi) = \dim(G \cdot \xi)$ を満たす.

4.4. (v) $\Rightarrow$ (i) の証明

命題 3.2 より, 非自明な連結閉部分群 H として (3.1) のみを扱えばよいことはすでに見た. そのうち, $H_{(m,0,0)}$ ($1 \leq m < n$) 以外の $H_{(k,\ell,\varepsilon)}$ に対して調べればよい.

Case 1. リー環 $\mathfrak{h}_{(k,\ell,\varepsilon)}$ は $\mathfrak{h}_{(m,0,0)}$ ($1 \leq m \leq n$) と異なるとする. このとき,

$$Q_{(k,\ell,\varepsilon)} = \langle \exp \mathfrak{q}_{(k,\ell,\varepsilon)} \rangle = \exp(\mathfrak{q}_{(k,\ell,\varepsilon)} + \mathbb{R}Z) = (\exp \mathfrak{q}_{(k,\ell,\varepsilon)})(\exp \mathbb{R}Z).$$

また, (3.3) によって

$$G^{\mathbb{C}} = (\exp \mathfrak{q}_{(k,\ell,\varepsilon)}^{\mathbb{C}}) H_{(k,\ell,\varepsilon)}^{\mathbb{C}}$$

が成り立つ. ゆえに, $D_{(k,\ell,\varepsilon)} = G^{\mathbb{C}} / H_{(k,\ell,\varepsilon)}^{\mathbb{C}} = (\exp \mathfrak{q}_{(k,\ell,\varepsilon)}^{\mathbb{C}}) H_{(k,\ell,\varepsilon)}^{\mathbb{C}} / H_{(k,\ell,\varepsilon)}^{\mathbb{C}}$ となる.

次の補題は, $Q_{(k,\ell,\varepsilon)}$ の $D_{(k,\ell,\varepsilon)}$ への作用を記述する.

補題 4.4. $A \in \mathfrak{q}_{(k,\ell,\varepsilon)}$, $r \in \mathbb{R}$ および $W \in \mathfrak{q}_{(k,\ell,\varepsilon)}^{\mathbb{C}}$ に対して

$$(\exp(rZ))(\exp A) \cdot (\exp W)H_{(k,\ell,\varepsilon)}^{\mathbb{C}} = \exp(A+W)H_{(k,\ell,\varepsilon)}^{\mathbb{C}}.$$

Proof. $\exp(rZ)$ は G の中心 $Z(G) = \exp \mathbb{R}Z$ の元であり, $Z(G) \subset H_{(k,\ell,\varepsilon)}^{\mathbb{C}}$ から

$$(\exp(rZ)) \cdot (\exp W)H_{(k,\ell,\varepsilon)}^{\mathbb{C}} = (\exp W)(\exp(rZ))H_{(k,\ell,\varepsilon)}^{\mathbb{C}} = (\exp W)H_{(k,\ell,\varepsilon)}^{\mathbb{C}}.$$

次に, Heisenberg リー環 $\mathfrak{g}$ は $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ を満たすから, $c_{A,W} \in \mathbb{C}$ を用いて $[A, W] = c_{A,W}Z$ と表される. よって, Campbell-Hausdorff の公式より,

$$\begin{aligned} (\exp A) \cdot (\exp W)H_{(k,\ell,\varepsilon)}^{\mathbb{C}} &= \exp(A+W+c'_{A,W}Z)H_{(k,\ell,\varepsilon)}^{\mathbb{C}} \\ &= \exp(A+W)\exp(c'_{A,W}Z)H_{(k,\ell,\varepsilon)}^{\mathbb{C}} \\ &= \exp(A+W)H_{(k,\ell,\varepsilon)}^{\mathbb{C}} \end{aligned}$$

なお, $c'_{A,W} := c_{A,W}/2$ である. 以上で, 主張が示された. $\square$

$W \in \mathfrak{q}_{(k,\ell,\varepsilon)}^{\mathbb{C}}$ を $W = W_1 + \sqrt{-1}W_2$ ($W_1, W_2 \in \mathfrak{q}_{(k,\ell,\varepsilon)}$) と表す. 補題 4.4 より,

$$(\exp W)H_{(k,\ell,\varepsilon)}^{\mathbb{C}} = (\exp W_1) \cdot (\exp \sqrt{-1}W_2)H_{(k,\ell,\varepsilon)}^{\mathbb{C}} \in Q_{(k,\ell,\varepsilon)} \cdot S_{(k,\ell,\varepsilon)}.$$

よって, 次が示された.

命題 4.5. $(k, \ell, \varepsilon) \neq (m, 0, 0)$ ($1 \leq m \leq n$) とする. 複素 Heisenberg 等質空間 $D_{(k,\ell,\varepsilon)}$ の実部分多様体 $S_{(k,\ell,\varepsilon)}$ として

$$S_{(k,\ell,\varepsilon)} := (\exp \sqrt{-1}\mathfrak{q}_{(k,\ell,\varepsilon)})H_{(k,\ell,\varepsilon)}^{\mathbb{C}} \quad (4.3)$$

を選ぶ. このとき, $D_{(k,\ell,\varepsilon)} = Q_{(k,\ell,\varepsilon)} \cdot S_{(k,\ell,\varepsilon)}$ が成り立つ.

次に, $D_{(k,\ell,\varepsilon)}$ 上の反正則微分同相写像を次の手順で構成する. Heisenberg リー環 $\mathfrak{g}$ の直和分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 + \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ により, 複素化 $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ も $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{g}_0^{\mathbb{C}} + \mathfrak{z}(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})$ と直和分解される. 特に, $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})^{\mathbb{C}} = \mathfrak{z}(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}) = \mathbb{C}Z$ である. 元 $X \in \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ の実型 $\mathfrak{g}$ に関する複素共役を $\overline{X}$ で表し, $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ 上の反線型な対合的自己同型写像 σ を,

$$\sigma(A + cZ) = -\overline{A} + \overline{cZ} \quad (A \in \mathfrak{g}_0^{\mathbb{C}}, cZ \in \mathbb{C}Z)$$

によって定める. この σ は $G^{\mathbb{C}} = \exp \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ 上の反正則な対合的自己同型写像に持ち上がり, それも同じ記号を用いる. このとき, $\mathfrak{h}_{(k,\ell,\varepsilon)}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{h}_{(k,\ell,\varepsilon)}^{\mathbb{C}} \cap \mathfrak{g}_0^{\mathbb{C}} + \mathbb{C}Z$ によって σ は $H_{(k,\ell,\varepsilon)}^{\mathbb{C}}$ および $Q_{(k,\ell,\varepsilon)}$ を保ち, $D_{(k,\ell,\varepsilon)}$ 上の反正則微分同相写像 σ を誘導する:

$$\sigma : D_{(k,\ell,\varepsilon)} \rightarrow D_{(k,\ell,\varepsilon)}, \quad (\exp W)H_{(k,\ell,\varepsilon)}^{\mathbb{C}} \mapsto (\exp \sigma(W))H_{(k,\ell,\varepsilon)}^{\mathbb{C}}.$$

この σ は $S_{(k,\ell,\varepsilon)}$ の定義 (4.3) から $\sigma|_{S_{(k,\ell,\varepsilon)}} = \text{id}_{S_{(k,\ell,\varepsilon)}}$ を満たす.

また, $(\exp W)H_{(k,\ell,\varepsilon)}^{\mathbb{C}} \in D_{(k,\ell,\varepsilon)}$ に対して, 命題 4.5 により $g_0 \in Q_{(k,\ell,\varepsilon)}$, $W_0 \in \sqrt{-1}\mathfrak{q}_{(k,\ell,\varepsilon)}$ を用いて $(\exp W)H_{(k,\ell,\varepsilon)}^{\mathbb{C}} = g_0(\exp W_0)H_{(k,\ell,\varepsilon)}^{\mathbb{C}}$ と表す. このとき, $g := \sigma(g_0)g_0^{-1}$ は $Q_{(k,\ell,\varepsilon)}$ の元で

$$\begin{aligned} \sigma((\exp W)H_{(k,\ell,\varepsilon)}^{\mathbb{C}}) &= \sigma(g_0(\exp W_0))H_{(k,\ell,\varepsilon)}^{\mathbb{C}} \\ &= \sigma(g_0)\sigma(\exp W_0)H_{(k,\ell,\varepsilon)}^{\mathbb{C}} \\ &= \sigma(g_0)(\exp W_0)H_{(k,\ell,\varepsilon)}^{\mathbb{C}} \\ &= g \cdot (\exp W)H_{(k,\ell,\varepsilon)}^{\mathbb{C}}. \end{aligned}$$

ゆえに, σ は各 $Q_{(k,\ell,\varepsilon)}$ -軌道を保つ.

Case 2. 非自明な連結閉部分群 $H_{(n,0,0)}$ に対して, $D_{(n,0,0)} = G^{\mathbb{C}}/H_{(n,0,0)}^{\mathbb{C}}$ における $Q_{(n,0,0)}$ の作用が強可視的であることは次のように示される.

補空間 $\mathfrak{q}_{(n,0,0)} = \mathbb{R}Y_1 + \cdots + \mathbb{R}Y_n + \mathbb{R}Z$ は可換リー環となるため, $Q_{(n,0,0)} = \exp \mathfrak{q}_{(n,0,0)}$ である. 複素 Heisenberg 等質空間 $D_{(n,0,0)} = (\exp \mathfrak{q}_{(n,0,0)}^{\mathbb{C}})H_{(n,0,0)}^{\mathbb{C}}/H_{(n,0,0)}^{\mathbb{C}}$ における $Q_{(n,0,0)}$ の作用は

$$(\exp A) \cdot (\exp W)H_{(n,0,0)}^{\mathbb{C}} = (\exp(A+W))H_{(n,0,0)}^{\mathbb{C}}$$

となる ($A \in \mathfrak{q}_{(n,0,0)}, W \in \mathfrak{q}_{(n,0,0)}^{\mathbb{C}}$). よって, 次を得る:

命題 4.6. 複素 Heisenberg 等質空間 $D_{(n,0,0)}$ の実部分多様体 $S_{(n,0,0)}$ として

$$S_{(n,0,0)} := (\exp \sqrt{-1}\mathfrak{q}_{(n,0,0)})H_{(n,0,0)}^{\mathbb{C}} \quad (4.4)$$

を選ぶ. このとき, $D_{(n,0,0)} = Q_{(n,0,0)} \cdot S_{(n,0,0)}$ が成り立つ.

次に, 複素 Heisenberg リー環の直和分解 $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{h}_{(n,0,0)}^{\mathbb{C}} + \mathfrak{q}_{(n,0,0)}^{\mathbb{C}}$ を鑑みて, $\mathfrak{g}$ 上の反線型な対合的自己同型写像 σ を

$$\sigma(A+W) = \overline{A} - \overline{W} \quad (A \in \mathfrak{h}_{(n,0,0)}^{\mathbb{C}}, W \in \mathfrak{q}_{(n,0,0)}^{\mathbb{C}})$$

と定める. この σ を $G^{\mathbb{C}}$ 上の反正則微分同相写像に持ち上げたもの (同じ記号 σ を用いる) は, $H_{(n,0,0)}$ および $Q_{(n,0,0)}$ を保つため, $D_{(n,0,0)}$ 上の反正則な微分同相写像を誘導する (同じ記号 σ を用いる). このとき, σ は $\sigma|_{S_{(n,0,0)}} = \text{id}_{S_{(n,0,0)}}$ を満たし, かつ任意の $W \in \mathfrak{q}_{(n,0,0)}^{\mathbb{C}}$ に対して $\sigma((\exp W)H_{(n,0,0)}^{\mathbb{C}}) \in Q_{(n,0,0)} \cdot (\exp W)H_{(n,0,0)}^{\mathbb{C}}$ となる.

以上により, (v) $\Rightarrow$ (i) の証明が完結した.

4.5. (i) $\Rightarrow$ (v) の証明

前節の結果を受けて, (i) $\Rightarrow$ (v) の証明で残っていることは次の定理を示すことである:

定理 4.7. $1 \leq m < n$ に対して, $D_{(m,0,0)} = G^{\mathbb{C}}/H_{(m,0,0)}^{\mathbb{C}}$ における $Q_{(m,0,0)}$ の作用は強可視的ではない.

以下, $M_{(m,0,0)} := G/H_{(m,0,0)}$ とし, 準正則表現 $\pi_{H_{(m,0,0)}}$ を $\pi_{(m,0,0)}$ と略記する. 定理 4.7 の証明の鍵となるのは, $(\pi_{(m,0,0)}|_{Q_{(m,0,0)}}, L^2(M_{(m,0,0)}))$ を $(\varpi|_{Q_{(m,0,0)}}, \mathcal{O}(D_{(m,0,0)}))$ に実現することである. その方法を簡潔に説明しよう.

まず, $\mathfrak{q}_{(m,0,0)}$ は $\mathfrak{q}_{(m,0,0)} \simeq \mathbb{R}^m \oplus \mathfrak{h}_{n-m}$ を満たすリー環である. よって, Heisenberg 等質空間 $M_{(m,0,0)} = G/H_{(m,0,0)} \simeq \exp \mathfrak{q}_{(m,0,0)}$ は $Q_{(m,0,0)} \simeq \mathbb{R}^m \times \mathbf{H}_{n-m}$ と同型であるから, $L^2(M_{(m,0,0)})$ は $L^2(\mathbb{R}^m \times \mathbf{H}_{n-m})$ とヒルベルト空間として同型である. さらに, $L^2(\mathbb{R}^m \times \mathbf{H}_{n-m})$ 上の $\mathbb{R}^m \times \mathbf{H}_{n-m}$ の正則表現 ρ に対して, $\pi_{(m,0,0)}$ と ρ は $Q_{(m,0,0)} \simeq \mathbb{R}^m \times \mathbf{H}_{n-m}$ の表現として同値である. ゆえに, $(\rho, L^2(\mathbb{R}^m \times \mathbf{H}_{n-m}))$ を $(\rho, \mathcal{O}(\mathbb{C}^m \times \mathbf{H}_{n-m}^{\mathbb{C}}))$ に実現する.

次に, $h_{\mathbb{R}^m} \equiv (h_{\mathbb{R}^m})_t$ を $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}_+$ 上の熱方程式 $\partial_t u(\mathbf{v}, t) = \Delta_{\mathbb{R}^m} u(\mathbf{v}, t)$ の基本解とし³, $h_{\mathbf{H}_{n-m}} \equiv (h_{\mathbf{H}_{n-m}})_t$ を $\mathbf{H}_{n-m} \times \mathbb{R}_+$ 上の熱方程式 $\partial_t u(g, t) = \Delta_{\mathbf{H}_{n-m}} u(g, t)$ の基本解とする⁴. このとき, $t > 0$ を 1 つ固定し, $f \in L^2(\mathbb{R}^m \times \mathbf{H}_{n-m})$ に対して

³ $h_{\mathbb{R}^m}$ を $\mathbb{R}^m$ 上の熱核という. 熱核変換と呼ばれる熱核を用いた積分変換は Segal–Bargmann 変換としてよく知られている. これは, $L^2(\mathbb{R}^m)$ から $\mathcal{O}(\mathbb{C}^m)$ への単射かつ連続な $\mathbb{R}^m$ -絡作用素となる.

⁴ $\mathbf{H}_{n-m} \times \mathbb{R}_+$ 上の熱方程式の基本解 (熱核) の具体的表示, および熱核変換に関する研究は [6] を参照. $\mathbf{H}_{n-m}$ 上の熱核変換は $L^2(\mathbf{H}_{n-m})$ から $\mathcal{O}(\mathbf{H}_{n-m}^{\mathbb{C}})$ への単射かつ連続な $\mathbf{H}_{n-m}$ -絡作用素となる.

$$(Bf)(\mathbf{v}, x) := \int_{\mathbb{R}^m \times \mathbf{H}_{n-m}} f(\mathbf{s}, k) h_{\mathbb{R}^m}(\mathbf{v} - \mathbf{s}) h_{\mathbf{H}_{n-m}}(k^{-1}x) d\mathbf{s} dk \quad (4.5)$$

とする ($\mathbf{v} \in \mathbb{C}^m, x \in \mathbf{H}_{n-m}^{\mathbb{C}}$). このとき, (4.5) の右辺は任意の $(\mathbf{v}, x) \in \mathbb{C}^m \times \mathbf{H}_{n-m}^{\mathbb{C}}$ で絶対収束する.

定理 4.8 ([2, Theorem 8.11]). $f \in L^2(\mathbb{R}^m \times \mathbf{H}_{n-m})$ に対して, Bf は $\mathbb{C}^m \times \mathbf{H}_{n-m}^{\mathbb{C}}$ 上の正則関数である. さらに, $B : L^2(\mathbb{R}^m \times \mathbf{H}_{n-m}) \rightarrow \mathcal{O}(\mathbb{C}^m \times \mathbf{H}_{n-m}^{\mathbb{C}})$ は連続かつ単射な $(\mathbb{R}^m \times \mathbf{H}_{n-m})$ -絡作用素である⁵.

定理 4.7 の証明は次で与えられる.

Step 1. 第 4.3 節で, $1 \leq m < n$ に対して $\pi_{(m,0,0)}$ は G の表現として無重複ではないことを見た. よって, (iii) $\Rightarrow$ (ii) の対偶により $\pi_{(m,0,0)}|_{Q_{(m,0,0)}}$ は無重複ではない.

Step 2. $Q_{(m,0,0)}$ が $D_{(m,0,0)}$ に強可視的に作用すると仮定すると, 無重複性の伝播定理により (第 1 章参照) $\mathcal{O}(D_{(m,0,0)})$ に実現される $Q_{(m,0,0)}$ のユニタリ表現は無重複でなければならない. ここで, 定理 4.8 より $Q_{(m,0,0)} \simeq \mathbb{R}^m \times \mathbf{H}_{n-m}$ の表現 $(\pi_{(m,0,0)}|_{Q_{(m,0,0)}}, L^2(M_{(m,0,0)}))$ は $(\varpi|_{Q_{(m,0,0)}}, \mathcal{O}(D_{(m,0,0)}))$ に実現されるため, $\pi_{(m,0,0)}|_{Q_{(m,0,0)}}$ も無重複でなければならないが, これは Step 1 で述べた事実と矛盾する. $\square$

参考文献

- [1] A. Baklouti, I. Kédim and T. Yoshino, On the deformation space of Clifford-Klein forms of Heisenberg groups, *Int. Math. Res. Not. IMRN* **2008**, Art. ID rnn066, 35 pages.
- [2] A. Baklouti and A. Sasaki, Visible actions and criteria for multiplicity-freeness of representations of Heisenberg groups, *J. Lie Theory* **31** (2021), 719–750.
- [3] L. Corwin, F. P. Greenleaf and G. Grelaud, Direct integral decompositions and multiplicities for induced representations of nilpotent Lie groups, *Trans. Amer. Math. Soc.* **304** (1987), 549–583.
- [4] T. Kobayashi, Multiplicity-free representations and visible actions on complex manifolds, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* **41** (2005), 497–549.
- [5] T. Kobayashi, Propagation of multiplicity-freeness property for holomorphic vector bundles, in *Lie groups: structure, actions, and representations*, 113–140, Progr. Math., **306**, Birkhäuser/Springer, New York, 2013.
- [6] B. Krötz, S. Thangavelu and Y. Xu, The heat kernel transform for the Heisenberg group, *J. Funct. Anal.* **225** (2005), 301–336.
- [7] R. L. Lipsman: Orbital parameters for induced and restricted representations, *Trans. Amer. Math. Soc.* **313** (1989), 433–473.
- [8] 笹木集夢, 無重複表現と可視的作用, 日本数学会「数学」論説, 投稿中.

⁵ $L^2(\mathbb{R}^m) \otimes L^2(\mathbf{H}_{n-m})$ は $L^2(\mathbb{R}^m \times \mathbf{H}_{n-m})$ の稠密な集合で, B を $L^2(\mathbb{R}^m) \otimes L^2(\mathbf{H}_{n-m})$ に制限したものは, $\mathbb{R}^m$ 上の熱核変換と $\mathbf{H}_{n-m}$ 上の熱核変換の積に一致する.