変形ドナルドソン・トーマス接続の変形理論

河井　公大朗（学習院大学）*

1　ホロノミー群

リーマン多様体の「曲がり方」を調べる方法の 1 つに「ホロノミー群」がある。（定義については [7, Section 3] などにある。）これは以下のような分類されている。

定理 1 ([1])**.** (M, g) を単連結リーマン多様体で、既約（局所的にリーマン多様体の直積に分解しない）かつ局所対称空間でない $(\nabla R \neq 0)$ とする。このときホロノミー群は

$$\mathrm{SO}(n),\ \mathrm{U}(n),\ \mathrm{SU}(n),\ \mathrm{Sp}(n)\mathrm{Sp}(1),\ \mathrm{Sp}(n),\ G_2,\ \mathrm{Spin}(7)$$

のいずれかになる。

変形ドナルドソン・トーマス接続は、G_2 の場合（G_2 多様体）に対して定義される概念である。まず G_2 幾何について復習する。

2　G_2 幾何

例外型 Lie 群 G_2 は八元数体 $\mathbb{O}$ の自己同型群（線形同型写像 $\mathbb{O} \to \mathbb{O}$ で $\mathbb{O}$ の積を保つもの）として定義される。

$$G_2 := \mathrm{Aut}(\mathbb{O}).$$

$\mathbb{O} = \mathbb{R} \oplus \mathrm{Im}\mathbb{O} = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^7$ とみる。$\mathbb{O}$ の積は $\mathrm{Im}\mathbb{O} = \mathbb{R}^7$ 上の 3-form $\varphi_0 \in \Lambda^3(\mathbb{R}^7)^*$ で表現できる。つまり $u, v \in \mathrm{Im}\mathbb{O} = \mathbb{R}^7$ で $u \perp v$ となるものに対して、

$$\mathbb{R}^7 \times \mathbb{R}^7 \ni (u, v) \mapsto \varphi_0(u, v, \cdot)^\sharp \in \mathbb{R}^7$$

が $\mathbb{O}$ の積と一致するように φ_0 を定義する。（φ_0 は具体的にかける。[7, Definition 11.1.1] などを参照されたい。）このとき

$$G_2 = \{g \in GL(7, \mathbb{R}) \mid g^*\varphi_0 = \varphi_0\}$$

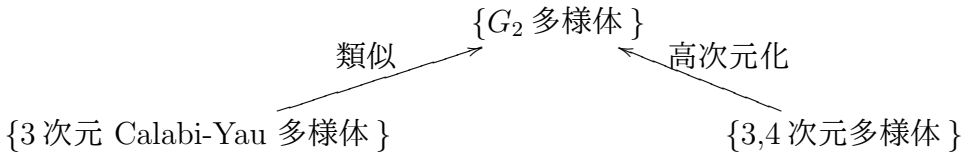
*本研究は JSPS 科研費 17K14181 の助成を受けたものである。
e-mail: kkwai@math.gakushuin.ac.jp

とかける。$G_2 \subset \mathrm{SO}(7)$ となることが知られている。

今 (X^7, g) を連結なリーマン多様体でホロノミー群 $\mathrm{Hol}(g)$ が G_2 に含まれているとする。このとき φ_0 が G_2 作用で不変なことより、平行移動によって X^7 上に平行な 3-form $\varphi \in \Omega^3(X^7)$ が定義される。（このような φ は一意ではない。）本記録集では、この $\varphi \in \Omega^3(X^7)$ を 1 つ固定して (X^7, φ, g) を G_2 **多様体**とよぶ。

標語的にいえば、G_2 幾何とは、「3-form φ で特徴づけられる幾何」といえる。（比較として、Kähler 幾何は 2-form（Kähler 形式）で特徴づけられる幾何である。）

G_2 幾何は極めて特殊な対象を扱っているように思えるかもしれないが、例えば以下のような捉えることができ、重要な研究対象である。



- まず、G_2 多様体は（複素）3 次元 Calabi-Yau 多様体の類似と考えられる。これは Lie 群の間の包含関係 $\mathrm{SU}(3) \subset G_2$ からくるものである。実際、Y^6 を（複素）3 次元 Calabi-Yau 多様体とすると、$S^1 \times Y^6$ は G_2 多様体になる。

  これにより、多くの Calabi-Yau の理論の類似が、G_2 多様体に対して考えられるであろうことが示唆される。これについては後程詳述する。

- G_2 多様体は、（よく研究されている）3,4 次元多様体の理論の高次元化の場であるとも捉えられる。例えば、3 次元多様体上には平坦接続を扱う Chern-Simons 理論、および 4 次元多様体上には ASD 接続を扱う Donaldson 不変量があるが、これらの一般化として G_2-instanton というものが考えられている。

3 Calibrated geometry

calibration とは、Harvey-Lawson [6] により導入されたリーマン多様体 (X^n, g) 上のある条件をみたす閉微分形式 $\varphi \in \Omega^k(X^n)$ のことである。（詳細な定義は [7, Definition 4.1.3] などを参照されたい。）calibration があると、calibrated submanifold という極小部分多様体が定義される。calibrated submanifold の著しい性質として、コンパクトなものは、ホモロジー類の中で体積最小で、体積は位相的に与えられることが知られている。

calibration の概念はホロノミー群と相性が良い。多様体が特殊なホロノミー群をもつときには、自然に calibration, calibrated submanifold が定義できる。以下いくつか例を示す。

$\mathrm{Hol}(g)$ $(\subset)$	$\mathrm{U}(n)$	$\mathrm{SU}(n)$	G_2
(X, g)	X^{2n}:Kähler	X^{2n}:Calabi-Yau	$X^7 : G_2$ 多様体
calibrated submanifold	N^{2k}:複素部分多様体	L^n:特殊ラグランジュ部分多様体	A^3:associative 部分多様体 C^4:coassociative 部分多様体

- 複素部分多様体、associative 部分多様体は似た振る舞いをする。どちらもその変形に障害がある。
- 特殊ラグランジュ部分多様体、coassociative 部分多様体は似た振る舞いをする。どちらもその変形に障害はなく、モジュライ空間は常に滑らかな多様体である。

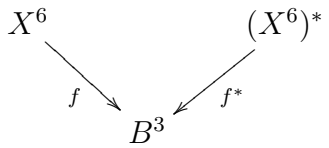
注意 2. *Gromov-Witten* 不変量とは、概正則曲線を「数えて」定義される *symplectic* 多様体内の不変量であった。上述の類似性から、*associative* 部分多様体を数えて不変量を構成しようとする研究がある。また *Casson* 不変量は平坦接続を「数える」もので、*Donaldson* 不変量は *ASD* 接続を「数える」ものであった。その類似として、G_2*-instanton* を数えて不変量を構成しようとする研究もある。

次の章で述べるように、*Calabi-Yau* 多様体には、物理からくるミラー対称性という不思議な対応があるとされ、それは特殊ラグランジュ *fibration* で説明できると予想されている。その類似として、G_2 多様体のミラー対称性というのも考えられている。

4 ミラー対称性

Strominger–Yau–Zaslow [16] により、3 次元 Calabi-Yau 多様体のミラー対称性は（特異ファイバーを含む）特殊ラグランジュ(SL) dual T^3-fibration で説明できると予想されている。(これは今日では SYZ 予想と呼ばれている。)

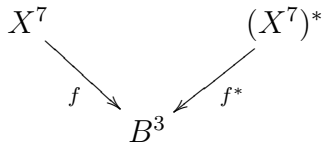
つまり X^6 と $(X^6)^*$ が「ミラー」である 3 次元 Calabi-Yau 多様体ならば、ある 3 次元多様体 B^3 と（特異ファイバーを含む）fibration $f : X^6 \to B^3$, $f^* : (X^6)^* \to B^3$ が存在して、滑らかなファイバー $f^{-1}(b), (f^*)^{-1}(b)$ は 3 次元トーラス T^3 で、それぞれ何らかの意味で dual になっていると予想する。



Leung–Yau–Zaslow [14] は、SL dual T^3-fibration が与えられたとき、「実フーリエ・向井変換」により、SL 部分多様体は **deformed Hermitian Yang–Mills**

(dHYM) 接続に対応することを示した。近年この dHYM 接続の研究は活発に行われている。

この G_2 多様体版は、Gukov–Yau–Zaslow [5] により提唱された。つまり G_2 多様体のミラー対称性は（特異ファイバーを含む）coassociative dual fibration で説明できるのではと予想した。



Calabi-Yau の場合は滑らかなファイバーはトーラス T^3 のみであったが、G_2 の場合は滑らかなファイバーはトーラス T^4 だけでなく、K3 曲面もあり得ることに注意しておく。（K3 fibration の “adiabatic limit” (ファイバーをつぶすような極限) は、最近 Donaldson らによりよく研究されている。）

Lee–Leung [13] は、coassociative dual T^4-fibration が与えられたとき、「実フーリエ・向井変換」により associative 部分多様体は **deformed Donaldson–Thomas (dDT) 接続**に対応することを示した。この dDT 接続が本記録集の主題である。以下に詳細な定義を与える。

5　定義と基本的な性質

定義 3. (X^7, φ, g) を G_2 多様体、$(L, h) \to X^7$ を複素エルミート直線束とする。(L, h) のエルミート接続 ∇ が **deformed Donaldson–Thomas (dDT) 接続** とは

$$\frac{1}{6}F_\nabla^3 + F_\nabla \wedge *\varphi = 0$$

をみたすときをいう。ここで $F_\nabla \in \sqrt{-1}\Omega^2$ は ∇ の曲率である。

- dDT 接続は G_2-instanton (Donaldson–Thomas connection): $F_\nabla \wedge *\varphi = 0$ の類似とも思えることに注意する。

平坦接続 ($F_\nabla = 0$ となる接続 ∇) は自明に dDT 接続になる。その他の例としては、dHYM 接続は以下のような意味で dDT 接続になる。

$(Y^6, \omega, g, J, \Omega)$ を Calabi–Yau 3 次元多様体、$(L, h) \to Y^6$ を複素エルミート直線束とする。このとき $X^7 := S^1 \times Y^6$ は G_2 多様体になり G_2 構造 $\varphi \in \Omega^3(X^7)$ は

$$\varphi = dx \wedge \omega + \operatorname{Re}\Omega, \qquad *\varphi = \omega^2/2 - dx \wedge \operatorname{Im}\Omega$$

で与えられる。$\pi : X^7 \to Y^6$ を射影とする。

補題 4. ∇ を (L,h) の *dHYM* 接続 *(* $F_\nabla^{0,2}=\mathrm{Im}\,(\omega+F_\nabla)^3=0$*)* とする。このとき $\pi^*\nabla$ は π^*L の *dDT* 接続になる。

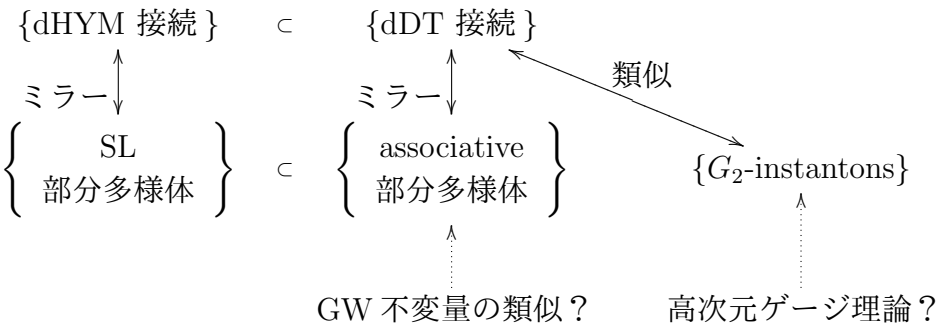
Proof. これは次からわかる。

$$\begin{aligned}\frac{1}{6}F_\nabla^3+F_\nabla\wedge*\varphi=&\frac{1}{6}\left(F_\nabla^3+3F_\nabla\wedge\omega^2\right)-dx\wedge F_\nabla\wedge\mathrm{Im}\,\Omega,\\ \sqrt{-1}\mathrm{Im}\,(\omega+F_\nabla)^3=&F_\nabla^3+3F_\nabla\wedge\omega^2.\end{aligned}$$

□

（実は後で Y^6 がコンパクト連結なら「逆」もいえることを述べる。）

以上をまとめると以下のような表になる。



{dHYM 接続} ⊂ {dDT 接続} は補題 4 のような意味である。SL, associative 部分多様体にも類似の関係がある。これらの類似性から、dDT 接続も「数えて」不変量が作れるのでは？と期待される。

一方、dDT 接続の研究はあまりなされておらず、基本的な性質も未知である。そこでまず、モジュライ（変形）理論はどうなるか？associative, G_2-instanton とどれほど類似性があるか？について考え、類似の性質をもつか調べる。（将来的な展望としては、dDT 接続の研究を発展させて、逆に associative, G_2-instanton の研究に応用ができれば非常に面白いと思っている。）

6　主結果

まず最初に associative 部分多様体の代表的な性質を列挙する。

- G_2 構造を摂動すると、モジュライ空間は 0 次元向きづけ可能多様体。
- **associator equality** という代数的な等式がある。これにより、G_2 構造は calibration になることがわかり、associative 部分多様体の（変形理論に有用な）特徴づけができる。

- ホモロジー類の中で体積最小で、体積は位相的に与えられる。(これは一般に calibrated submanifold に対する性質である。)
- Y^6 を 3 次元 Calabi-Yau 多様体とする。$X^7 = S^1 \times Y^6$ の associative 部分多様体でホモロジー類 $\gamma \in H_3(Y^6) \hookrightarrow H_3(X^7)$ を代表するものは、$\{*\} \times L^3$ ($L^3 \subset Y^6$ は SL) の形に限る。
- associative 部分多様体は、Chern-Simons 型汎関数の臨界点としてかける。

(実は G_2-instanton も類似の性質をもつことが知られている。)

[9]-[12] の結果というものは、極めて大雑把にいえば dDT 接続は上と類似した性質をすべてもつということである。(5 つ目は [8] によって成されたもの)。

6.1 モジュライ（変形）理論

定理 5 ([9])**.** コンパクト連結な G_2 多様体上で、G_2 構造を摂動すると、dDT 接続のモジュライ空間は b^1 次元向きづけ可能多様体になる。

変形理論の証明の方針は標準的なものである。つまり、変形写像の線形化を計算し、ゲージ群の作用に関する slice をとり、陰関数定理の適用を考える。しかし、線形化を「上手く」書いて楕円型複体を導くのはかなり非自明である。最初の G_2 構造 φ と dDT 接続 ∇ から定まる「新たな G_2 構造 $\tilde{\varphi}_\nabla$」を導入し、これを解決した。

またモジュライ空間が向き付け可能であることも示した。「向き」は大域的な性質であるため、考えるのがやや難しい問題である。だが、「数え上げ」のためにはモジュライ空間は自然な向きを持つ必要があると考えられており、自然な向きが入るか考えるのは重要である。「向きづけ」の証明には、上述の $\tilde{\varphi}_\nabla$ が実は具体的にかけ、φ と G_2 構造の空間内の path で結べることを用いる。この事実と、ベクトル束の「ホモトピー性質」を用いて、determinant line bundle が自明であることを示すことにより、モジュライ空間の向きづけ可能性が言える。

6.2 接続の「体積」

(X^n, g) をコンパクト連結向きづけ可能リーマン多様体、$(L, h) \to X^n$ を複素エルミート直線束、$\mathcal{A}_0$ を (L, h) のエルミート接続全体の集合とする。"**volume functional**" $V : \mathcal{A}_0 \to \mathbb{R}$ を次で定義する。

$$V(\nabla) := \int_X v(\nabla) \mathrm{vol}_g,$$
$$v(\nabla) := \sqrt{1 + |F_\nabla|^2 + \left|\frac{F_\nabla^2}{2!}\right|^2 + \left|\frac{F_\nabla^3}{3!}\right|^2 + \cdots}.$$

「実フーリエ・向井変換」で、V は部分多様体の（通常の意味での）体積に対応する。（それゆえに V を接続の「体積」と考えている。）また物理では、V は Dirac-Born-Infeld (DBI) action とよばれる汎関数である。

定理 6 ("Mirror" of associator equality, [12])**.** G_2 多様体上、任意の $\nabla \in \mathcal{A}_0$ に対して

$$\left(1+\frac{1}{2}\langle F_\nabla^2, *\varphi\rangle\right)^2 + \left|*\varphi\wedge F_\nabla + \frac{1}{6}F_\nabla^3\right|^2 + \frac{1}{4}\left|\varphi\wedge *(F_\nabla)^2\right|^2 = v(\nabla)^2$$

が成り立つ。特に任意の $\nabla \in \mathcal{A}_0$ に対して

$$\left|1+\frac{1}{2}\langle F_\nabla^2, *\varphi\rangle\right| \leq v(\nabla), \qquad \text{等号成立} \Longleftrightarrow \nabla : dDT\text{接続}$$

が成り立つ。

注意 7. *[9]* より、$*\varphi\wedge F_\nabla + \frac{1}{6}F_\nabla^3 = 0$ ならば $\varphi\wedge *(F_\nabla)^2 = 0$ が成り立つ。これより最初の等式から、*2* つ目の主張が従う。

定理 *6* は *[10]* において、*(*通常の*)* *associator equality* の実フーリエ･向井変換により予測された。証明は *pointwise* な計算だが、結構な工夫が必要になる。（おそらく実フーリエ･向井変換なしには発見不可と思われる。）定理 *6* により、*calibration/G_2-instanton* のときと一部同じような議論ができる。更に、定理 *6* は *Calabi-Yau 3* 次元多様体上の「ミラー *SL equality*」も導く。

また定理 *6* より**コンパクト連結な G_2 多様体上で dDT 接続 ∇ は $V : \mathcal{A}_0 \to \mathbb{R}$ の最小を与え、$V(\nabla)$ は位相的に与えられる**ことがわかる。

系 8. $L \to X^7$ が平坦とする。このとき任意の *dDT* 接続は平坦接続。特に、*dDT* 接続のモジュライ空間は $H^1(X,\mathbb{R})/H^1(X,\mathbb{Z})$ になる。

Proof. ∇_0 を平坦接続とし ∇ を任意の dDT 接続とする。∇_0 は自明に dDT 接続で、dDT 接続に対して V は同じ値をとるから

$$\int_X \sqrt{1+|F_\nabla|^2+\left|\frac{F_\nabla^2}{2!}\right|^2+\left|\frac{F_\nabla^3}{3!}\right|^2}\,\mathrm{vol}_g = V(\nabla) = V(\nabla_0) = \int_X \mathrm{vol}_g.$$

これより $F_\nabla = 0$ がわかる。 □

注意 9. コンパクト連結な G_2 多様体上で非自明な例を構成するならば、平坦でない直線束 $L \to X^7$ をとる必要がある。（*cf. Lotay-Oliveira [15]* は、ある *coclosed* だが *closed* でない G_2 構造をもつ *7*次元多様体上の自明束上で具体例を構成した。）

補題 4 でみたように、複素エルミート直線束 $(L,h) \to Y^6$ (Y^6 はコンパクト 3 次元 Calabi-Yau 多様体) が与えられたとき、(L,h) の dHYM 接続 ∇ の引き戻し $\pi^*\nabla$ は dDT 接続だった。（$\pi : X^7 = S^1 \times Y^6 \to Y^6$ は射影。）この「逆」も成立するというのが、以下の主張である。

定理 10 ([12])**.** *1.* π^*L に *dDT* 接続が存在することと、L に *dHYM* 接続が存在することは同値である。

2. π^*L の任意の *dDT* 接続 $\widetilde{\nabla}$ に対して、ある L の *dHYM* 接続 ∇ と閉 *1*-形式 $\xi \in \sqrt{-1}\Omega^1(X^7)$ が存在して $\widetilde{\nabla} = \pi^*\nabla + \xi$.

3. $\mathcal{M}_{G_2}$ を π^*L の *dDT* 接続のモジュライ空間、$\mathcal{M}_{dHYM}$ を L の *dHYM* 接続のモジュライ空間とする。このとき $\mathcal{M}_{G_2} \cong S^1 \times \mathcal{M}_{dHYM}$.

証明は「ミラー associator (定理 6), SL equality」(の積分版) を主に用いる。一部 associative/SL 部分多様体と同様の議論が出てくる。

1. は、この状況では dDT 接続の存在と dHYM 接続の存在が同値であることを言っている。dHYM の存在はある「安定性」と同値であることが予想されており ([4, 2])、一般に dDT 接続の存在もある「安定性」と関連づけられるかもしれない。

6.3 変分法的観点

ここでは Karigiannis-Leung [8] による変分法的観点を紹介する。

(X^7, φ, g) をコンパクト連結 G_2 多様体、$(L, h) \to X$ を複素エルミート直線束、$\mathcal{A}_0$ を (L, h) のエルミート接続全体の集合とする。

$\mathcal{A}_0$ 上の 1-form Θ を

$$\Theta_\nabla(\sqrt{-1}b) = \int_X \sqrt{-1}b \wedge \left(\frac{1}{6}F_\nabla^3 + F_\nabla \wedge *\varphi\right)$$

$(\nabla \in \mathcal{A}_0, \sqrt{-1}b \in T_\nabla\mathcal{A}_0 = \sqrt{-1}\Omega^1)$ で定義する。このとき定義から

$$\Theta_\nabla = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \nabla : \text{dDT 接続}$$

である。実は Θ は closed である。$\mathcal{A}_0 = \nabla + \sqrt{-1}\Omega^1 \cdot \mathrm{id}_L$ ($\nabla \in \mathcal{A}_0$ は任意に固定した接続) は可縮なので、ある関数 $CS : \mathcal{A}_0 \to \mathbb{R}$ があって $dCS = \Theta$ となる。よって dDT 接続は CS (Chern-Simons 型汎関数) の臨界点として書ける。

7 今後の課題

以下のようなことが今後の課題として考えられる。

- dDT 接続は、他にも associative 部分多様体や G_2-instanton と類似した性質をもつか？(その発見には実フーリエ・向井変換を用いるとよい？)
- mean curvature を V の negative gradient vector field として定義できる。[12] では、「ミラー mean curvature flow (MCF)」の短時間存在を示した。通常の部分多様体の MCF に対する類似の結果が示せるか？

- コンパクト G_2 多様体上で非自明な dDT 接続の例が構成できるか？(注意 9 でみたように、非平坦な直線束をとる必要がある。)
- 「数え上げ」のためには、"singular" dDT 接続を考える必要があるが、どのように研究すればいいのか目途は立っていない。dDT 接続のコンパクト性定理は、associative Smith map [3] や G_2-instanton [17] の場合をヒントにすれば、示せるかもしれない。
- 定理 10 のあとに述べたように、dDT の存在を何らかの「安定性」に関連づけられるか？

参考文献

[1] M. Berger. Sur les groupes d'holonomie homogène des variétés à connexion affine et des variétés riemanniennes. (French) *Bull. Soc. Math. France* 83 (1955), 279–330.

[2] G. Chen. Supercritical deformed Hermitian-Yang-Mills equation. arXiv:2005.12202.

[3] D.R. Cheng, S. Karigiannis and J. Madnick. Bubble Tree Convergence of Conformally Cross Product Preserving Maps. arXiv:1909.03512.

[4] T. C. Collins, A. Jacob and S.-T. Yau. $(1,1)$ forms with specified Lagrangian phase: a priori estimates and algebraic obstructions. *Camb. J. Math.* **8** (2020), no. 2, 407–452.

[5] S. Gukov, S.-T. Yau, E. Zaslow. Duality and fibrations on G_2 manifolds. *Turkish J. Math.* **27** (2003), no. 1, 61–97.

[6] R. Harvey and H. B. Lawson. Calibrated geometries. *Acta Math.* 148 (1982), 47–157.

[7] D. D. Joyce. Riemannian holonomy groups and calibrated geometry. *Oxford Graduate Texts in Mathematics, 12. Oxford University Press, Oxford,* 2007. x+303 pp. ISBN: 978-0-19-921559-1

[8] S. Karigiannis and N.-C. Leung. Hodge theory for G_2-manifolds: intermediate Jacobians and Abel-Jacobi maps. *Proc. Lond. Math. Soc. (3)* **99** (2009), no. 2, 297–325.

[9] K. Kawai and H. Yamamoto. Deformation theory of deformed Hermitian Yang-Mills connections and deformed Donaldson-Thomas connections. arXiv:2004.00532.

[10] K. Kawai and H. Yamamoto. The real Fourier–Mukai transform of Cayley manifolds. arXiv:2101.03984.

[11] K. Kawai and H. Yamamoto. Deformation theory of deformed Donaldson–Thomas connections for Spin(7)-manifolds. arXiv:2101.03986.

[12] K. Kawai and H. Yamamoto. Mirror of volume functionals on manifolds with special holonomy. arXiv:2103.13863.

[13] J.-H. Lee, N. C. Leung. Geometric structures on G_2 and Spin(7)-manifolds. *Adv. Theor. Math. Phys.* **13** (2009), no. 1, 1–31.

[14] N.-C. Leung, S.-T. Yau and E. Zaslow. From special Lagrangian to Hermitian–Yang–Mills via Fourier–Mukai transform. *Adv. Theor. Math. Phys.* **4** (2000), no. 6, 1319–1341.

[15] J. D. Lotay and G. Oliveira. Examples of deformed G_2-instantons/Donaldson-Thomas connections. arXiv:2007.11304.

[16] A. Strominger, S.-T. Yau, and E. Zaslow. Mirror symmetry is T-duality. *Nuclear Phys. B* **479** (1996), no. 1-2, 243–259.

[17] G. Tian. Gauge theory and calibrated geometry. I. *Ann. of Math. (2)* **151** (2000), no. 1, 193–268.