カルタン埋めこみの安定性について

法政大学・理工学部　間下克哉

本稿では，木村太郎氏（鶴岡工業高等専門学校）との共同研究によって得られた，位数 4 の自己同型が定めるカルタン埋込みの安定性についての結果について述べる．

コンパクト対称空間の全測地的部分多様体の安定性についての研究は Chen-Leung-Nagano [1] により始められた．Ohnita [7] は Chen-Leung-Nagano が行ったヤコビ微分作用素の定式化を正確なものとして，Helgason 球と呼ばれるコンパクト対称空間内の全測地的部分多様体の安定性を調べた．Ikawa [2] は，Ohnita によるヤコビ微分作用素の記述を，一般的な等質極小部分多様体に対して得ている．

σ をコンパクト・リー群 G 上の対合的自己同型，K を σ により固定される G の元全体のなす閉部分群とする．このとき写像 $G \to G$; $g \mapsto g\sigma(g^{-1})$ は，対称空間 G/K の G への埋込み

$$\Psi_\sigma : G/K \longrightarrow G; g\,k \longmapsto g\,\sigma(g^{-1})$$

を引き起こす．Ψ_σ を σ が定める**カルタン埋込み**という．Mashimo は，[5] において Ohnita の結果を用いて対合的自己同型が定めるカルタン埋込みで安定なものを分類し，[6] において Ikawa の結果を用いて，位数 3 の自己同型が定めるカルタン埋込みで安定なものを分類した．今回の研究においても Ikawa の結果を用いる．

1　極小はめ込みの安定性

$\varphi : (M, g) \to (N, h)$ を，リーマン多様体の極小等長はめ込みとする．すべての変分 $(M, g) \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to (N, h); (p, t) \mapsto \varphi_t(p)$ に対して

$$d^2/dt^2\big|_{t=0} \int_M \varphi_t^* h \geq 0.$$

となるとき φ は**安定**であるという．

変分ベクトル場 $d/dt|_{t=0}\,\varphi_t(p)$ の法成分を ν とするとき

$$\mathcal{J} = -\Delta^\perp + \overline{R} - \tilde{A}$$

として

$$d^2/dt^2\big|_{t=0} \int_M \varphi_t^* h = \int_M h(\mathcal{J}(\nu), \nu).$$

が成り立つ．$\mathcal{J}$ を**ヤコビ微分作用素**という．

2　外部自己同型

本節では，コンパクト単純リー群上の外部自己同型について簡単に述べる．

$\tilde{\mathfrak{g}}$ を外部自己同型を持つ複素単純リー環とし，ν を $\tilde{\mathfrak{g}}$ の Dynkin 図形の自己同型から誘導される $\tilde{\mathfrak{g}}$ の外部自己同型とする．

ν の位数を d とし，ν による $\tilde{\mathfrak{g}}$ の固有空間分解を

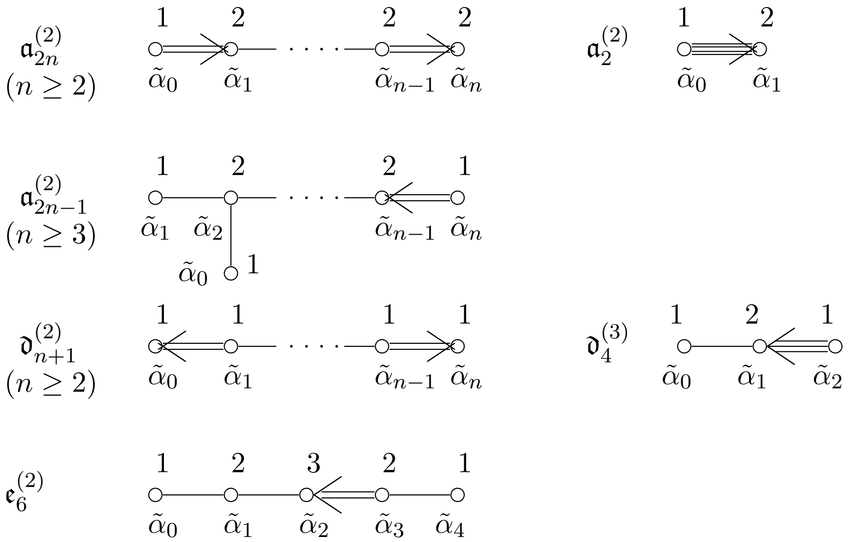
$$\tilde{\mathfrak{g}}_\nu(j) = \{X \in \tilde{\mathfrak{g}} \mid \nu(X) = \exp(2\pi j\sqrt{-1}/d)X\} \quad (j \in \mathbb{Z})$$

とする．

$\tilde{\mathfrak{g}}_\nu(0)$ のカルタン部分環 $\tilde{\mathfrak{h}}$ をとり，$\tilde{\mathfrak{g}}_\nu(0)$ の $\tilde{\mathfrak{h}}$ に関するルート系の単純ルートの全体を $\Pi = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_r\}$ とし，$\tilde{\mathfrak{g}}_\nu(0)$ の $\tilde{\mathfrak{g}}_\nu(0)$ への作用の最低ウェイトを α_0 とする．

α_0 に対するウェイトベクトルを X_0，$\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ に対するルートベクトルを X_1，$\cdots$，X_r とすると，$\{X_0, X_1, \cdots, X_r\}$ は $\tilde{\mathfrak{g}}$ を張る．

$-\alpha_0$ を α_1，$\cdots$，α_r の一次結合で表す; $-\alpha_0 = \sum_{i=1}^{r} a_i\alpha_i$．$\alpha_0$，$\alpha_1$，$\cdots$，$\alpha_r$ から Dynkin 図形を作るのと同様の方法で図形を作成し，$a_0 = 1$ として各頂点に係数 a_i を追記する．



$\tilde{\mathfrak{g}}$ の外部自己同型 σ に対して，$H \in \mathfrak{h}$ および Dynkin 図形の自己同型から誘導れる外部自己同型で

$$\sigma = \exp(ad_{2\pi H}) \circ \nu = \nu \circ \exp(ad_{2\pi H})$$

となるものが存在する ([8])．上記の分解を用いて

$$\begin{cases} \sigma(X_0) = \exp(2\pi\sqrt{-1}/d)\exp(-2\pi\sqrt{-1}\langle\alpha_0, H\rangle)X_0, \\ \sigma(X_1) = \exp(2\pi\sqrt{-1}\langle\alpha_1, H\rangle)X_1, \\ \qquad \cdots \\ \sigma(X_n) = \exp(2\pi\sqrt{-1}\langle\alpha_n, H\rangle)X_n. \end{cases} \tag{1}$$

となる．

σ の位数を k とし ω を 1 の原始 k 乗根とするとき，(1) から

$$\sigma(X_i) = \omega^{s_i} X_i \quad (0 \leq i \leq r)$$

となる整数 s_0, s_1, $\cdots$, s_n $(0 \leq s_0, s_1, \cdots, s_n < k)$ が存在する．σ を $(\nu; s_0, s_1, \cdots, s_n)$ 型の外部自己同型という．

3　等質ベクトル束の不変微分作用素

E を，等質空間 G/K 上の等質ベクトル束とする．原点 $o = eK$ におけるファイバーを E_0 とし，K の (G, E_0) への作用を $k \cdot (g, v) = (gk, k^{-1}v)$ によって定める．E を，K の (G, E_0) への作用によって定まる同値関係による商空間 $G \times_K E_o$ と同一視する．

E の切り口 φ に対して，

$$\varphi \longmapsto \tilde{\varphi}; \quad \tilde{\varphi}(g) = (g_*)^{-1}(\varphi(gK))$$

によって E_0-値関数 $\tilde{\varphi}$ を定める．$\tilde{\varphi}$ は K-同変，すなわち

$$\tilde{\varphi}(gk) = k^{-1}\, \tilde{\varphi}(g) \quad (g \in G, k \in K) \tag{2}$$

を満たす．逆に，G の上で定義された E_0 に値をもつ K-同辺関数 $\tilde{\varphi}$ に対して

$$G \longrightarrow G \times E_0\,;\, g\,K \longmapsto (g, \tilde{\varphi}(g))$$

により定められる $G \times E_0$-値関数は E の切り口を誘導する．

G の複素規約表現の同値類の全体を $\hat{G}$ で表す．また，$\gamma \in \hat{G}$ に属する表現の表現空間を $V^G(\gamma)$ で表す．$V^G(\gamma)$ から E_0 への，K-同辺線形写像全体の集合を $\mathrm{Hom}_K(V^G(\gamma), E_0)$ で表し，$v \otimes L \in V^G(\gamma) \otimes \mathrm{Hom}_K(V^G(\gamma), E_0)$ に対して，G 上の E_0-値関数 $A_\gamma\,(v \otimes L)$ を

$$A_\gamma\,(v \otimes L)\,(g) = L(\gamma(g^{-1})(v))$$

で定めると，$A_\gamma\,(v \otimes L)$ は (2) を満たす．

Theorem 3.1

$$\Gamma(E) = \sum_{\gamma \in \hat{G}} A_\gamma \left(V^G(\gamma) \otimes \mathrm{Hom}_K(V^G(\gamma), E_0)\right)$$

$U(\mathfrak{g})$ を $\mathrm{Lie}(G) = \mathfrak{g}$ の普遍包絡環とする．$A \in \mathrm{Hom}(E_0, E_0)$，$X \in \mathfrak{g}$ とし，K 同変関数 $\tilde{\varphi} : G \to E_0$ に対する作用

$$(A \otimes X)(\tilde{\varphi})(g) = d/dt|_{t=0}\, A(\tilde{\varphi}(\exp(-tX)g))$$

は，$\mathrm{Hom}(E_0, E_0) \otimes U(\mathfrak{g})$ に拡張する．K の $\mathrm{Hom}_K(E_0, E_0) \otimes U(\mathfrak{g})$ への作用を

$$k \cdot (A \otimes X) = (\mathrm{Ad}(k) \circ A \circ \mathrm{Ad}(k^{-1})) \otimes \mathrm{Ad}(k)X$$

で定め，K-不変元の全体を $(U(\mathfrak{g})\otimes \mathrm{Hom}_K(E_0,E_0))^K$ と書く．

$V^G(\gamma)\otimes \mathrm{Hom}_K(V^G(\gamma),E_0)$ の元を E の切り口と同一視するとき，ヤコビ微分作用素を $(U(\mathfrak{g})\otimes \mathrm{Hom}_K(E_0,E_0))^K$ の元として表すことができる．

$X\in\mathfrak{k}$ のとき

$$\mathrm{ad}_X\otimes I = I\otimes X \tag{3}$$

が成り立つことに注意しておく．

Ikawa ([2]) は，コンパクト等質空間の等質部分多様体の Jacobi 微分作用素を，一般的な設定のもとで記述している．その結果を，コンパクト・リーマン対称空間の等質部分多様体に限定して述べると以下のようになる

Theorem 3.2 (U,L) をコンパクト・リーマン対称対として，$\mathfrak{l}=\mathrm{Lie}(L)$，$\mathfrak{p}=\mathfrak{l}^\perp$ とおく．

$\rho: G\to U$ をコンパクト・リー群 G から U への準同型，K を G の閉部分群とし，$G/K\to U/L; g\mapsto \rho(g)L$ が埋め込みであると仮定する．

$\mathfrak{m}$ を $\rho_*(\mathfrak{g})_\mathfrak{p}$ の $\mathfrak{p}$-成分とし, $\mathfrak{m}^\perp$ を $\mathfrak{m}$ の直交補空間とする．

$\mathfrak{g}=\mathrm{Lie}(G)$，$\mathfrak{k}=\mathrm{Lie}(K)$ として，$\{X_i\}$ を $\mathfrak{k}^\perp$ の正規直交基底とする．$G/K\to U/L; g\mapsto \rho(g)L$ が極小埋め込みであるときヤコビ微分作用素は

$$J_1\varphi=\sum[\rho_*X_i, X_i\varphi]_{\mathfrak{m}^\perp}+\sum[\rho_*X_i,[\rho_*X_i,X_i\varphi]_{\mathfrak{m}^\perp}]_{\mathfrak{m}^\perp}$$

として

$$\mathcal{J}=-\sum I\otimes X_i^2-2J_1+\sum(\mathrm{ad}_{X_i})^2\otimes I$$

となる．

カルタン埋め込みの場合には $J_1=0$ となることに注意しておく．

4 安定性

G をコンパクト単純リー群，σ を G の有限位数 k の自己同形とし $K=\{u\in G|\sigma(u)=u\}$ とおく．σ を $\mathfrak{g}$ の複素化 $\mathfrak{g}^\mathbb{C}$ の上に拡張し，$\mathfrak{g}^\mathbb{C}$ を固有空間

$$\mathfrak{g}_j^\mathbb{C}=\left\{X\in\mathfrak{g}^\mathbb{C}|\sigma(X)=\exp(2\pi j\sqrt{-1}/k)X\right\}$$

に分解する．$\mathfrak{g}^\mathbb{C}$ の $\mathfrak{g}$ に関する共役写像を τ とすると $\tau\left(\mathfrak{g}_j^\mathbb{C}\right)=\mathfrak{g}_{k-j}^\mathbb{C}$ となり

$$\mathfrak{k}=\{X\in\mathfrak{g}|\sigma(X)=X\}=\mathfrak{g}_0^\mathbb{C}\cap\mathfrak{g}$$

が成り立つ．

$$\mathfrak{m}_i=\left(\mathfrak{g}_i^\mathbb{C}\oplus\mathfrak{g}_{k-i}^\mathbb{C}\right)\cap\mathfrak{g}\quad(0\le i\le[k/2])$$

とおくと,

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{k}\oplus\sum_{1\le k\le[k/2]}\mathfrak{m}_i\quad(\text{直交直和})$$

となる．

$\langle , \rangle$ を $\mathfrak{g}$ の $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$-不変内積とし，$\langle , \rangle$ を拡張した G 上の両側不変計量を g で表す．

$T_oG/K = \mathfrak{m}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{m}_{[k/2]}$ 上の内積 ${\Psi_\sigma}^* g$ と，$\langle , \rangle$ は一致しないことに注意する．実際，

$$
{\Psi_\sigma}^* g = \left(2 \sin \frac{\pi\, i}{k} \right)^2 \langle , \rangle \quad \mathrm{on}\ \mathfrak{m}_i
$$

が成り立つ．

$\dim \mathfrak{m}_i = n_i$ $(0 \leq i \leq [n/2])$ とおく．$X_1^{(i)}$, $\cdots$, $X_{n_i}^{(i)}$ を，$\mathfrak{k}$ ($i = 0$ のとき) または $\mathfrak{m}_i$ ($1 \leq i \leq [n/2]$ のとき) の $\langle , \rangle$ に関する正規直交基底とし

$$
\begin{aligned}
C_{\mathfrak{m}_i} &= \sum_{j=1}^{n_i} \left(X_j^{(i)} \right)^2 \in U(\mathfrak{g}) \\
C_{\mathfrak{g}} &= C_{\mathfrak{k}} + C_{\mathfrak{m}_1} + \cdots + C_{\mathfrak{m}_{[n/2]}}
\end{aligned}
$$

とする．

(3) から

$$
I \otimes \mathrm{ad}_{C_{\mathfrak{k}}} = C_{\mathfrak{k}} \otimes I
$$

が成り立つことに注意すると，σ の位数が 2 または 3 のとき，Jacobi 微分作用素の表示は以下のようになる．

- $\mathrm{ord}(\sigma) = 2$ のとき

$$
\mathcal{J} = -\frac{1}{4} I \otimes C_{\mathfrak{m}_1} + \frac{1}{4} \mathrm{ad}_{C_{\mathfrak{m}_1}} \otimes I = -\frac{1}{4} I \otimes C_{\mathfrak{g}} + \frac{1}{4} \mathrm{ad}_{C_{\mathfrak{g}}} \otimes I
$$

- $\mathrm{ord}(\sigma) = 3$ のとき

$$
\mathcal{J} = -\frac{1}{3} I \otimes C_{\mathfrak{m}_1} + \frac{1}{3} \mathrm{ad}_{C_{\mathfrak{m}_1}} \otimes I = -\frac{1}{3} I \otimes C_{\mathfrak{g}} + \frac{1}{3} \mathrm{ad}_{C_{\mathfrak{g}}} \otimes I
$$

上記の表現から，σ の位数が 2 または 3 のとき，カルタン埋込み Ψ_σ が不安定であることと，$\dim \mathrm{Hom}_K(\mathfrak{k}^\perp, V^G(\gamma)) > 0$ および $C_{\mathfrak{g}}|_{ad} < C_{\mathfrak{g}}|_{V^G(\gamma)}$ を満たす $\gamma \in \hat{G}$ が存在することが同値であることがわかる．ここで，$V^G(\gamma)$ の最高ウェイトも γ で表すとき 2ρ を $\mathfrak{g}$ のすべての正ルートの和として

$$
C_{\mathfrak{g}}|_{V^G(\gamma)} = -\langle \gamma + 2\rho, \gamma \rangle. \tag{4}
$$

である．

σ の位数が 4 以上の場合，カルタン埋込みによる誘導計量は normal homogeneous metric ではなくなり，Jacobi 微分作用素の表示も複雑になるが，σ の位数が 4 のとき，対合的自己同型 σ^2 が固定する元全体のなすリー部分環

$$
\mathfrak{g}' = \mathfrak{k} + \mathfrak{m}_2 = \{ X \in \mathfrak{g} \mid \sigma^2(X) = X \}
$$

のカシミール元

$$
C_{\mathfrak{g}'} = C_{\mathfrak{k}} + C_{\mathfrak{m}_2}
$$

と $C_{\mathfrak{g}}$ を用いて Jacobi 微分作用素が記述できる．

$$\begin{aligned}\mathcal{J} =& -\frac{1}{4} I \otimes C_{\mathfrak{m}_2} - \frac{1}{2} I \otimes C_{\mathfrak{m}_1} + \frac{1}{4}\mathrm{ad}_{C_{\mathfrak{m}_2}} \otimes I + \frac{1}{2}\mathrm{ad}_{C_{\mathfrak{m}_1}} \otimes I \\ =& \frac{1}{2}\left(\mathrm{ad}_{C_{\mathfrak{g}}} \otimes I - I \otimes C_{\mathfrak{g}}\right) - \frac{1}{4}\left(\mathrm{ad}_{C_{\mathfrak{g}'}} \otimes I - I \otimes C_{\mathfrak{g}'}\right).\end{aligned}$$

Theorem 4.1 G を単連結なコンパクト単純リー群とする．σ を G の上の位数 4 の自己同型とし $K = \{k \in G \mid \sigma(g) = g\}$ とする．σ が定めるカルタン埋込み Ψ_σ が極小埋込みであるもの，およびそれらの安定性は以下の表のとおりである．

$\mathfrak{g}$	$\mathfrak{k}$	stability
$\mathfrak{su}(4n)$	$\mathfrak{a}_n \oplus \mathfrak{a}_n \oplus \mathfrak{a}_n \oplus \mathfrak{a}_n \oplus \mathbb{R}^3$	unstable
$\mathfrak{sp}(n)$	$\mathfrak{c}_i \oplus \mathfrak{a}_{j-i-1} \oplus \mathfrak{c}_{n-j} \oplus \mathbb{R}^3$ $(1 \leq i < j)$	unstable
$\mathfrak{so}(2n)$	$\mathfrak{a}_{n-3} \oplus \mathbb{R}^3$	unstable
$\mathfrak{so}(2n)$	$2\mathfrak{d}_i \oplus \mathfrak{a}_{n-2i+1} \oplus \mathbb{R}$	unstable
$\mathfrak{e}_6$	$2\mathfrak{a}_1 \oplus \mathfrak{a}_3 \oplus \mathbb{R}$	unstable
$\mathfrak{e}_7$	$2\mathfrak{a}_1 \oplus \mathfrak{d}_4 \oplus \mathbb{R}$	unstable
$\mathfrak{e}_7$	$\mathfrak{a}_3 \oplus \mathfrak{a}_3 \oplus \mathfrak{a}_1$	stable
$\mathfrak{e}_8$	$\mathfrak{a}_1 \oplus \mathfrak{a}_7$	stable
$\mathfrak{e}_8$	$\mathfrak{d}_5 \oplus \mathfrak{a}_3$	Stable
$\mathfrak{f}_4$	$\mathfrak{a}_3 \oplus \mathfrak{a}_1$	unstabla

表 1: 内部自己同型の場合

$\mathfrak{g}$	$\mathfrak{k}$	stability
$\mathfrak{a}_2$	$\mathfrak{a}_1$	
$\mathfrak{a}_{2n}$ $(n > 1)$	$\mathfrak{c}_p \oplus \mathfrak{b}_{n-p}$ $(1 \leq p \leq n)$	stable
$\mathfrak{a}_{2n-1}$ $(n > 1)$	$\mathfrak{c}_{n-1} \oplus \mathbb{R}$	unstable
	$\mathfrak{d}_p \oplus \mathfrak{c}_{n-p}$ $(2 \leq p \leq n-1)$	stable
$\mathfrak{d}_{n+1}$ $(n > 1)$	$\mathfrak{b}_p \oplus \mathfrak{a}_{n-2p-1} \oplus \mathfrak{b}_p \oplus \mathbb{R}$	unstable
	$\mathfrak{a}_{n-1} \oplus \mathbb{R}$	unstable
$\mathfrak{e}_6$	$\mathfrak{a}_1 \oplus \mathfrak{b}_3$	unstable
	$\mathfrak{a}_3 \oplus \mathfrak{a}_1$	unstable

表 2: 外自己同型の場合

K の中心が疎でないとき，カルタン埋込み Ψ_σ は極小埋込みになったとしても不安定になることがわかる．そのことから，カルタン埋込み Ψ_σ が安定な極小埋込みになるならば，σ の位数が 6 以下であることがわかる．

カシミール元の固有値は (4) で求められるから，ヤコビ微分作用素がリー環のカシミール元だけを用いて記述できると具合が良い．位数が 6 の自己同型 σ が定めるカルタン埋込みについても σ^3 および σ^2 のイソトロピー部分環

$$\mathfrak{g}' = \mathfrak{k} + \mathfrak{m}_2, \quad \mathfrak{g}'' = \mathfrak{k} + \mathfrak{m}_3$$

のカシミール元を利用して，ヤコビ微分作用素を以下のように表示することができ，これを利用して安定性を調べることができる．

$$\mathcal{J} = \left(\mathrm{ad}_{C_{\mathfrak{g}}} \otimes I - I \otimes C_{\mathfrak{g}}\right) - \frac{1}{3}\left(\mathrm{ad}_{C_{\mathfrak{g}'}} \otimes I - I \otimes C_{\mathfrak{g}'}\right) - \frac{3}{4}\left(\mathrm{ad}_{C_{\mathfrak{g}''}} \otimes I - I \otimes C_{\mathfrak{g}''}\right)$$

σ の位数が 5 で，カルタン埋込みが安定な極小埋込みになる可能性があるのは $E_8/(A_4 \otimes A_4) \to E_8$ のみである．しかし，このとき，ヤコビ微分作用素をリー環のカシミール元で記述することができないので，極小埋込みであることはわかっているが，安定性を調べるのはかなり難しそうに思われる．

参考文献

[1] B. Y. Chan, P. F. Leung and T. Nagano *Totally geodesic submanifolds of symmetric spaces, III*, arXiv:1307.7325v2 [math.DG].

[2] O. Ikawa *Equivariant minimal immersions of compact Riemannian homogeneous spaces into compact Riemannian homogeneous spaces*, Tukuba J. Math. 17(1993), 169–188.

[3] J. A. Jimenez *Riemannian 4-symmetric spaces*, Trans. Amer. Math. Soc., 306(1988), 715–734.

[4] W. G. McKay and J. Patera, *Tables of dimensions, indices, and branching rules for representations of simple Lie algebras*, Lecture Notes in Pure and Applied Math. 69(1981), Marcel Dekker

[5] K. Mashimo *On the Stability of Cartan embeddings of compact symmetric spaces*, Archiv der Math., 58(1992), 500–508

[6] ———, *Cartan Embeddings of Compact Riemannian 3-Symmetric Spaces*, Tokyo J. Math., (1996), 353–364.

[7] Y. Ohnita *On stability of minimal submanifolds in compact symmetric spaces*, Composition Math., 64)1987), 157–189.

[8] J. A. Wolf and A. Gray *Homogeneous spaces defined by Lie group automorphisms, I,II*, J. Differential Geometry, 2(1968), 77–159.