一般化された s 多様体とコンパクト対称三対

大野　晋司 (日本大学)

概要

本稿では, 対称空間の一般化概念である “一般化された s 多様体” の概念を導入し, その具体例をコンパクト対称三対から構成する方法を紹介する. 初めに, 対称空間と関連する諸概念を紹介し, 一般化された s 多様体の定義を紹介する.

次に, 一般化された s 多様体の具体例をいくつか紹介し, コンパクト対称三対から一般化された s 多様体を構成する. 特に, コンパクト対称三対に付随する 2 つの対合で生成される群が無限群である場合に, s 多様体や Γ 対称空間に含まれない一般化された s 多様体の例を構成できる.

最後に, 一般化された s 多様体に極地や対蹠集合の概念を導入し, 幾つかの例について具体的に対蹠集合を決定する.

本稿の内容は, 酒井高司氏, 寺内泰紀氏との共同研究の内容を含む.

1　対称空間とその一般化

Riemann 対称空間の概念は E. Cartan によって定義された概念であり, Euclid 空間, 球面, 実双曲空間, Grassmann 多様体, コンパクト Lie 群などを含むクラスとして盛んに研究が行われてきた. 対称空間の一般化概念はさまざまな方向からなされ, 研究されてきた ([3, 4, 5, 6] など). この節では, 関連する諸概念を紹介した後, 一般化された s 多様体の定義を与える.

Riemann 対称空間は, 各点においてその点を通るすべての測地線の向きを入れ換えるような大域的な等長変換を備えた Riemann 多様体として, 以下のように定義される.

Definition 1. (M, g) を Riemann 多様体とする. 各 $x \in M$ に対して等長変換 $s_x : M \to M$ が定まっていて,

1. $s_x \circ s_x = \mathrm{id}_M$
2. 任意の $x \in M$ に対して, x は s_x の孤立固定点.

を満たすとき, (M, g) を **Riemann 対称空間**と呼ぶ. s_x を M の x における**点対称**と呼ぶ.

Riemann 対称空間がもつ顕著な性質をもとにして, さまざまな形で, Riemann 対称空間の一般化概念を考えることができる.

一般の接続を考え, 測地線の向きを入れ換える affine 変換の存在を仮定した **affine 対称空間**や, 正定値とは限らない擬 Riemann 計量に関する点対称の存在を要請する**擬 Riemann 対称空間**, Riemann 対称空間における点対称がもつ代数的な性質を抽出した**対称空間**がその一例となる. この 3 つはいずれも等質空間としての表示 G/K を持つことが知られている. ここでは特に, 対称空間の定義を紹介する. Riemann 対称空間における点対称が等長変換であること代わりに, 対称空間では, 2 点における点対称の間の関係を仮定することによって定義される.

Definition 2 (Loos, Nagano)**.** M を多様体とする. 各 $x \in M$ に対して微分同相写像 $s_x : M \to M$ が定まっていて,

1. $s_x \circ s_x = \mathrm{id}_M$.
2. 任意の $x, y \in M$ に対して, $s_x \circ s_y = s_{s_x(y)} \circ s_x$.
3. 任意の $x \in M$ に対して, x は s_x の孤立固定点.

を満たすとき, $(M, \{s_x\}_{x \in M})$ を**対称空間**と呼ぶ.

対称空間には, 点対称の構造から標準的な接続 ∇ が定まることが知られている ([7]). さらに, この接続 ∇ に関する曲率テンソル R は平行となる ($\nabla R = 0$). 各点において, この条件 $\nabla R = 0$ を満たす多様体は局所対称空間と呼ばれ, 対称空間の一つの一般化として知られる. 局所対称空間は affine 変換群が推移的に作用するとは限らないため, 等質空間とは限らない.

対称空間の持つ性質から一般化をする方法がある一方で, 点対称の条件を緩めることによって対称空間を一般化する方法も存在する. それが以下に述べる regurar な s 多様体と Γ 対称空間である.

Definition 3 (Kowalski ([3])). M を多様体とする. C^∞ 級写像 $\mu : M \times M \to M$ と各 $x \in M$ に対して, $s_x(y) := \mu(x, y) \quad (y \in M)$ と定める.

次を満たす時 $(M, \{s_x\}_{x \in M})$ を **regular な s 多様体**という.

1. 任意の $x, y \in M$ に対して, $s_x \circ s_y = s_{s_x(y)} \circ s_x$.
2. 各 $x \in M$ について, s_x は微分同相写像.
3. 任意の $x \in M$ に対して, x は s_x の孤立固定点.

Remark 4. 上記の定義は, 対称空間の定義から点対称 s_x が対合であるという条件を取り去ったものである. ([4, 5])

Definition 5 (Lutz ([6])). G を連結 Lie 群, Γ を有限可換群, $\rho : \Gamma \to \mathrm{Aut}(G)$ を単射群準同型写像とする. $F(\rho(\Gamma), G) = \{g \in G \mid \rho(\gamma)(g) = g \ (\gamma \in \Gamma)\}$ とおき, $F(\rho(\Gamma), G)$ の単位元を含む連結成分を $F(\rho(\Gamma), G)_0$ で表す. このとき,

$$F(\rho(\Gamma), G)_0 \subset K \subset F(\rho(\Gamma), G)$$

を満たす $K \subset G$ について, (G, K, Γ, ρ) を **Γ 対称対**と呼び, G/K を **Γ 対称空間**と呼ぶ.

Remark 6. $\Gamma = \mathbb{Z}_2$ のとき, Γ 対称空間 G/K は対称空間となり, $\Gamma = \mathbb{Z}_k$ $(k \in \mathbb{N}, k \geq 2)$ のとき, Γ 対称空間 G/K は regular な s 多様体となる.

[9] では Γ 可換性を除いた定義が与えられている.

対称空間, regular な s 多様体, Γ 対称空間を含むように一般化された s 多様体を定義することができる.

Definition 7. *M を C^∞ 級多様体, Γ を群とする. 各 $x \in M$ に対して群準同型 $\varphi_x : \Gamma \to \mathrm{Diff}(M)$ が定まっていて,*

1. *各 $x, y \in M$, $\gamma, \delta \in \Gamma$,*

$$\varphi_x(\gamma) \circ \varphi_y(\delta) \circ \varphi_x(\gamma)^{-1} = \varphi_{\varphi_x(\gamma)(y)}(\gamma\delta\gamma^{-1}).$$

2. *各 $x \in M$ に対して, x は $\varphi_x(\Gamma)$ の M への作用の孤立固定点.*

3. *各 $\gamma \in \Gamma$ について $\mu_\gamma : M \times M \to M; (x, y) \mapsto \varphi_x(\gamma)(y)$ は C^∞ 級.*

*を満たすとき, $(M, \Gamma, \{\varphi_x\}_{x \in M})$ を**一般化された s 多様体**と呼び, $(\Gamma, \{\varphi_x\}_{x \in M})$ を M の**一般化された s 構造**と呼ぶ.*

Γ は一般の群であり, φ_x の単射性を仮定しない. 次の節で述べるように, Γ 対称空間は一般化された s 多様体になる.

2　一般化された s 多様体の例

この説では, 前節で定義した一般化された s 多様体の例を紹介する. まずは Γ 対称対から一般化された s 構造を定める方法を紹介する.

Proposition 8. (G,K,Γ,ρ) を Γ 対称対とする. $g \in G$ と $\gamma \in \Gamma$ に対して, $\varphi_{gK}(\gamma) \in \mathrm{Diff}(G/K)$ を

$$\varphi_{gK}(\gamma)(g'K) = g\rho(\gamma)(g^{-1}g')K \quad (g' \in G)$$

で定める. このとき, $(\Gamma, \{\varphi_x\}_{x\in G/K})$ は G/K の一般化された s 構造である.

この命題から, Γ 対称空間は一般化された s 多様体となる.

Γ 対称空間の例として, 旗多様体が知られている. 旗多様体は, 次のようにベクトル空間の部分空間の系列として定義される. $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ or $\mathbb{H}$ とする. $n_1 + n_2 + \cdots + n_r < n$ を満たす, $n, n_1, \ldots, n_r \in \mathbb{N}$ に対して, 旗多様体 $F_{n_1,\ldots,n_r}(\mathbb{K}^n)$ を

$$F_{n_1,\ldots,n_r}(\mathbb{K}^n) = \left\{ f = (V_1,\ldots,V_r) \;\middle|\; \begin{array}{l} \{0\} \subset V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_r \subset \mathbb{K}^n \ \text{部分空間} \\ \dim V_i = n_1 + \cdots + n_i \ (i = 1,\ldots,r) \end{array} \right\}$$

で定める. 各 $f = (V_1,\ldots,V_r)$ に対して, $s_{V_i} := 2P_{V_i} - \mathrm{Id}_{\mathbb{K}^n}$ $(i = 1,\ldots r)$ とおく. ただし P_{V_i} は $\mathbb{K}^n$ から V_i への直交射影である. $s_{V_1},\ldots,s_{V_r}$ で生成される群を Γ とおくと, $\Gamma \cong (\mathbb{Z}_2)^r$ となり, この Γ に関して旗多様体 $F_{n_1,\ldots,n_r}(\mathbb{K}^n)$ は Γ 対称空間となり, したがって一般化された s 多様体となる.

また, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ のとき, 旗多様体は Kählar C 空間の構造を持ち, k 対称空間のとなることが知られている. この構造に関して, Kählar C 空間は一般化された s 多様体となる. また. Kählar C 空間は半単純コンパクト Lie 群 G の随伴作用の軌道として, 等質空間表示 G/G_X を持つ. G_X は G のイソトロピー部分群である. G_X の中心を $Z(G_X)$ と表すことにすると, $\Gamma = Z(G_X)$ に対して, G/G_X は一般化された s 多様体の構造をもつことが証明できる. G_X は G の極大トーラスを含むから, $Z(G_X)$ は一般に無限群になる. したがって, $\Gamma = Z(G_X)$ に関する一般化された s 構造について, G/G_X は Γ 対称空間でない一般化された s 多様体の例となる.

次のように, コンパクト対称三対によって一般化された s 構造を定めることによって, 非可換な無限群に関する一般化された s 多様体を構成することができる.

Definition 9. G をコンパクト半単純 Lie 群, θ_1, θ_2 を G の対合的自己同型とする. $(G^{\theta_i})_0 \subset K_i \subset G^{\theta_i} = \{k \in G \mid \theta_i(k) = k\}$ を一つずつ固定する. (つまり, (G,K_1) と (G,K_2) はコンパクト対称対である.) このとき, (G,K_1,K_2) をコンパクト対称三対と呼ぶ

Proposition 10. コンパクト対称三対 (G,K_1,K_2) について, $\{\theta_1,\theta_2\}$ で生成される群を Γ とおき, $H = K_1 \cap K_2$ とおく. $\gamma \in \Gamma, g, h \in G$ について,

$$\varphi_{gH}(\gamma)(hH) = g\gamma(g^{-1}h)H$$

とすれば $(G/H, \Gamma, \{\varphi_x\}_{x\in G/H})$ は一般化された s 多様体.

Proof. $\{\varphi_x\}_{x\in G/H}$ の定め方から, 各 $\gamma \in \Gamma$ について $\mu_\gamma : G/H \times G/H \to M; (x,y) \mapsto$

$\varphi_x(\gamma)(y)$ は C^∞ 級となる．任意の $\gamma, \delta \in \Gamma, g, h \in G$ について，

$$\begin{aligned}
&\varphi_o(\gamma) \circ \varphi_{gH}(\delta) \circ \varphi_o(\gamma)^{-1}(hH) = \varphi_o(\gamma) \circ \varphi_{gH}(\delta)(\gamma^{-1}(h)H) \\
=&\varphi_o(\gamma)(g\delta(g^{-1}\gamma^{-1}(h))H) = \gamma(g\delta(g^{-1}\gamma^{-1}(h)))H \\
=&\gamma(g)\gamma \circ \delta(g^{-1}\gamma^{-1}(h)))H = \gamma(g)(\gamma \circ \delta \circ \gamma^{-1}(\gamma(g)^{-1}h))))H \\
=&\varphi_{gH}(\gamma\delta\gamma^{-1})(hH)
\end{aligned}$$

が成り立つ．また，$g \in G$ について，

$$\begin{gathered}
\varphi_o(\theta_i)(gH) = gH \iff \theta_i(g)H = gH \\
\iff g^{-1}\theta_i(g) \in H = K_1 \cap K_2 \quad (i = 1, 2)
\end{gathered}$$

よって，$g^{-1}\theta_i(g) = \theta_i(g^{-1}\theta_i(g)) = \theta_i(g^{-1})g = (g^{-1}\theta_i(g))^{-1}$ となり．

$$(g^{-1}\theta_i(g))^2 = e$$

が従う．$o = eH$ の十分小さい近傍 U について，$gH \in U$ かつ $\varphi_o(\theta_i)(gH) = gH \quad (i = 1, 2)$ であれば，$g^{-1}\theta_i(g) = e$ を満たす $g \in G$ が存在する．このとき $g \in K_i \quad (i = 1, 2)$ よって，$g \in H$．従って，$gH = o$. o は $\varphi_0(\Gamma)$ の G/H への作用の孤立固定点となる． □

Remark 11.
- $\theta_1 = \theta_2$ の場合，G/H は対称空間となる．
- $\theta_1\theta_2 = \theta_2\theta_1$(あるいは $\theta_1\theta_2$ の位数が有限) の場合，G/H は Γ 対称空間である．
- $\theta_1\theta_2$ の位数が無限の場合は G/H は Γ 対称空間でない一般化された s 多様体．

Corollary 12. (G, K) をコンパクト対称対とする．$g \in G$ について，コンパクト対称三対，$(G, K, \mathrm{I}_g(K))$ を考える．このとき，$G/(K \cap \mathrm{I}_g(K))$ は一般化された s 多様体である．ただし，I_g は g に関する G の内部自己同型である．

Example 13. $G = \mathrm{SO}(n)$ $(n \geq 3)$, $t \in \mathbb{R}$ について，$\theta_1 = \mathrm{I}_{I_{1,n-1}}, \theta_2 = \mathrm{I}_{g_t}\theta_1\mathrm{I}_{g_t}^{-1}$ とおく．
ただし，

$$I_{m,n-m} = \begin{bmatrix} -I_m & 0 \\ 0 & I_{n-m} \end{bmatrix}, g_t = \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & I_{n-2} \end{bmatrix}.$$

$t \notin \pi\mathbb{Z}$ について，コンパクト対称三対 $(G, K_1, K_2) = (\mathrm{SO}(n), \mathrm{SO}(n-1), \mathrm{I}_{g_t}(\mathrm{SO}(n-1)))$ を考える．$t \notin \pi\mathbb{Z}$ について，$K_1 \cap K_2 \cong \mathrm{SO}(n-2)$, $G/K_1 = S^{n-1}, G/K_2 = S^{n-1}$, $G/K_1 \cap K_2 = \mathrm{SO}(n)/\mathrm{SO}(n-2)$ となる．

3 一般化された s 多様体の極地と対蹠集合

Chen-Nagano はコンパクト Riemann 対称空間に対して，極地と対蹠集合の概念を導入し，対蹠集合の濃度の上限として，2-number と呼ばれる不変量を定義した ([1, 2])．対蹠集合はコンパクト Hermite 対称空間の実形の交差としてもあらわれ，2-number はコンパクト連結対称空間のオイラー数とも関係していることが知られている．

この節では，これらの諸概念を一般化された s 多様体に拡張する．また，いくつかの例について極大対蹠集合を決定する．

Definition 14. $(M, \Gamma, \{\varphi_x\}_{x \in M})$ を一般化された s 多様体とする．
- $A \subset M$ が，
$$\varphi_x(\gamma)(y) = y, \quad \varphi_y(\gamma)(x) = x. \quad (x, y \in A, \gamma \in \Gamma)$$
をみたすとき，A を M の**対蹠集合**と呼ぶ．

- M の対蹠集合 A について, A を含む任意の対蹠集合が A と一致するとき, A を M の**極大対蹠集合**と呼ぶ.
- 対蹠集合の濃度の上限を $\#_\Gamma(M)$ で表し, M の**対蹠数**と呼ぶ.
- $\#_\Gamma(M) = \#(A)$ を満たす対蹠集合 A を M の**大対蹠集合**と呼ぶ.

$\Gamma = \mathbb{Z}_2$, つまり M が対称空間であるとき, $\#_\Gamma(M)$ を $\#_2(M)$ と表す.

対称空間 M の部分多様体 N が, その部分多様体の各点における点対称で保存されるとき, N は M の部分空間とよばれる. 部分空間は対称空間となり, 部分空間の対蹠数は外の空間の対蹠数を超えないことが知られている. 一般化された s 多様体に関しても次のように部分空間の概念を定めると, 対蹠数の評価が得られる.

Definition 15. $(M, \Gamma, \{\varphi_x\}_{x\in M})$ を一般化された s 多様体とし, $N \subset M$ を部分多様体とする. 各 $\gamma \in \Gamma$ と $x \in N$ について, $\varphi_x(\gamma)(N) = N$ がなりたつとき, N を M の部分空間と呼ぶ.

Proposition 16. *1.* N を一般化された s 多様体 $(M, \Gamma, \{\varphi_x\}_{x\in M})$ の部分空間とする. このとき, $(N, \Gamma, \{\varphi_x\}_{x\in N})$ は一般化された s 多様体になる.

2. N が M の部分空間であれば, $\#_\Gamma(M) \geq \#_\Gamma(N)$ が成り立つ.

Proof. 各 $\gamma \in \Gamma$ と $x \in N$ について, $\varphi_x(\gamma)|_N \in \mathrm{Diff}(N)$ であるから, φ_x は Γ から $\mathrm{Diff}(N)$ への群準同型を与える. したがって, $(N, \Gamma, \{\varphi_x\}_{x\in N})$ は一般化された s 多様体となる.

$A \subset N$ を N の対蹠集合とすると, A は M の対蹠集合でもある. したがって, N の対蹠集合の濃度の上限は M の対蹠集合の濃度の上限を超えない. □

対称空間の部分空間の顕著な例として極地とよばれる部分空間がある. 極地は点対称の固定点集合の連結成分として定義される. 一般化された s 多様体に関しても同様に次のように定義することができる.

Definition 17. $x \in M$ に対して,

$$F(\varphi_x(\Gamma), M) := \{y \in M \mid \varphi_x(\gamma)(y) = y \quad (\gamma \in \Gamma)\}$$

の連結成分を M の x における極地と呼ぶ. 特に一点からなる極地を極と呼ぶ.

$\{x\}$ は定義から M の x における極である. $\{x\}$ を自明な極と呼ぶ.

Proposition 18. 一般化された s 多様体 $(M, \Gamma, \{\varphi_x\}_{x\in M})$ の各点 $x \in M$ における極地は, M の部分多様体であれば M の部分空間である.

Proof. N を M の $x \in M$ における極地であるとする. 任意の $y \in N$ と $\delta \in \Gamma$ について $\varphi_y(\delta)(N) = N$ であることを示そう. $y \in F(\varphi_x(\Gamma), M)$ から,

$$\varphi_y(\delta) = \varphi_{\varphi_x(\gamma)y}(\delta) = \varphi_x(\gamma)\varphi_y(\delta)\varphi_x(\gamma)^{-1} \qquad (\gamma \in \Gamma)$$

つまり, $\varphi_x(\gamma)\varphi_y(\delta) = \varphi_y(\delta)\varphi_x(\gamma) \quad (\gamma \in \Gamma)$ が従う. このことに注意すると, 任意の $z \in N$ に対して

$$\varphi_x(\gamma) \circ \varphi_y(\delta)(z) = \varphi_y(\delta) \circ \varphi_x(\gamma)(z) = \varphi_y(\delta)(z) \qquad (\gamma \in \Gamma)$$

となり, $\varphi_y(\delta)(N) \subset F(\varphi_x(\Gamma), M)$ が分かった. N の連結性から $\varphi_y(\delta)(N)$ の連結性が従い, $y \in \varphi_y(\delta)(N) \cap N$ だから, $\varphi_y(\delta)(N) \subset N$ となる. 同様に, $\varphi_y(\delta)^{-1}(N) \subset N$ だから, $\varphi_y(\delta)(N) = N$ となり, 結論を得る. □

M が第二可算公理を満たせば, M の $x \in M$ における極地の個数は高々可算なので, 次の定理を得る.

Theorem 19. $x \in M$ について, x を含む大対蹠集合が存在とする．このとき, $F(\varphi_x(\Gamma), M)$ を極地の非交和

$$F(\varphi_x(\Gamma), M) = \bigcup_{i=0} M_i^+$$

で表したとき,

$$\#_\Gamma(M) \leq \sum_{i=0}^{\infty} \#_\Gamma(M_i^+)$$

が成り立つ．

M がコンパクト連結対称空間の場合は次の定理が知られている．

Theorem 20 ([2])**.** $(M, \{s_x\}_{x \in M})$ をコンパクト連結対称空間とし, $\chi(M)$ で M のオイラー標数を表す．このとき,

$$\chi(M) \leq \#_2(M).$$

Theorem 21 (Takeuchi)**.** $(M, \{s_x\}_{x \in M})$ を対称 R 空間とし, $H(M, \mathbb{Z}_2)$ で M の $\mathbb{Z}_2$ 係数のホモロジー群を表す．このとき,

$$\dim H_*(M, \mathbb{Z}_2) = \#_2(M).$$

このような背景から, 一般化された s 多様体に関しても対蹠数とトポロジーの関係が期待される．先に述べた旗多様体の場合, 次がわかる．

Theorem 22. *1.* 旗多様体 $F_{n_1,\ldots,n_r}(\mathbb{K}^n)$ の極大対蹠集合は

$$\begin{aligned} A = \{(&\langle \boldsymbol{e}_{i_1}, \ldots, \boldsymbol{e}_{i_{n_1}} \rangle_{\mathbb{K}}, \langle \boldsymbol{e}_{i_1}, \ldots, \boldsymbol{e}_{i_{n_1+n_2}} \rangle_{\mathbb{K}}, \ldots, \langle \boldsymbol{e}_{i_1}, \ldots, \boldsymbol{e}_{i_{n_1+\cdots+n_r}} \rangle_{\mathbb{K}}) \\ &\mid 1 \leq i_1 < \cdots < i_{n_1} \leq n,\ 1 \leq i_{n_1+1} < \cdots < i_{n_1+n_2} \leq n, \ldots, \\ &\quad 1 \leq i_{n_1+\cdots+n_{r-1}+1} < \cdots < i_{n_1+\cdots+n_r} \leq n, \\ &\quad \#\{i_1, \ldots, i_{n_1+\cdots+n_r}\} = n_1 + \cdots + n_r\} \end{aligned}$$

と合同になる．ここで, $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ は $\mathbb{K}^n$ の標準基底である．

2.

$$\#_\Gamma(F_{n_1,\ldots,n_r}(\mathbb{K}^n)) = \frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_r! n_{r+1}!}.$$

ただし, $n_{r+1} = n - (n_1 + \cdots + n_r)$.

さらに, Sánchez([8]) の結果と合わせると次の系を得る．

Corollary 23.

$$\begin{aligned} \#_\Gamma(F_{n_1,\ldots,n_r}(\mathbb{K}^n)) &= \frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_r! n_{r+1}!} \\ &= \dim H_*(F_{n_1,\ldots,n_r}(\mathbb{K}^n); \mathbb{Z}_2). \end{aligned}$$

また, コンパクト対称三対 $(G, K_1, K_2) = (\mathrm{SO}(n), \mathrm{SO}(n-1), \mathrm{I}_{g_t}(\mathrm{SO}(n-1)))$ について, $\mathrm{SO}(n)/\mathrm{SO}(n-2)$ の $o := e(K_1 \cap K_2)$ を含む対蹠集合を考えることもできる．射影 $\pi_1 : \mathrm{SO}(n)/\mathrm{SO}(n-2) \to \mathrm{SO}(n)/\mathrm{SO}(n-1)$ について, $\pi_1(o)$ を含む $\mathrm{SO}(n)/\mathrm{SO}(n-1) \cong S^{n-1}$ の大対蹠集合は, $\{\pi_1(o), \pi_1(o')\}$．ただし, $o' = I_{2,n-2} \cdot K_1 \cap K_2$ 従って, $\mathrm{SO}(n)/\mathrm{SO}(n-2)$ の o を含む対蹠集合は,

$$\pi_1^{-1}(\{\pi_1(o), \pi_1(o')\}) = K_1 \cdot o \cup \mathrm{I}_{I_{2,n-2}}(K_1) \cdot o'$$

の部分集合． $F(\varphi_o(\theta_2), G/K_1 \cap K_2) \cap \pi_1^{-1}(\{\pi_1(o), \pi_1(o')\}) = \{o, o'\}$ であるから, $\mathrm{SO}(n)/\mathrm{SO}(n-2)$ の o を含む対蹠集合は,$\{o, o'\}$ に含まれる．また, $\{o, o'\}$ が対蹠集合であることから, o を含む $\mathrm{SO}(n)/\mathrm{SO}(n-2)$ の極大対蹠集合は $\{o, o'\}$ である．

参考文献

[1] B-Y. Chen and T. Nagano, *Totally geodesic submanifolds of symmetric spaces. II*, Duke Math. J. **45** (1978), no. 2, 405–425.

[2] B.-Y. Chen and T. Nagano, *A Riemannian geometric invariant and its applications to a problem of Borel and Serre*, Trans. Amer. Math. Soc. **308** (1988), 273–297.

[3] O. Kowalski, *Generalized symmetric spaces*, Lecture Notes in Mathematics, **805**,Springer-Verlag, Berlin-New York, 1980.

[4] A. J. Ledger, *Espaces de Riemann symétriques généralisés*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B **264**, (1967), A947–A948.

[5] A. J. Ledger and M. Obata, *Affine and Riemannian s-manifolds.*, J. Differential Geometry **2** (1968), 451–459.

[6] R. Lutz, *Sur la géométrie des espaces* Γ*-symétriques*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math., **293** (1981), 55–58.

[7] 長野正, 対称空間の幾何理論, 数理解析研究所講究録 **1206** (2001), 55–82.

[8] C. Sánchez, *The index number of an R-space: An extension of a result of M. Takeuchi's*, Proc. Amer. Math. Soc. **125**, (1997), 893–900.

[9] 寺内泰紀, Γ 対称空間の対蹠集合, 首都大学東京修士論文, (2018)