

可解岩澤群内の余次元 1 リッチソリトン部分群

田丸 博士 (大阪市立大学理学研究科)

概要

著者は最近, Miguel Domínguez-Vázquez 氏および Víctor Sanmartín-López 氏との共同研究 ([8]) において, 非コンパクト型既約リーマン対称空間に対応する可解岩澤群 (等長変換群の岩澤分解の可解部分) 内の余次元 1 の Ricci soliton 部分群の分類を行った. 本稿ではその結果を, 背景に力点を置いて紹介する.

1 Introduction

$M = G/K$ を非コンパクト型 (既約) リーマン対称空間, $G = KAN$ を岩澤分解としたとき, その可解部分 AN を可解岩澤群という. 対称空間の一般論でよく知られているように, AN は M は単純推移的に作用するので, これら両者は自然に同一視することができる. 特に, M 上のリーマン計量を引き戻すことにより, AN には自然に左不変リーマン計量が入る. 本稿で紹介する主結果は, AN 内の余次元 1 部分群であって, 上述の計量からの誘導計量が Ricci soliton となるものの分類である.

本研究の動機として, 等質 Ricci soliton の研究と, 対称空間内の部分多様体の研究の二つがある. そこでまず本節では, これらの背景について紹介する.

1.1 動機 1: 等質 Ricci soliton

動機の一つとして, 等質 Ricci soliton の研究が挙げられる. ここでは, その研究の現況を紹介する. 等質 Ricci soliton の研究は近年活発に行われているが, 等質空間だからと言って全てが分かる訳では全くなく, 逆に低次元の場合以外は分かっていないことの方が多い, ということを主張したい.

研究集会「部分多様体幾何とリー群作用 2020」(2021/03/19–20) 記録集原稿

This work was partly supported by Osaka City University Advanced Mathematical Institute (MEXT Joint Usage/Research Center on Mathematics and Theoretical Physics JPMXP0619217849), and JSPS KAKENHI Grant Number JP19K21831.

まずは念のために用語を復習しておく．リーマン多様体 (M, g) が等質であるとは，等長変換群 $\text{Isom}(M, g)$ が M に推移的に作用することである．また，リーマン多様体 (M, g) が Ricci soliton であるとは，実定数 $c \in \mathbb{R}$ および完備ベクトル場 $X \in \mathfrak{X}(M)$ が存在し，Ricci 曲率が次をみたすこと： $\text{Ric}_g = cg + \mathfrak{L}_X g$ ．ここで $\mathfrak{L}_X$ は X による Lie 微分を表す．

注意 1.1. 本稿ではリーマン計量の場合のみ考えるが，これらの定義は擬リーマンの設定でも可能である．左不変擬リーマン計量に関しては，我々の最近の研究 [13] がある．擬リーマン計量を含むもっと一般の soliton に関しては [15] を参照．

等質 Ricci soliton の様相は，よくあるように，実定数 c の符号によって異なる．本稿で紹介する結果は $c < 0$ の場合のものだが，それ以外の場合も含めて紹介する．まず $c > 0$ の場合（この場合を shrinking という）には，次が成り立つ．

事実 1.2. リーマン多様体 (M, g) が $c > 0$ の等質 Ricci soliton であるとする．このとき M は，スカラー曲率正の等質 Einstein 多様体と平坦なリーマン多様体の直積となる．

従って $c > 0$ の等質 Ricci soliton の研究は，等質 Einstein 多様体の研究に帰着される．ただし，これによって状況が完全に分かった訳ではなく，等質 Einstein 多様体についても分かっていないことの方が多い．その様子を伝えるために，有名な未解決問題を二つ紹介しておく．

問題 1.3. コンパクト Lie 群 $SU_2 \times SU_2$ 上の左不変 Einstein 計量を分類せよ．ちなみに SU_2 上の左不変 Einstein 計量の分類は知られている（実質的に Milnor [16] による）．ちなみに $SU_2 \times SU_2$ 上には左不変 Einstein 計量が（等長とスカラー倍の違いを除いて）2 個存在し，等長変換群が“ある程度大きい”場合はこれらに限ることが最近示されている ([4])．しかし完全な解決には至っていない．

問題 1.4. コンパクトな等質空間 G/K 上の G -不変 Einstein 計量は，等長とスカラー倍の違いを除いて有限個であるかどうかを調べよ．これも SU_2 の場合には正しいが，上記の $SU_2 \times SU_2$ の場合にも未解決である．

次に $c = 0$ (steady) の場合を考える．等質 Ricci soliton に関しては，この場合は完全に分かっていると思って良い．ちなみに，等質リーマン多様体が Ricci 平坦ならば平坦という性質は以前から知られていた ([1])．

事実 1.5. リーマン多様体 (M, g) が $c = 0$ の等質 Ricci soliton であるとする．このとき M は平坦である．

最後に $c < 0$ (expanding) の場合を考える. この場合が本稿で扱う場合に相当するのだが, 非自明な Ricci soliton の例が数多く供給される興味深いケースである. その中で, 次は中心的な問題の一つである.

問題 1.6. (M, g) が $c < 0$ の等質 Einstein (あるいは Ricci soliton) 多様体であるとする. このとき (M, g) は可解 Lie 群に左不変計量を入れた空間と等長的か?

この問題の答えは肯定的であると考えて, Einstein の場合は Alekseevskii 予想, Ricci soliton の場合は一般化 Alekseevskii 予想, などと呼ばれることが多い (表現にはいろいろなバリエーションがある). 定義から明らかに, 一般化 Alekseevskii 予想が正しければ Alekseevskii 予想も正しいことが従うが, 実はその逆も成り立つ ([10]). すなわち, これらの予想は同値である.

上記の予想を鑑みて, 研究の方向性が 2 つ考えられる. 一方は (一般化) Alekseevskii 予想が正しいかどうかを検証するものであり, 他方は可解 Lie 群上の左不変 Ricci soliton (あるいは Einstein) 計量を調べるものである. まず前者について, 現時点で到達している地点として次を紹介しておく.

事実 1.7. 一般化 Alekseevskii 予想は $\dim \leq 5$ のとき正しい ([2]). また, 等質空間 G/K に対する Alekseevskii 予想は, $\dim(G/K) \leq 10$ かつ G が半単純でないとき正しい ([3]).

上の結果では「半単純でないとき」という制約が入っているが, 半単純 Lie 群が登場する部分は, 実は全く分かっていない. 例えば $SL_3(\mathbb{R})$ が左不変 Einstein 計量を許容するかどうかは, 未解決問題である (ここで $SL_3(\mathbb{R})$ を挙げたことには特に意味はなく, 3 次元以外の非コンパクト半単純 Lie 群について未解決である).

最後に可解 Lie 群に関わる現状を紹介する. この場合には, 様々な構造理論や性質が調べられており, 数多くの具体例が知られているが, 分類に関しては極めて難しい. 例えば次元の条件を付けたとすると, 可解 Lie 群の左不変 Ricci soliton が分類されているのは $\dim \leq 6$ の場合のみであると思われる ([18]).

用語の簡素化のため, 可解 Lie 群に左不変リーマン計量を入れた空間を可解多様体という. 上記のことは, Einstein 可解多様体や Ricci soliton 可解多様体の研究, 特に分類問題は極めて難しい, ということを主張している.

1.2 動機 2: 対称空間内の等質部分多様体

二つ目の動機として、対称空間内の部分多様体の研究がある。与えられた空間が、特定の幾何的条件をみたす部分多様体を許容するか、という問題は典型的だと思われる。このような研究において、いくつかの場合には、内在的にも興味深い例を供給することがある。筆者が以前に示した次の事実は、非コンパクト型対称空間内の等質部分多様体から等質 Einstein 多様体の例が大量に構成されることを示している。

事実 1.8 ([17]). $M = G/K$ を非コンパクト型リーマン対称空間 (Killing 形式を使ったリーマン計量を入れる), Q_Φ を G 内の放物型部分群, $Q_\Phi = M_\Phi A_\Phi N_\Phi$ をその “Langlands 分解” とする。このとき $A_\Phi N_\Phi$ (正確に言うとその原点軌道) に誘導計量を入れた空間は Einstein 可解多様体である。

ここで、Langlands 分解などの用語は、本筋から離れるので説明を省略する。この事実が示すことは、非コンパクト型リーマン対称空間内の等質部分多様体が興味深い例を供給する、ということである。さらに、このように部分多様体から得られる例は決して限定的ではない。その結果を述べるために、

$$T_n^0(\mathbb{R}) := \{g \in SL_n(\mathbb{R}) \mid \text{上三角, 対角成分は全て正}\}$$

とおく。これは $SL_n(\mathbb{R})$ の岩澤分解の可解部分に他ならない。従って特に、 $T_n^0(\mathbb{R})$ は対称空間 $SL_n(\mathbb{R})/SO_n$ と同一視することができ、誘導された左不変計量に関して Einstein である。

事実 1.9 ([12]). (S, g) を Ricci soliton 可解多様体とする。このとき (S, g) から $T_n^0(\mathbb{R})$ への等長埋め込みが存在する。

この事実から、非コンパクト型リーマン対称空間 (実は $SL_n(\mathbb{R})/SO_n \cong T_n^0(\mathbb{R})$ で十分) 内の Ricci soliton 部分多様体が分類できれば、Ricci soliton 可解多様体の分類も原理的には得られることになる。そのような分類が可能だとは思えないが、しかし、Einstein あるいは Ricci soliton 部分多様体がどのくらいあるか、という問題には意味があるだろう。

そこで本稿では、部分多様体の視点からの研究の橋頭保として、余次元 1 すなわち超曲面の場合を考える。非コンパクト型リーマン対称空間内の等質超曲面については、その分類は限定的な場合にしか得られていないが、次のような “クラス分け” ができていることが分かっている。

事実 1.10 ([5, 6]). 非コンパクト型既約リーマン対称空間内の等質超曲面は, 以下のいずれかをみたす:

- (K) 余次元 2 以上の等質部分多様体の周りの tube;
- (A) 焦部分多様体を持たず, 等距離超曲面族の中に一つだけ極小超曲面が存在;
- (N) 焦部分多様体を持たず, その等距離超曲面は全て互い合同.

例えば上半平面 $\mathbb{R}H^2$ の場合を考えると, 上記の等質超曲面は, $SL_2(\mathbb{R})$ の岩澤分解に登場する部分群 K, A, N の軌道として実現できる. この場合, (K) 型は測地円, (A) 型は測地線とその等距離曲線, (N) 型はホロ円である. これらを図示したものが図 1 である. なお, 青色の線は軌道空間を表す.

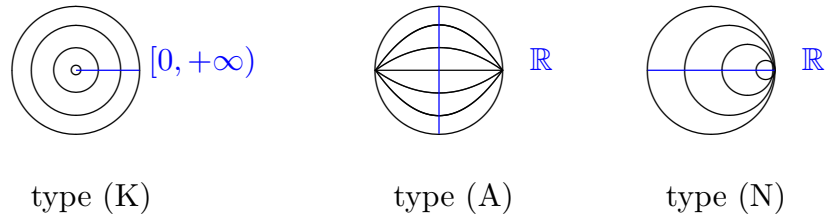


図 1 非コンパクト型既約リーマン対称空間内の等質超曲面の様相

非コンパクト型既約リーマン対称空間内の等質超曲面のうち, (A) 型と (N) 型のもものは分類が知られている. その分類結果より, これらの等質超曲面は, 可解岩澤群 AN 内の余次元 1 部分群の軌道として実現されることが分かる. 特に, これらは可解多様体である. 従って, 本稿で紹介する主結果は, “非コンパクト型既約リーマン対称空間内の焦部分多様体をもたない等質超曲面で Ricci soliton になるものの分類” ということもできる.

ちなみに (K) 型の等質超曲面に Ricci soliton になるものが存在するかどうかは, 現時点では未解決である. そのような例は, (一般化) Alekseevskii 予想を信じると, 存在しない公算が高い.

2 主結果

ここでは, 本稿の主結果の主張と, その周辺状況を紹介する. まず主結果の主張を, いくつかの用語の定義をしないまま述べる.

定理 2.1 ([8]). AN を非コンパクト型既約リーマン対称空間に対応する可解岩澤群とする. このとき AN 内の余次元 1 部分群 S が誘導計量に関して Ricci soliton であるために必要十分条件は, 以下のいずれかが成り立つこと:

- (1) M is any, and S contains N ;
- (2) $M = \mathbb{CH}^2$, and S is “ruled minimal”;
- (3) $M = \mathbb{RH}^n$, and S is any.

可解岩澤群 AN 内の余次元 1 部分群については, 分類が知られている. 部分多様体の言葉で述べると, (A) 型の場合は, 等距離超曲面族が階数とほぼ同じだけあって, さらにそれぞれの族の中に (極小なものからの距離でパラメトライズされるので) 異なるものが 1 変数分ある. (N) 型の場合は, 階数が 2 以上ならば等距離超曲面族そのものが連続的に存在する. 従って, 余次元 1 部分群は極めて豊富にある. その中で Ricci soliton になるものは極めて限定的である, というのが上記の主定理の主張である.

なお, 上記の定理で述べられた Ricci soliton は, 全て既知のものであり, 残念ながら新しい例が含まれている訳ではない. 以下では, これらの例がどのようなものであるかを, 順に説明していく. まず $M = \mathbb{RH}^n$, すなわち実双曲空間の場合は, 良く知られたものであると言って良いだろう.

命題 2.2. $\mathbb{RH}^n$ のとき, AN 内の余次元 1 部分群は, 閉区間 $[0, 1]$ 分だけある. これらを部分多様体の言葉で言うと, 一方の端点が全測地的 $\mathbb{RH}^{n-1}$ に対応し, 他方がホロ球面に対応する. これらの中間は, 全測地的 $\mathbb{RH}^{n-1}$ の等距離超曲面に他ならない. 良く知られているように, これらは全て定曲率, 従って Einstein である.

図 1 を見ると, これらの状況が図示されている. すなわち, type (A) の中心を通るものが全測地的 $\mathbb{RH}^{n-1}$, それを上にならしていったものが等距離超曲面, そして距離を無限大に飛ばしたホロ球面が type (N) に描かれたもの (のどれか) である. なお, 複素双曲空間 $\mathbb{CH}^n$ においても, 余次元 1 部分群の様相は同様なのだが, 曲率等の幾何は全く異なる.

命題 2.3. $\mathbb{CH}^n$ のとき, AN 内の余次元 1 部分群は, 閉区間 $[0, 1]$ 分だけある. これらを部分多様体の言葉で言うと, 一方の端点が等質 ruled minimal 超曲面 W^{2n-1} に対応し, 他方がホロ球面に対応, また中間は W^{2n-1} の等距離超曲面である. これらの等質超曲面が Ricci soliton であるための必要十分条件は, ホロ球面か, あるいは $\mathbb{CH}^2$ 内の W^3 であること.

ホロ球面に対応する余次元 1 部分群は $S = N$ に他ならない (これは $N \subset S$ に相当す

る). 他方の等質 ruled minimal 超曲面 W^{2n-1} は fan, あるいは Lohnherr 超曲面と呼ばれることもある. これが Ricci soliton であるかどうか次元に依存するという結果は, 我々の以前の研究 ([9]) で得られていたものだが, 面白い現象であると思われる. 部分多様体から言うと, $\mathbb{CH}^n$ 内の超曲面は $n = 2$ と $n > 2$ で様相が異なることが多々ある. また Lie 群上の左不変計量においても, Lie 群の次元が 3 の場合と 4 以上では様相が異なることが多々ある. このようなことから考えて, $\mathbb{CH}^2$ 内の W^3 が特別であることは, それほど違和感がある結果ではない. しかし, その本質的な理由がどこにあるのかは, まだはっきりとはしていない.

最後に, $N \subset S$ の場合について述べる. ここで, 対称空間の階数が 1 の場合には必然的に $S = N$ となり, その軌道はホロ球面である. 一般の階数の場合には, S の取り方は連続的に存在する.

命題 2.4. AN 内の余次元 1 部分群 S が $N \subset S$ をみたすとき, S は常に Ricci soliton である. さらに $\text{rank}(M) \geq 2$ のときには, Einstein になるような S が存在する.

上記の主張は, 明示的に書かれたのは我々の以前の論文 [7] が初めてだと思われる. 証明は, Ricci soliton 可解多様体と Einstein 可解多様体の一般論を適用することで, 容易に示される. また, それ以前から, 専門家の間では知られていたと言っても恐らく良いだろう.

3 補足

ここでは, 今回紹介した定理 2.1 に付随する事柄をいくつか紹介する. まずは証明の方針だが, 重要な役割を果たすのは次の事実である.

事実 3.1 ([14]). S を完全可解 Lie 群, g を S 上の左不変リーマン計量とする. このとき (S, g) が Ricci soliton であるための必要十分条件は, それが代数的 Ricci soliton, すなわち次をみたすこと: $\exists c \in \mathbb{R}, \exists D \in \text{Der}(\mathfrak{g}) : \text{Ric} = c \cdot \text{id} + D$.

ここで Lie 群 S が完全可解であるとは, $\forall X \in \mathfrak{s}$ に対して ad_X の固有値は全て実数となること. 我々の設定においては, 可解岩澤群 AN は完全可解であり, 従ってその部分群 S も完全可解となる. このような条件の下では, Ricci soliton 条件が線型方程式に帰着することになる (だからと言って簡単に解ける訳ではないが). なお, Lie 群に仮定がなくても, 左不変計量が代数的 Ricci soliton ならば Ricci soliton である. このことを踏まえると, 次の問題は取り付く余地があると感じられるかも知れない.

問題 3.2. 可解岩澤群 AN 内の余次元 2 以上の Ricci soliton 部分群を構成せよ. あるいは, 余次元 2 などの適切な仮定の下で分類せよ.

この場合も, 代数的 Ricci soliton を調べれば十分であるということは変わらないが, 例が増えることは間違いない. 実際, [17] で構成された例の中に余次元 2 のものが存在する. それ以外の例があるかどうか, という問題は, 興味深いと思われる. また, 余次元 1 の場合でも, 外の空間を取り換えたものは十分に問題に成り得る. 例えば次の問題は自然であろう.

問題 3.3. 冪零岩澤群 N 内の余次元 1 の Ricci soliton 部分群を構成・分類せよ.

ちなみに我々の論文 [8] の議論において, 階数 1 の非コンパクト型対称空間の一般化である Damek-Ricci 空間, およびその冪零部分である H -type 群については, 余次元 1 の Ricci soliton 部分群の分類を得ている. その結果から考えても, N 内の Ricci soliton 部分群は, AN 内の Ricci soliton 部分群よりも豊富に存在すると思われる.

参考文献

- [1] D. Alekseevskii, B. Kimel'fel'd, Structure of homogeneous Riemannian spaces with zero Ricci curvature, Funkt. Anal. Prilozhen 9 (1975), 5–11; English translation: Funct. Anal. Appl. 9 (1975), 97–102.
- [2] R. M. Arroyo, R. Lafuente, Homogeneous Ricci solitons in low dimensions, Int. Math. Res. Not. IMRN (2015) 4901–4932.
- [3] R. M. Arroyo, R. A. Lafuente, The Alekseevskii conjecture in low dimensions, Math. Ann. 367 (2017) 283–309.
- [4] F. Belgun, V. Cortés, A. S. Haupt, D. Lindemann, Left-invariant Einstein metrics on $S^3 \times S^3$, J. Geom. Phys. 123 (2018) 128–139.
- [5] J. Berndt, H. Tamaru, Homogeneous codimension one foliations on noncompact symmetric spaces, J. Differential Geom. 63 (2003) 1–40.
- [6] J. Berndt, H. Tamaru, Cohomogeneity one actions on symmetric spaces of noncompact type, J. Reine Angew. Math. 683 (2013) 129–159.
- [7] J. T. Cho, T. Hashinaga, A. Kubo, Y. Taketomi, H. Tamaru, Realizations of some contact metric manifolds as Ricci soliton real hypersurfaces, J. Geom. Phys. 123 (2018) 221–234.

- [8] M. Domínguez-Vázquez, V. Sanmartín-López, H. Tamaru, Codimension one Ricci soliton subgroups of solvable Iwasawa groups, *J. Math. Pures Appl.*, to appear.
- [9] T. Hashinaga, A. Kubo, H. Tamaru, Homogeneous Ricci soliton hypersurfaces in the complex hyperbolic spaces, *Tohoku Math. J.* 68 (2016) 559–568.
- [10] M. Jablonski, Homogeneous Ricci solitons are algebraic, *Geom. Topol.* 18 (2014) 2477–2486.
- [11] M. Jablonski, Homogeneous Ricci solitons, *J. Reine Angew. Math.* 699 (2015) 159–182.
- [12] M. Jablonski, Einstein solvmanifolds as submanifolds of symmetric spaces, *arXiv:1810.11077*.
- [13] Y. Kondo, H. Tamaru, A classification of left-invariant Lorentzian metrics on some nilpotent Lie groups, *arXiv:2011.09118*.
- [14] J. Lauret, Ricci soliton solvmanifolds, *J. Reine Angew. Math.* 650 (2011) 1–21.
- [15] J. Lauret, The search for solitons on homogeneous spaces, *Abel Symposia*, Springer, in press.
- [16] J. Milnor, Curvatures of left invariant metrics on Lie groups, *Advances in Math.* 21 (1976), 293–329.
- [17] H. Tamaru, Parabolic subgroups of semisimple Lie groups and Einstein solvmanifolds, *Math. Ann.* 351 (2011) 51–66.
- [18] C. Will, The space of solvsolitons in low dimensions, *Ann. Glob. Anal. Geom.* 40 (2011) 291–309.