

部分多様体幾何とリー群作用 2020 記録

$G_2/SO(4)$ の Morse 関数と極大対蹠集合

佐々木優 (筑波大学)

1 背景

リーマン多様体 M が対称空間であるとは、 M の各点 x に等長変換 s_x で、(1) x は s_x の孤立固定点、(2) $s_x^2 = \text{id}_M$ 、の 2 つを満たすものが対応していることをいう。 M の 2 点 x, y が対蹠的であるとは、 $s_x(y) = y$ ($\Leftrightarrow s_y(x) = x$) を満たすことをいう。 M の部分集合 S は、任意の 2 点 $x, y \in S$ が対蹠的であるとき対蹠集合と呼び、対蹠集合間の包含関係で極大であるものを極大対蹠集合という。また、濃度が最大の対蹠集合を大対蹠集合といい、その濃度を 2-number と呼んで $\#_2 M$ と記す。これら対蹠集合の概念は Chen-Nagano により導入された [1]。とくに、 M が非コンパクト型と呼ばれる対称空間であるとき、対蹠集合は 1 点集合になることが知られている。以下では、 M をコンパクトリーマン対称空間であるとする。

コンパクト対称空間の対蹠集合とトポロジーの関連について、次の性質が知られている。 M が対称 R 空間と呼ばれるコンパクト対称空間の特別なクラスの対称空間であるとき、

$$\#_2 M = \sum_i \dim_{\mathbb{Z}_2} H_i(M; \mathbb{Z}_2)$$

が成り立つ [5]。この背景には、Morse 関数の存在がある。対称 R 空間は、標準埋め込みと呼ばれるユークリッド空間への埋め込みを持つことが知られており、この標準埋め込みに関する高さ関数はほとんどが Morse 関数になる。さらに、その高さ関数たちの中では、臨界点集合が大対蹠集合となるような $\mathbb{Z}_2$ -perfect Morse 関数が存在する。この性質により、上記の等式は成り立つのである。以下、 $\beta_{\mathbb{Z}_2}(M)$ で $\sum_i \dim H_i(M; \mathbb{Z}_2)$ を表すとする。

対称 R 空間でないコンパクトリーマン対称空間 M についても、 $\#_2 M = \beta_{\mathbb{Z}_2}(M)$ が成り立つものが存在する。例えば、特殊ユニタリ群 $SU(n)$ は対称 R 空間ではないが $\#_2 SU(n) = \beta_{\mathbb{Z}_2}(SU(n)) = 2^{n-1}$ となり、同様に例外型コンパクトリー群 G_2 についても $\#_2 G_2 = \beta_{\mathbb{Z}_2}(G_2) = 7$ となる。これらの対称 R 空間でない場合でも、やはり、臨界点集合が大対蹠集合となるような $\mathbb{Z}_2$ -perfect Morse 関数が存在することが知られている [3]。

これらの事実から自然な疑問として次のような問題を考えられる。

問題. $\#_2 M = \beta_{\mathbb{Z}_2}(M)$ をみたすコンパクト対称空間 M について、臨界点集合が大対蹠集合となるような $\mathbb{Z}_2$ -perfect Morse 関数が存在するのか？

G 型コンパクト対称空間 $G_2/SO(4)$ においては、 $\#_2 G_2/SO(4) = \beta_{\mathbb{Z}_2}(G_2/SO(4)) = 7$ が成り立っているため、そのような Morse 関数の存在が期待される。そこで本講演では $G_2/SO(4)$ においてそのような Morse 関数を具体的に構成する。

2 準備

互いに直交する任意の $x = (x_1, \dots, x_7), y = (y_1, \dots, y_7) \in \mathbb{R}^7$ に対して, $xy \in \mathbb{R}^7$ を以下で定める.

$$xy = \begin{pmatrix} (x_0y_1 + x_1y_0) + (x_2y_3 - x_3y_2) + (x_4y_5 - x_5y_4) + (x_6y_7 - x_7y_6) \\ (x_0y_2 + x_2y_0) + (x_3y_1 - x_1y_3) + (x_6y_4 - x_4y_6) + (x_5y_7 - x_7y_5) \\ (x_0y_3 + x_3y_0) + (x_1y_2 - x_2y_1) + (x_4y_7 - x_7y_4) + (x_5y_6 - x_6y_5) \\ (x_0y_4 + x_4y_0) + (x_5y_1 - x_1y_5) + (x_2y_6 - x_6y_2) + (x_7y_3 - x_3y_7) \\ (x_0y_5 + x_5y_0) + (x_1y_4 - x_4y_1) + (x_7y_2 - x_2y_7) + (x_6y_3 - x_3y_6) \\ (x_0y_6 + x_6y_0) + (x_7y_1 - x_1y_7) + (x_4y_2 - x_2y_4) + (x_3y_5 - x_5y_3) \\ (x_0y_7 + x_7y_0) + (x_1y_6 - x_6y_1) + (x_2y_5 - x_5y_2) + (x_3y_4 - x_4y_3) \end{pmatrix}.$$

また, 7 次実正方行列全体を $M(7, \mathbb{R})$ と記す. さらに, 任意の行列 g の第 i 行を g_i などと書くことにする. このとき, G_2 は次のように与えられる.

命題 2.1 ([3]). Let $SO(7) = \{A \in M(7, \mathbb{R}) ; {}^tA = A^{-1}, \det A = 1\}$. Then,

$$G_2 = \left\{ (a_1, \dots, a_7) \in SO(7) ; \begin{array}{ll} a_3 = a_1a_2, & a_5 = a_1a_4 \\ a_6 = a_4a_2, & a_7 = a_1a_6 = a_1(a_4a_2) \end{array} \right\}.$$

G_2 の単位元を 1_7 と書くことにする. $M \subset G_2$ を次で定める.

$$M = \{a \in G_2 ; a^{-1} = a\} - \{1_7\} = \{a \in G_2 ; {}^ta = a\} - \{1_7\}.$$

このとき, G_2 が M へ共役により推移的に作用することが知られており, $M \cong G_2/SO(4)$ となる. とくに, M は $G_2/SO(4)$ の実現の一つとなっている. また, 対角成分が $x_1, \dots, x_7$ であるような 7 次対角行列を $d(x_1, \dots, x_7)$ などと記す.

命題 2.2 ([6]). $p_1, \dots, p_7 \in M$ を次のように定める.

$$\begin{aligned} p_1 &= d(1, 1, 1, -1, -1, -1, -1), & p_2 &= d(1, -1, -1, 1, 1, -1, -1), \\ p_3 &= d(-1, 1, -1, 1, -1, 1, -1), & p_4 &= d(-1, -1, 1, -1, 1, 1, -1), \\ p_5 &= d(1, -1, -1, -1, -1, 1, 1), & p_6 &= d(-1, 1, -1, -1, 1, -1, 1), \\ p_7 &= d(-1, -1, 1, 1, -1, -1, 1). \end{aligned}$$

このとき, $S = \{p_1, \dots, p_7\}$ は M の極大対蹠集合となる. さらに, M の任意の極大対蹠集合は G_2 作用により S と互いに移りあう.

3 主結果

$M(7, \mathbb{R})$ の内積 $(\cdot, \cdot)$ を $(X, Y) = \text{tr}({}^tXY)$ ($X, Y \in M(7, \mathbb{R})$) により定める. 各 $A \in M(7, \mathbb{R})$ について, 関数 $h_A : M \rightarrow \mathbb{R} ; B \mapsto (B, A)$ を定める. h_A を A 方向の高さ関数と呼ぶ. Morse 関数を考えるため, 次の補題を考える.

補題 3.1. ([3]) 以下を満たす正数 $0 < c_1 < c_2 < c_4$ が存在する.

$$(1) \quad 2c_1 < c_2, 2c_2 < c_4$$

(2) 任意の $\theta_1, \theta_2, \theta_3 \in \mathbb{R}$ について次が成り立つ.

$$\begin{cases} \theta_1 \pm \theta_2 \pm \theta_3 \equiv 0 \pmod{2\pi} \\ c_1 \sin \theta_1 = c_2 \sin \theta_2 = c_4 \sin \theta_3 \end{cases} \implies \theta_1 \equiv \theta_2 \equiv \theta_3 \equiv 0 \pmod{\pi}$$

この補題の c_1, c_2, c_4 を用いて, $X = d(c_1, c_2, 0, c_4, 0, 0, 0)$ と定める.

定理 3.2. X 方向の高さ関数 h_X は $M \cong G_2/SO(4)$ の Morse 関数となり, その臨界点集合は $\{p_1, \dots, p_7\}$ となる. とくに, 臨界点集合が大対蹠集合となる. また, 各臨界点 p_i における指数 $n(p)$ は以下ようになる.

	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	p_7
$n(p_i)$	5	6	8	0	2	3	4

とくに, h_X は M の $\mathbb{Z}_2$ -perfect Morse 関数となる.

参考文献

- [1] B.Y.Chen, T.Nagano, A Riemannian geometric invariant and its applications to a problem of Borel and Serre, Trans. Amer. Math. Soc., **308**(1988), 273-297
- [2] H.Kamiya, Weighted tarce functions as examples of Morse functions, J.Fac.Sci.Shinshu Univ, vol.7(1971), 85-96
- [3] Y.Sasaki, Morse functions of $G_2/SO(4)$, preprint
- [4] M.Takeuchi, Two-number of symmetric R -spaces, Nagoya Math. J., **115**(1989),43-46
- [5] M.S.Tanaka, H.Tasaki, O.Yasukura, Maximal antipodal sets related to G_2 , preprint