平均曲率流のグラフトランスレーティングソリトンと等径関数

藤井 知輝（東京理科大学）

概 要

多様体上の関数のグラフを発するトランスレーティングソリトンについて調べるとき, そのグラフがトランスレーティングソリトンであるための条件となるある偏微分方程式の解となる関数について考察しなければならない. 本研究では, その関数が等径関数とある関数との合成で表せるとき, その条件の偏微分方程式が常微分方程式へと還元されるということを示した. また, その関数が球面上の高さ関数とある関数の合成で表されている場合にトランスレーティングソリトンの形状を分類した.

目 次

1 平均曲率流, 平均曲率流のソリトン

M を n 次元 C^∞ 級多様体とし, $f : M \to \widetilde{M}$ を M から $(n+1)$ 次元リーマン多様体 $\widetilde{M}$ への C^∞ 級はめ込みとする. また, M から $\widetilde{M}$ への C^∞ 級はめ込みの C^∞ 級族を $\{f_t\}_{t\in I}$ (I は 0 を含む区間) で表す. このとき, 平均曲率流を以下で定義する.

定義 1.1 発展方程式

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial f_t}{\partial t}\right)^{\perp_{f_t}} = H_t \\ f_0 = f \end{cases} \tag{1}$$

を満たすとき, $\{f_t\}_{t\in I}$ を f を発する**平均曲率流**という. ただし, H_t は f_t の平均曲率ベクトル場であり, $(\bullet)^{\perp_{f_t}}$ は $(\bullet)$ の f_t に関する法成分を表す.

注意 1 本研究では, 平均曲率流の定義 1.1 は通常とは異なる定義を採用している. 通常, 平均曲率流は以下の発展方程式を満たすものとして定義される.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f_t}{\partial t} = H_t \\ f_0 = f \end{cases}$$

しかし, 今回採用した定義 1.1 の (1) を用いた場合でも像の流れは通常の平均曲率流と一致している. 本研究では平均曲率流の像の流れにのみ着目するため, 平均曲率流を (1) 式によって定義しても問題ない.

X を $\widetilde{M}$ 上の完備キリングベクトル場, すなわち, X に付随する 1-パラメーター変換群 $\{\phi_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ に対して, 各 ϕ_t が $\widetilde{M}$ の等長変換であるようなものとする. このとき, 平均曲率流 $\{f_t\}_{t\in I}$ について, $\{f_t\}_{t\in I}$ がソリトンであるということを以下で定義する.

定義 1.2 平均曲率流 $\{f_t\}_{t\in I}$ に対して

$$\left(\frac{\partial \widehat{f}_t}{\partial t}\right)^{\perp_{\widehat{f}_t}} = 0 \qquad \left(\widehat{f}_t := \phi_t^{-1} \circ f_t\right)$$

が成り立つとき, $\{f_t\}_{t\in I}$ を X に関する平均曲率流の**ソリトン**という.

以後, 簡単のため, X に関する平均曲率流のソリトンを **X-ソリトン**とよぶ. ここで, $\mathbb{R}^2$ 内及び, $\mathbb{S}^2$ 内のソリトンの例を紹介する.

例 1 $\mathbb{R}^2$ 上の完備キリングベクトル場 X を $X_{(x_1,x_2)} = (0,1)$, $(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2$ (図 2) で定める. このとき, $\mathbb{R}$ 上の C^∞ 級関数 $u(x) = -\log\cos x$ のグラフ (図 1) は X-ソリトンである. このソリトンはグリムリーパーと呼ばれている.

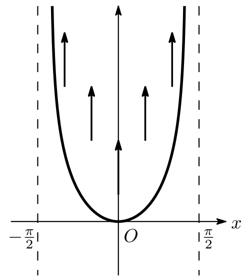


図 1: グリムリーパー

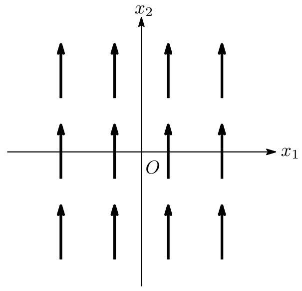


図 2: 例 1 の X

例 2 $\mathbb{R}^2$ 上の完備キリングベクトル場 X を $X_{(x_1,x_2)} = (-x_2, x_1)$, $(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2$ (図 4) で定める. このとき, 以下の図 3 のような曲線が X-ソリトンである. このソリトンは Yin Yang 曲線と呼ばれている.

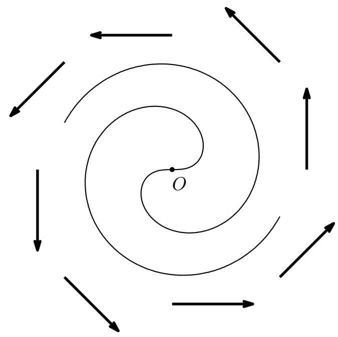


図 3: Yin Yang 曲線

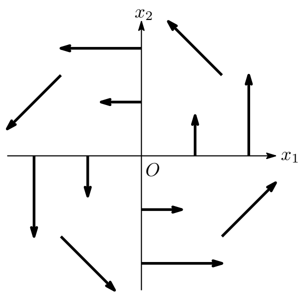


図 4: 例 2 の X

例 3 N. Hungerbühler, K. Smoczyk[2] により, 以下の図 5 のような $\mathbb{S}^2$ 上の曲線が球の回転に関するソリトンになることが示された.

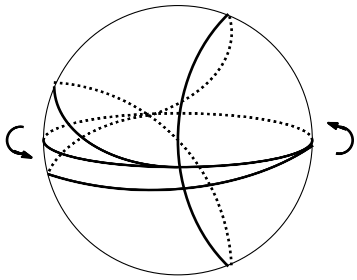


図 5: 球面上のソリトンの例

平均曲率流が X-ソリトンであるための条件として, 以下の命題が成り立つ.

命題 1.3 f を発する平均曲率流が X-ソリトンであるとき,

$$H = (X_f)^{\perp_f} \tag{2}$$

が成り立つ. ただし, H は f の平均曲率ベクトル場である. 逆に, f が (2) を満たすとき, $\{\phi_t \circ f\}_{t\in\mathbb{R}}$ は X-ソリトンになる.

2 関数のグラフを発するトランスレーティングソリトン

本節以降では次の状況を考える. M がリーマン計量 g を備えたリーマン多様体であり, $\widetilde{M}$ が直積リーマン多様体 $M\times\mathbb{R}$ である場合を考える. 必要に応じて M を M 内の領域 $D\subset M$ に狭めて考える. 平均曲率流 $\{f_t\}_{t\in I}$ の初期はめ込み f が D 上の C^∞ 級関数 $u: D\to\mathbb{R}$ を用いて, $f(x) = (x, u(x))$, $x\in M$ と表される場合を考える. X を $X = (0,1)\in T(M\times\mathbb{R}) = TM\oplus T\mathbb{R}$ で定められる完備キリングベクトル場とする. このとき, X に付随する 1-パラメーター変換群 $\{\phi_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ は $\phi_t(x,s) = (x, s+t)$, $(x,s)\in M\times\mathbb{R}$ となる. この X に関する平均曲率流のソリトンは**トランスレーティングソリトン**とよばれる. このとき, f を発する平均曲率流 $\{f_t\}_{t\in I}$ がトランスレーティングソリトンであるための条件として, 以下の命題が成り立つ.

命題 2.1 $\{f_t\}_{t\in I}$ がトランスレーティングソリトンであるとき, u について

$$\sqrt{1+\|\nabla u\|^2}\ \mathrm{div}\left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1+\|\nabla u\|^2}}\right) = 1 \tag{3}$$

が成り立つ. 逆に, u が (3) を満たすとき, $f_t(x) = (x, u(x)+t)$ で定義される $\{f_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ がトランスレーティングソリトンになる.

特に, $M=\mathbb{R}^n$ かつ C^∞ 級関数 u が $SO(n)$ 不変であるとき, すなわち, u が $SO(n)$ 不変であるとき, $\mathbb{R}^n$ 上の関数 $r:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ を $r(x) = \|x\|^2$, $x\in\mathbb{R}^n$ で定めると, C^∞ 級関数 V で $u = V\circ r$ となるものが存在する. このとき, J. Clutterbuck, O. Schnürer, F. Schulze[1] は命題 2.1 から次の事実を導いた.

事実 2.2 C^∞ 級関数 V が

$$V'' = -2(n-1)V'^3 + V'^2 - \frac{n}{2r}V' + \frac{1}{4r}$$

を満たすとき, $f_t(x) = (x, (V\circ r)(x)+t)$ として, $\{f_t\}_{t\in I}$ がトランスレーティングソリトンとなる.

J. Clutterbuck, O. Schnürer, F. Schulze[1] は命題 2.1 の条件の偏微分方程式 (3) が常微分方程式へと還元されることを示した.

3 等径関数とある関数の合成で表されている場合

本節では事実 2.2 を拡張した定理とその定理を用いて得られるトランスレーティングソリトンの例について説明する. $r: M\to\mathbb{R}$ を等径関数, すなわち, ある C^∞ 級関数 α, β を用いて,

$$\|\nabla r\|^2 = \alpha\circ r, \quad \Delta r = \beta\circ r$$

と表せる関数とする. このとき, D 上の C^∞ 級関数 $u: D\to\mathbb{R}$ を用いて, $f(x) = (x, u(x))$, $x\in M$ と表されるはめ込み f を発する平均曲率流 $\{f_t\}_{t\in I}$ がトランスレーティングソリトンであるための条件として, 以下の定理が成り立つ.

定理 3.1 C^∞ 級関数 V で, $u = V \circ r$ であるとする．このとき, $\{f_t\}_{t\in I}$ がトランスレーティングソリトンであるならば, V について．

$$2\alpha V'' + \alpha(2\beta - \alpha')V'^3 - 2\alpha V'^2 + 2\beta V' - 2 = 0 \tag{4}$$

が成り立つ．逆に, V が (4) を満たすとき, $f_t(x) = (x, (V \circ r)(x) + t)$ で定義される $\{f_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ はトランスレーティングソリトンとなる．

$M = \mathbb{R}^n$ のとき, この定理 3.1 を用いて得られる $\mathbb{R}^{n+1}$ 内のトランスレーティングソリトンの例を紹介する．

例 4 $\mathbb{R}^n$ 上の関数 r を $r(x_1, \cdots, x_n) = x_n$, $(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ で定めると,

$$\|\nabla r\|^2 = 1, \quad \Delta r = 0$$

となるので, r は等径関数となる．このとき, 定理 3.1 の常微分方程式 (4) は以下のようになる．

$$V'' = V'^2 + 1$$

この常微分方程式の解は,

$$V(r) = -\log(\cos(r + c))$$

となる．ただし, c は任意の実定数．このとき, $u(x) = -\log(\cos(x_n + c))$, $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ となるので, u のグラフは $n = 1$ のときはグリムリーパー, $n \geq 2$ のときはグリムリーパーと $\mathbb{R}^{n-1}$ の積 (図 6) になる．このトランスレーティングソリトンはグリムハイパープレインと呼ばれている．

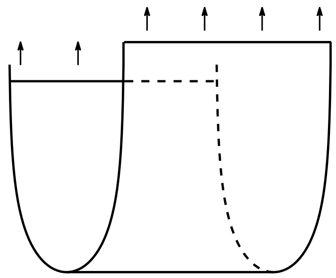


図 6: グリムハイパープレイン

例 5 $\mathbb{R}^n$ 上の関数 r を $r(x) = \|x\|^2$, $x \in \mathbb{R}^n$ で定めると,

$$\|\nabla r\|^2 = 4r, \quad \Delta r = 2n$$

となるので, r は等径関数となる．このとき, 定理 3.1 の常微分方程式 (4) は以下のようになる．

$$V'' = -2(n-1)V'^3 + V'^2 - \frac{n}{2r}V' + \frac{1}{4r}$$

したがって, この常微分方程式の解 V について, $u = V \circ r$ のグラフがトランスレーティングソリトンになる．この結果は事実 2.2 に一致している．

次に, M が n 次元球面 $\mathbb{S}^n (n \geq 2)$ である場合の定理 3.1 を用いて得られる $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ 内のトランスレーティングソリトンの例を説明する．$\mathbb{S}^n$ 上の関数 r を $\mathbb{S}^n$ 上の高さ関数, すなわち, $r(x_1, \cdots, x_{n+1}) = x_{n+1}$, $(x_1, \cdots, x_{n+1}) \in \mathbb{S}^n$ で定めると,

$$\|\nabla r\|^2 = 1 - r^2, \quad \Delta r = -nr$$

となるので, r は等径関数となる．このとき, 定理 3.1 の常微分方程式 (4) は以下のようになる．

$$V'' = (n-1)rV'^3 + V'^2 + \frac{nr}{1-r^2}V' + \frac{1}{1-r^2}, \quad -1 < r < 1 \tag{5}$$

したがって, 定理 3.1 より, 常微分方程式 (5) の解 V を用いて定義される $u = V \circ r$ のグラフはトランスレーティングソリトンになる．以後, そのトランスレーティングソリトンの様子を調べるために V のグラフの形状を調べた結果を説明する．

常微分方程式 (5) の解 V について, $\psi(r) := \sqrt{1-r^2}\ V'(r)$ とすると, ψ は以下の常微分方程式の解になる．

$$\psi' = \frac{1}{1-r^2}\left(\psi^2+1\right)\left((n-1)r\psi + \sqrt{1-r^2}\right) \tag{6}$$

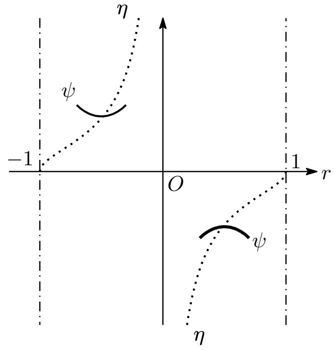
この常微分方程式 (6) の解 ψ を考察することで, V のグラフの形状を調べる．$\eta(r) := -\dfrac{\sqrt{1-r^2}}{(n-1)r}$ とすると, $\psi'(r)$ について以下の補題が成り立つ．

補題 3.2

(i) $\psi'(r) > 0 \ \Leftrightarrow\ \psi(r) > \eta(r),\ r \in (0,1) \ \ or \ \ r = 0 \quad or \quad \psi(r) < \eta(r),\ r \in (-1,0)$

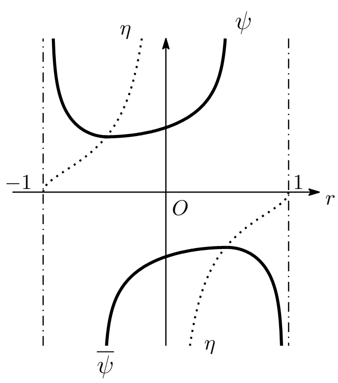
(ii) $\psi'(r) = 0 \ \Leftrightarrow\ \psi(r) = \eta(r),\ r \in (-1,0) \cup (0,1)$

(iii) $\psi'(r) < 0 \ \Leftrightarrow\ \psi(r) < \eta(r),\ r \in (0,1) \ \ or \ \ \psi(r) > \eta(r),\ r \in (-1,0)$



さらに, 常微分方程式 (6) の解について次の補題も成り立つ．

補題 3.3 常微分方程式 (6) の解 ψ に対して, $\overline{\psi}(r) := -\psi(-r)$ も (6) の解になる．



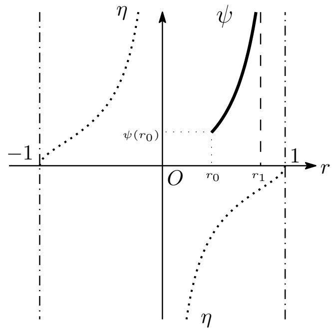
補題 3.3 より, ψ の様子を調べるには $\psi \geq 0$ の場合を調べればよいことが分かる．

$\psi \geq 0$ の場合の ψ の様子について次の 4 つの補題が成り立つ.

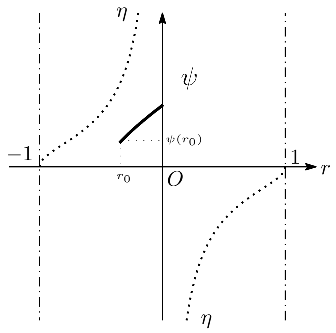
補題 3.4 (6) の解 ψ がある $r_0 \in (0,1)$ で $\psi(r_0) \geq 0$ であるとき, ある $r_1 \in (r_0, 1)$ で

$$\lim_{r \uparrow r_1} \psi(r) = +\infty$$

となるものが存在する.



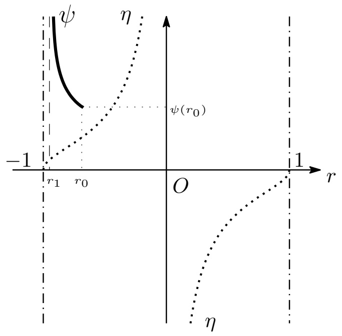
補題 3.5 (6) の解 ψ がある $r_0 \in (-1,0)$ で $0 \leq \psi(r_0) < \eta(r_0)$ であるとき, ψ は $r = 0$ まで定義されている.



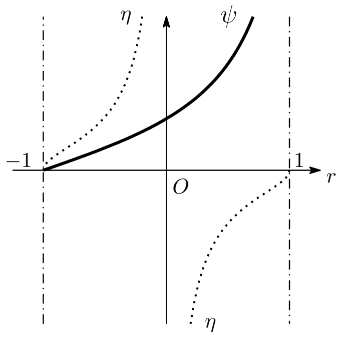
補題 3.6 (6) の解 ψ がある $r_0 \in (-1,0)$ で $\psi(r_0) \geq \eta(r_0)$ であるとき, ある $r_1 \in (-1, r_0)$ で

$$\lim_{r \downarrow r_1} \psi(r) = +\infty$$

となるものが存在する.



補題 3.7 (6) の解 ψ が $r=-1$ で値をもつならば, $\psi(-1)=0$. このとき, $V'(-1)=\dfrac{1}{n}$



以上の補題から, ψ のグラフについて以下の命題が成り立つ.

命題 3.8 常微分方程式 (6) の解 ψ のグラフがとり得る形状は Type I′ から Type IV′, またはそれらを原点に関して π だけ回転させたもののいずれかである.

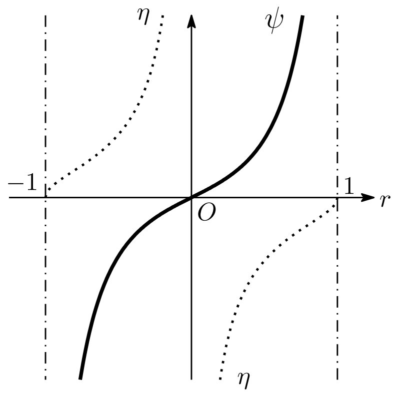


図 7: Type I′

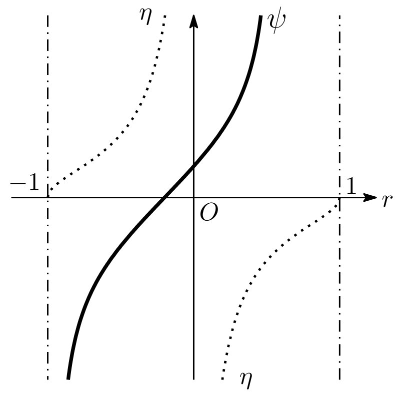


図 8: Type II′

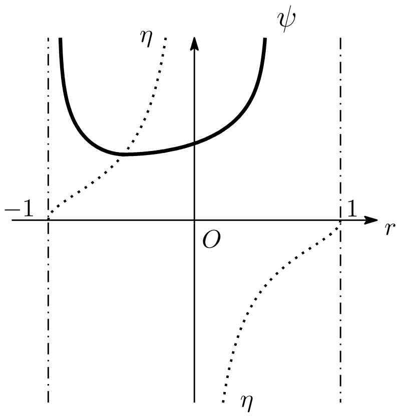


図 9: Type III′

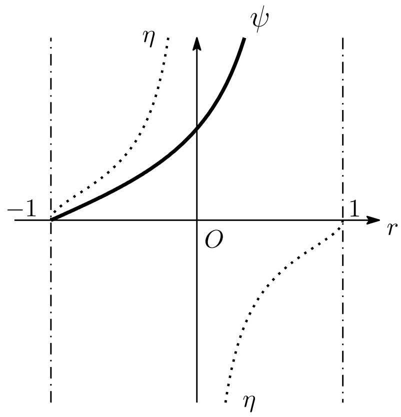


図 10: Type IV′

さらに $V'(r) = \dfrac{1}{\sqrt{1-r^2}}\psi(r)$ であることから, $\widetilde{\eta}(r) := -\dfrac{1}{(n-1)r}$ としたとき, 命題 3.8 より V' のグラフについて以下の命題が成り立つ.

命題 3.9 常微分方程式 (5) の解 V に関して,V' のグラフがとり得る形状は Type I$''$ から Type IV$''$, またはそれらを原点に関して π だけ回転させたもののいずれかである.

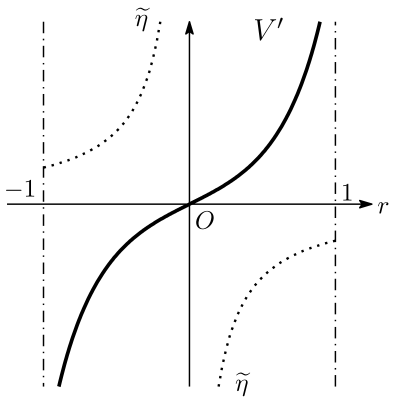


図 11: Type I$''$

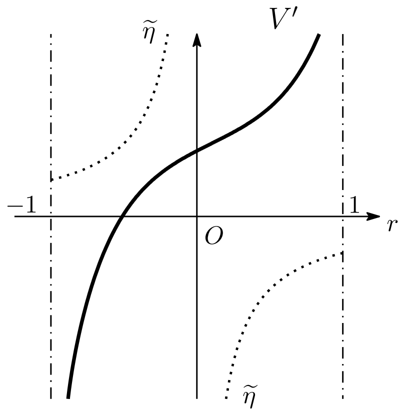


図 12: Type II$''$

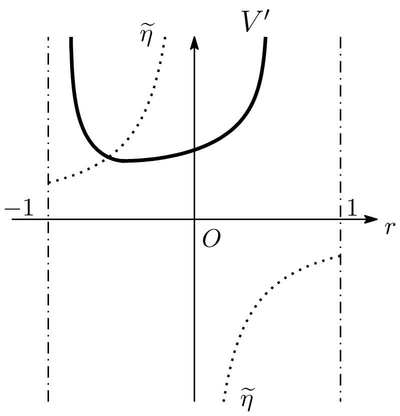


図 13: Type III$''$

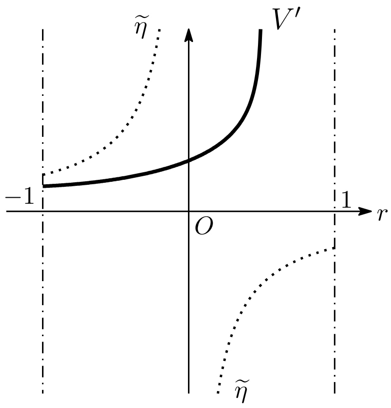


図 14: Type IV$''$

したがって, 命題 3.9 より以下の定理が成り立つ.

定理 3.10 常微分方程式 (5) の解 V のグラフがとり得る形状は Type I から Type IV, またはそれらを V 軸に関して折り返したもののいずれかである.

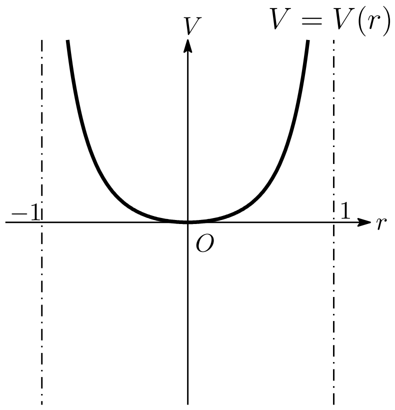


図 15: Type I

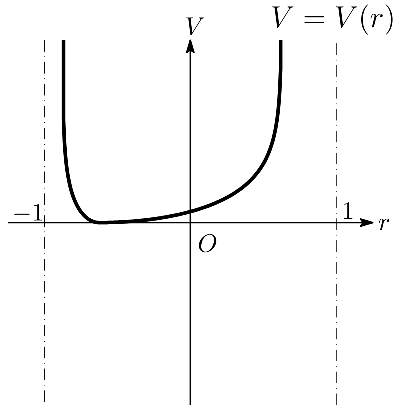


図 16: Type II

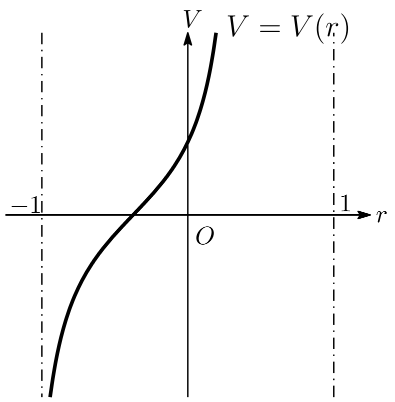


図 17: Type III

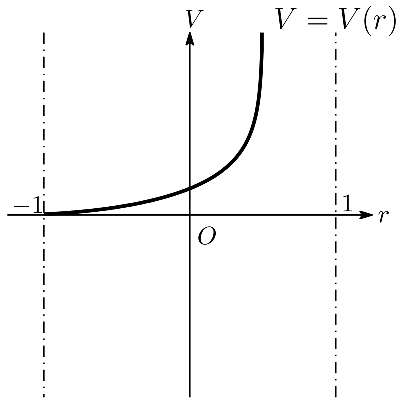


図 18: Type IV

また, 定理 3.10 の Type I から Type IV のグラフはどれも $r = 1$ まで定義されていないことから以下の系が成り立つ.

系 3.11 $u = V \circ r$ の形で表せる関数のグラフを発するトランスレーティングソリトンで u の定義域が球面全体であるものは存在しない.

最後に, 今後の研究課題について述べる. 今後の研究課題として以下の 3 つについて調べたいと考えている.

- $M = \mathbb{S}^n$ のとき, 等径関数 r が高さ関数以外で定義される場合のトランスレーティングソリトンの形状を調べる.
- $M = \mathbb{S}^n$ のとき, トランスレーティングソリトン以外のソリトンの場合も同様の方法でその形状を調べる.
- より一般的な例として, 対称空間上の等径関数を考えた場合も同様の方法でその形状を調べる.

参考文献

[1] J. Clutterbuck, O. C. Schnürer, F. Schulze, *Stability of translating solutions to mean curvature flow*, Calc. Var. Partial Differ. Equ. **29** (2007) no.3, 281-293.

[2] N. Hungerbühler, K. Smoczyk, *Soliton solution for the mean curvature flow*, Differ Integral Equ. **13** (2000) no.10-12, 1321-1345.

[3] N. Koike, *Mean curvature flow - Time Evolution Sub,anifold*, Kyoritsu Shuppan.

[4] X. P. Zhu, *Lectures on Mean Curvature Flows*, Studies in Advanced Math., vol. 32, AMS/IP, (2002).