リッチフローに沿った熱方程式のリウヴィル型定理

國川　慶太　(宇都宮大学)*

1. リウヴィルの定理

(M^n, g) を非コンパクト完備リーマン多様体とし, そのリッチ曲率が下から定数で抑えられているとする ($\mathrm{Ric} \geq -K,\ K \geq 0$). また, $B_R(x_0)$ を点 $x_0 \in M$ を中心とする半径 $R > 0$ の測地球とする. この設定のもと, Cheng-Yau [2] は 1975 年, 正値調和関数 $u : B_R(x_0) \to \mathbb{R}$ に対する勾配評価 (gradient estimate) を導出した:

$$\frac{|\nabla u|}{u} \leq C_n \left(\frac{1}{R} + \sqrt{K} \right) \quad \text{in} \quad B_{R/2}(x_0).$$

ただし, C_n は次元 $n = \dim M$ のみに依存する定数である. $K = 0$ の場合, Cheng-Yau の勾配評価において $R \to \infty$ とすれば, Yau による有名なリウヴィルの定理を得ることができる. すなわち, 非負リッチ曲率を持つ完備リーマン多様体上の正の調和関数は定数関数に限る. なお, M 上の (正値とは限らない) 有界な調和関数は, 適当に定数を加えてやればいつでも正値調和関数になるので, Yau によるリウヴィルの定理は, 有界な調和関数に対しても適用可能であることを注意しておく.

さて, 調和関数は熱方程式 $\partial_t u = \Delta u$ の定常解と考えられるので, Cheng-Yau の話をリーマン多様体上の熱方程式へと拡張する試みは自然な問題と言える. Li-Yau [5] は 1986 年, Cheng-Yau と同様の設定 ($\mathrm{Ric} \geq -K, K \geq 0$) のもと, リーマン多様体上の熱方程式の正値解 $u : Q_{R,T}(x_0, t_0) \to \mathbb{R}$ に対する勾配評価を導出した (ただし, $Q_{R,T}(x_0, t_0) := B_R(x_0) \times [t_0 - T, t_0]$, $t_0 \in \mathbb{R}, T > 0$): 任意の実数 $a > 0$ に対して,

$$\frac{|\nabla u|^2}{u^2} - a\frac{\partial_t u}{u} \leq C_{n,a} \left(\frac{1}{R^2} + \frac{1}{T} + K \right) \quad \text{in} \quad Q_{R/2,T/4}(x_0, t_0)$$

が成り立つ.

熱方程式の解に対して勾配評価が得られたのだから, 我々としてはそこからリウヴィル型の定理まで言えるのか, つまり解は定数に限るのかが気になるところである. そもそも熱方程式の解に対して, 適切なリウヴィル型の定理とは何だろうか. 調和関数の場合は, 空間全体で定義された正値調和関数に対してリウヴィルの定理を考えていた. これを参考にすると, 熱方程式については, 時間的にも空間的にも無限に広がる解に対してリウヴィル型の定理を考察するのが良いと思われる. そのようなものとして我々は古代解を扱う. 古代解とは, 時間 $t \in (-\infty, 0]$ で定義された熱方程式の解のことである. ここでは, $u(x,t)$ として, 非負リッチ曲率 ($K = 0$) を持つ完備リーマン多様体上の熱方程式の正値古代解 $u : M \times (-\infty, 0] \to \mathbb{R}$ を考える. このとき, Li-Yau の勾配評価において $R, T \to \infty$ とすれば, Cheng-Yau の場合と同様に $u(x,t)$ が定数関数であるというリウヴィル型の定理を得られそうだが, 実はそうはいかない. 実際, そのような結論を得るためには, 時間方向の勾配の項 $a\partial_t u/u$ が邪魔になる.

本講演の内容は櫻井陽平氏 (埼玉大学) との共同研究に基づく。
* 〒 321-8505 栃木県宇都宮市峰町 350　宇都宮大学 共同教育学部
e-mail: kunikawa@cc.utsunomiya-u.ac.jp

熱方程式の解に対するリウヴィル型の定理を導けるような勾配評価を初めて導出したのはSouplet-Zhang [6] であり, これが2006年のことであった. 彼らは, 熱方程式の解に対して, 空間方向のみの勾配評価を適切な増大度条件のもとで導出している. 1975年のCheng-Yauの話から30年近く経過しているが, これにはいくつか理由が考えられる:

- 空間方向だけの勾配評価 (space-only gradient estimate) を得るには, 真に新しい手法が必要であった.
- 勾配評価を行うには, 最大値原理を用いることが一般的だが, 考えているのは非コンパクト領域であるため, 直接的にはうまくいかない. そこで時空のカットオフ関数をうまく構成し, デリケートな議論を行う必要があった.
- そもそも考えている設定において, 熱方程式の正値古代解として非自明なものが存在するので, リウヴィル型の定理が成り立つような適切な設定が不明であった.

非自明な例は後で紹介することにして, ひとまずSouplet-Zhangによる勾配評価を紹介する. Li-Yauと同じ設定 ($\mathrm{Ric} \geq -K, K \geq 0$) で, 熱方程式の正値解 $u : Q_{R,T}(x_0, t_0) \to \mathbb{R}$ を考える. このとき

$$\frac{|\nabla u|}{u} \leq C_n \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{\sqrt{T}} + \sqrt{K} \right) \left(1 + \log \frac{A}{u} \right) \quad \text{in} \quad Q_{R/2,T/4}(x_0, t_0)$$

が成り立つ. ただし, $A = A_{R,T} = \sup_{Q_{R,T}(x_0,t_0)} u$. 彼らはこの (空間方向だけの) 勾配評価において, $R, T \to \infty$ とすることにより, 非負リッチ曲率 ($K = 0$) を持つ完備リーマン多様体上の熱方程式の古代解に対するリウヴィル型の定理を示した:

(a1) 熱方程式の正値古代解 u が増大度条件

$$u(x, t) = \exp\left[o(d_g(x) + \sqrt{|t|})\right] \quad \text{near infinity}$$

を満たすなら, u は定数関数である.

(b1) 熱方程式の (正値とは限らない) 古代解 u が増大度条件

$$u(x, t) = o(d_g(x) + \sqrt{|t|}) \quad \text{near infinity}$$

を満たすなら, u は定数関数である.

ここに, d_g は (M, g) 上の $x_0 \in M$ からの距離関数である. Yauによる調和関数に対するリウヴィルの定理との一番の違いは, 熱方程式の場合には解に増大度条件が課されているという点である. この増大度条件が技術的な仮定ではなく, 本質的なものであることが, 次の2つの例よりわかる.

例 (a1) $M = \mathbb{R}$ とする. このとき $u(x, t) = e^{x+t}$ は $M = \mathbb{R}$ 上の熱方程式の非自明な正値古代解である. もちろん (a1) の増大度条件は満たしていない. これにより, (a1) の増大度条件が空間方向にシャープであることがわかる.

(b1) $M = \mathbb{R}$ とする. このとき $u(x, t) = x$ は $M = \mathbb{R}$ 上の熱方程式の非自明な解, 特に調和関数である. これは (b1) の増大度条件を満たさない. これにより, (b1) の増大度条件も空間方向にシャープであることがわかる.

2. 主定理

本講演では, Souplet-Zhang による空間方向だけの勾配評価及びリウヴィル型の定理を**リーマン計量が時間依存する設定**のもとで考察したものを紹介する. リーマン計量が時間依存する設定というのは, $(M, g(t))$ がリッチフロー $\partial_t g = -2\mathrm{Ric}(g(t))$ を満たすことを想定してはいるが, ここではより一般の状況を扱う.

Cheng-Yau では $B_R(x_0)$ 上の関数 $u(x)$ を, Souplet-Zhang では $Q_{R,T}(x_0, t_0)$ 上の関数 $u(x,t)$ を考えていた. ここで, $B_R(x_0) = \{x \mid d_g(x) \leq R\}$ は通常のリーマン距離関数 $d_g(x)$ により定義されており, 議論の中で $d_g(x)$ に関する計算は避けられない.

今回我々は, 時間依存するリーマン計量 $g(t)$ を考えるので, それに伴ってリーマン距離関数も時間依存する: $d_{g(t)}(x)$. たったこれだけのことなのだが, 実は Souplet-Zhang の議論はリーマン距離関数が時間依存してしまうと, 途端にうまくいかなくなる. 最大の問題は, リーマン距離関数の時間微分 $\partial_t d_{g(t)}(x)$ の評価である. 例えば, $g(t)$ がリッチフローを満たしているとき, $\partial_t d_{g(t)}(x)$ を計算すると, Ric が現れるのだが, これは我々が想定している設定 $\mathrm{Ric} \geq -K$ だけではうまく処理できないのである. ただし, $(M, g(t))$ が $|\mathrm{Ric}| \leq K$ を満たすことを仮定すれば, Souplet-Zhang と同様の勾配評価を得られる. それを行ったのが, Bailesteanu-Cao-Pulemotov [1] である. ところが, Bailesteanu-Cao-Pulemotov の勾配評価からは, 意味のあるリウヴィル型の定理を導出することはできない. なぜなら, $|\mathrm{Ric}| \leq K$ を仮定するので, これまで通り $K = 0$ とすると $\mathrm{Ric} \equiv 0$ となってしまい, これではリッチフローを考える意味がなくなってしまうからである.

我々のやるべきことは, 計量が時間依存する場合に, それに沿った熱方程式の古代解に対してリウヴィル型の定理が成り立つような適切な設定を見つけることである. そのために我々が着目したのは, Perelman による簡約幾何, 特に簡約距離である. Perelman の簡約幾何では, 時間パラメーターは $\tau = -t$ を用いることが一般的なので, 以後 τ を用いる. これにより, リッチフローや熱方程式において符号が逆転することに注意しておく (もちろん本質的には同じものである). この後紹介する主定理の最大の貢献は, 通常のリーマン距離ではなく, Perelman の簡約距離を用いると, Souplet-Zhang の議論がうまくいくことを指摘したことである. 簡約距離を用いると, 時空の比較幾何が適用でき, これにより通常の距離関数の時間微分 $\partial_t d_{g(t)}(x)$ の評価を避けられるのである.

以下, $(M^n, g(\tau))$ を (リッチフローとは限らない) 時間依存するリーマン多様体とし, $\tau \in [0, \infty)$ とする. そして $h := \frac{1}{2}\partial_\tau g$, $H := \mathrm{tr}_g h$ とおく. 時空の基点 $(x_0, 0)$ を固定し, $\gamma(0) = x_0, \gamma(x_0) = x \in M$ であるような曲線 $\gamma : [0, \tau] \to M$ を考えると, γ の $\mathcal{L}$-弧長と呼ばれるものが定義される (今回は明示しない). $\mathcal{L}$-弧長の下限を達成するような曲線 γ を $\mathcal{L}$-測地線と呼び, その下限のことを L-距離 $L(x, \tau)$ という. 適切な仮定のもと, この下限を達成する曲線 γ は必ず存在するのであるが, 我々は常にそのような状況を考えることにする (これはそんなに強い仮定ではない). 時空の基点 $(x_0, 0)$ から時空の点 (x, τ) への簡約距離は次のように定義される:

$$\ell(x, \tau) = \frac{1}{2\sqrt{\tau}} L(x, \tau).$$

計量が時間依存しない場合 $(g(\tau) \equiv 0)$ には, $\ell(x, \tau) = d_g(x)^2/4\tau$ である. もう少し一般的な状況でも, 簡約距離はリーマン距離を 2 乗したものとおおよそ等しいことが知られている. このことを参考にして, リーマン距離関数 $d_{g(\tau)}(x)$ の代わりに次のような関数

を考える:

$$\mathfrak{d}(x,\tau)=\sqrt{4\tau\ell(x,\tau)}.$$

実は一般には $\ell(x,\tau)\geq 0$ とは限らないのだが, $H=\mathrm{tr}_g h\geq 0$ であれば $\ell(x,\tau)\geq 0$ となり, $\mathfrak{d}(x,\tau)$ は問題なく定義される. あとで紹介する主定理ではそのような設定にしていることに注意してもらいたい.

主定理の紹介をする前にもう少し準備が必要である. M 上のベクトル場 V(時間依存してもよい) に対して, $\mathcal{D}(V)$ と $\mathcal{H}(V)$ を次のように定義する:

$$\mathcal{D}(V):=-\partial_\tau H-\Delta H-2|h|^2+\mathrm{div}h(V)-2g(\nabla H,V)+2\mathrm{Ric}-2h(V,V),$$
$$\mathcal{H}(V):=-\partial\tau H-\frac{H}{\tau}-2g(\nabla H,V)+2h(V,V).$$

$\mathcal{D}(V)$ は Müller, $\mathcal{H}(V)$ は Hamilton によりそれぞれ導入された量であり, 幾何学的フロー (特にリッチフロー) の研究に用いられた.

我々は簡約距離, $\mathcal{D}(V)$, そして $\mathcal{H}(V)$ を考察し, 時空の比較幾何を適用することにより, 自然な設定のもと Souplet-Zhang 型の勾配評価を導出した.

主定理 1 (K.-Sakurai [3]). $K\geq 0$ とし, $(M,g(\tau))_{\tau\in[0,\infty)}$ を $\mathrm{Ric}\geq h+Kg$ を満たす完備リーマン多様体の族とする. さらに M 上の任意のベクトル場 V に対して

$$\mathcal{D}(V)\geq -2K(H+|V|^2),\quad \mathcal{H}(V)\geq -H/\tau,\quad H\geq 0$$

を仮定する. $u:M\times[0,\infty)\to\mathbb{R}$ を $(M,g(\tau))$ に沿った熱方程式 $\partial_{g(\tau)}u=-\Delta_{g(\tau)}u$ の正値解とする.

$$Q_{R,T}:=\{(x,\tau)\in M\times(0,T]\mid \mathfrak{d}(x,\tau)\leq R\}$$

と定め, $Q_{R,T}$ 上で $0<u\leq A$ とする. このとき

$$\frac{|\nabla u|}{u}\leq C_n\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{\sqrt{T}}+\sqrt{K}\right)\left(1+\log\frac{A}{u}\right)\quad \text{in}\quad Q_{R/2,T/4}$$

が成り立つ.

主定理 1 において, $K=0$ として, $R,T\to\infty$ とすれば, Souplet-Zhang 型のリウヴィル型定理を得る.

主定理 2 (K.-Sakurai [3]). $(M,g(\tau))_{\tau\in[0,\infty)}$ を $\mathrm{Ric}\geq h$ を満たす完備リーマン多様体の族とし, さらに任意の V に対して $\mathcal{D}(V)\geq 0$, $\mathcal{H}(V)\geq -H/\tau$, $H\geq 0$ を仮定する. このような時間依存するリーマン計量 $g(\tau)$ に関する熱方程式 $(\partial_\tau u=-\Delta_{g(\tau)}u)$ について以下が成り立つ:

(a2) 熱方程式の正値古代解 u が増大度条件

$$u(x,\tau)=\exp(o(\mathfrak{d}(x,\tau)+\sqrt{\tau}))\quad \text{near infinity}$$

を満たすならば, u は定数関数である.

(b2) 熱方程式の (正値とは限らない) 古代解 u が増大度条件

$$u(x,t)=o(\mathfrak{d}(x,\tau)+\sqrt{\tau})\quad \text{near infinity}$$

を満たすなら, u は定数関数である.

注意. (A) リーマン計量が時間に依存しない場合, すなわち $h=0$ の場合には, 我々の設定は $\mathrm{Ric}\geq 0$ を考えていることになる. さらにこの場合, 主定理のすべての仮定は自動的に満たされる. またすでに述べたように $\mathfrak{d}(x,\tau)=d_g(x)$ である. したがって我々の主定理は, Souplet-Zhang によるリウヴィル型の定理を完全に含むものとなっている. この意味で, 主定理 2 における増大度条件はいずれも空間方向にシャープである.

(B) リッチフロー, すなわち $\mathrm{Ric}=h$ を考えてみる. さらに $(M,(g(\tau)))$ の曲率作用素 $\mathrm{Rm}_{g(\tau)}$ が時間によらず非負かつ (上に) 有界と仮定する. この状況でも主定理の仮定がすべて満たされるので, リウヴィル型の定理を得ることができる. 念のため注意しておくと, Rm の上からの有界性は, 勾配評価に現れる定数 (つまり K) には直接影響しない.

(C) 講演では熱方程式を扱ったが, ターゲットを一般の (時間に依存しない) リーマン多様体へ拡張し, 調和写像流を考えることも可能である. 実は, ターゲットを一般化すること自体に困難はない. しかし, 特にターゲットが正曲率の場合, これまで適切な増大度条件のもとでのリウヴィル型定理は存在しなかった. 櫻井氏との最新の共同研究 [4] では, この点に関して新たな勾配評価を導出し, その帰結として増大度条件付きのリウヴィル型定理を得ることに成功した. この結果は, これまでに知られていた調和写像及びそのフローに関するリウヴィル型定理を改良したものになっている.

参考文献

[1] M. Bailesteanu, X. Cao and A. Pulemotov, *Gradient estimates for the heat equation under the Ricci flow*, J. Funct. Anal. **258** (2010), no. 10, 3517–3542.

[2] S. Y. Cheng and S. T. Yau, *Differential equations on Riemannian manifolds and their geometric applications*, Comm. Pure Appl. Math. **28** (1975), no. 3, 333–354.

[3] K. Kunikawa and Y. Sakurai, *Liouville theorem for heat equation along ancient super Ricci flow via reduced geometry*, preprint, arXiv:2005.04882.

[4] K. Kunikawa and Y. Sakurai, *Liouville theorem for harmonic map heat flow along ancient super Ricci flow via reduced geometry*, preprint, arXiv:2104.05191.

[5] P. Li and S. T. Yau, *On the parabolic kernel of the Schrödinger operator*, Acta Math. **156** (1986), 153–201.

[6] P. Souplet and Q.S. Zhang, *Sharp gradient estimate and Yau's Liouville theorem for the heat equation on noncompact manifolds*, Bull. London Math. Soc. **38** (2006), no. 6, 1045–1053.