変形エルミート・ヤン・ミルズ接続のモジュライ空間

山本 光 (筑波大学数理物質系数学科) *

1 変形エルミート・ヤン・ミルズ接続とは何か？

変形エルミート・ヤン・ミルズ接続 (dHYM 接続) の定義式自体は Mariño-Minasian-Moore-Strominger による理論物理学の論文 [3] で最初に登場した。それとほぼ同時期に Leung-Yau-Zaslow [2] によって数学者サイドからの考察も行われた。一言でいえば、dHYM 接続とは特殊ラグランジュ部分多様体のミラー対応物である。

従って、まずは特殊ラグランジュ部分多様体の定義を復習しておこう。複素 n 次元のケーラー多様体 (X, ω) と X 上至るところ消えない正則 $(n, 0)$ -形式 Ω の組み (X, ω, Ω) を almost Calabi-Yau 多様体という。

定義 1. almost Calabi-Yau 多様体 (X, ω, Ω) 内の部分多様体 $L \subset X$ が phase θ (実定数) の **特殊ラグランジュ部分多様体** (sLag) $\iff$ 次の (0), (1), (2) を満たす。

$$(0) \dim_{\mathbb{R}} L = n, \quad (1) \omega|_L = 0, \quad (2) \operatorname{Im}(e^{-\sqrt{-1}\theta}\Omega)|_L = 0.$$

特殊ラグランジュ部分多様体はいくつかの興味深い性質を持っている。例えば、Harvey-Lawson [1] によって、特殊ラグランジュ部分多様体 L は L の属するホモロジー類 $[L]$ の中で体積が最小であることが分かっている。また、特殊ラグランジュ部分多様体 L はその近傍で $b^1(L)$ -次元ぶん変形できることが McLean [4] によって証明されている。別の言い方をすれば L の変形のモジュライ空間は $b^1(L)$ -次元の滑らかな多様体になる。

ここで、開集合上のトラス束の切断のグラフを実フーリエ向井変換するということを説明する。 $B \subset \mathbb{R}^n$ を開球とし、 $Y = (Y^1, \dots, Y^n) : B \rightarrow T^n$ を滑らかな写像とする。そして

$$S_Y := \{(x, Y(x)) \mid x \in B\} \subset \mathbb{C}^n$$

という $\mathbb{C}^n$ 内の実 n 次元部分多様体を考える。これは Y のグラフである。まず、事実として S_Y がラグランジュ部分多様体であることと

$$\frac{\partial Y^i}{\partial x^j} = \frac{\partial Y^j}{\partial x^i}$$

が任意の i, j に対して成り立つことは同値である。つまりこれは Y には $Y = \nabla f$ となるポテンシャル $f \in C^\infty(B)$ が存在するということである。

次に S_Y がいつフェイズ θ の特殊ラグランジュ部分多様体になるかを考えてみる。するとポテンシャル関数 f が

$$\arg(\det(I + \sqrt{-1}\operatorname{Hess} f)) = \theta \tag{1}$$

* hyamamoto@math.tsukuba.ac.jp. 本講演は河井公大朗氏との共同研究である。

を満たすときであると分かる。

ここで天下一的ではあるが S_Y という部分多様体から

$$\nabla^Y := d + \sqrt{-1} (Y^1 dy^1 + \cdots + Y^n dy^n)$$

という接続を作る。これは $B \times \mathbb{R}^n$ 上の自明 $\mathbb{C}$ -束のエルミート接続である。

この対応

$$\{\text{切断のグラフとして書ける } S_Y\} \longrightarrow \{\mathbb{C}^n \text{ 上のエルミート接続 } \nabla^Y\}$$

を実フーリエ変換という。

ここで S_Y がラグランジュ部分多様体であることと $Y = \nabla f$ と書けることが同値であることは既に述べたが、実はこれは ∇^Y の言葉で書けば $F_{\nabla^Y}^{(0,2)} = 0$ を満たすことが同値であることが分かる。ここで F_{∇} は ∇ の曲率 2 形式である。そしてさらに S_Y がフェイズ θ の特殊ラグランジュ部分多様体になることとポテンシャル関数 f が (1) を満たすことは同値であるが、これは ∇^Y の言葉で書けば

$$\text{Im} \left(e^{-\sqrt{-1}\theta} (\omega + F_{\nabla^Y})^n \right) = 0$$

という式と同値になる。この式自体は外部の空間は $\mathbb{C}^n$ でなくても意味を持つので、変形エルミート・ヤン・ミルズ接続の定義は以下のようにすれば良いことになる。

定義 2. (X, ω) をケーラー多様体で $\dim_{\mathbb{C}} X = n$ とする。また $L \rightarrow X$ を rank 1 の $\mathbb{C}$ -束 (正則性は仮定しない) であり、エルミート計量 h が与えられているとする。このとき L 上のエルミート接続 ∇ が phase θ (実定数) の変形エルミート・ヤン・ミルズ接続 (dHYM 接続) $\iff$ 次の (1), (2) を満たす。

$$(1) F_{\nabla}^{(0,2)} = 0, \quad (2) \text{Im}(e^{-\sqrt{-1}\theta} (\omega + F_{\nabla})^n) = 0.$$

ここで F_{∇} は ∇ の曲率 2 形式である。エルミートなので純虚数値の 2 形式である。変形エルミート・ヤン・ミルズは deformed Hermitian–Yang–Mills の直訳である。(1) は可積分条件で、これにより ∇ は L に正則構造を定めることになる。また、上で説明したように、定義 1 と定義 2 の (1), (2) には対応関係がある。

2 主定理とその設定

ケーラー多様体 X はコンパクトと仮定する。また $\theta \in \mathbb{R}$ を固定する。そして

$$\mathcal{M} := \{ \text{dHYM 接続 with phase } \theta \text{ of } (L, h) \} / U(1)\text{-gauge}$$

と定め、これをモジュライ空間と呼ぶ。

このとき河井氏との共同研究の (1 つ) の主結果は以下である。

定理 3. $\mathcal{M} \neq \emptyset$ を仮定する。このとき $\mathcal{M}$ は $b^1(X)$ -次元の滑らかな多様体であり、さらにアフィン構造を持ち、向きづけ可能でもある。

証明の前にこの定理から分かることを述べておく。任意の dHYM 接続 ∇ に対して、それに十分近い dHYM 接続 ∇' は必ず $\nabla' = \nabla + \sqrt{-1}\alpha$ と書けることが分かる。ここで α は X 上の調和 1 形式である。

以下で主結果の証明の概要を述べる。

Proof. 簡単のため $\theta = 0$ とする. 証明は陰関数定理である.

$$\mathcal{A} := \{ (L, h) \text{ のエルミート接続} \}$$

とし,

$$\mathcal{F} : \mathcal{A} \rightarrow \Omega^{0,2} \oplus \Omega^{2n}$$

を

$$\mathcal{F}(\nabla) := \left(F_{\nabla}^{0,2}, \text{Im}(\omega + F_{\nabla})^n \right)$$

と定める. すると $\mathcal{M} = \mathcal{F}^{-1}(0,0)/U(1)$ -gauge となる. 陰関数定理を使うために $\mathcal{F}$ の値域を小さくする必要がある. 以下で少し観察をする. $\nabla \in \mathcal{F}^{-1}(0,0)$ を 1 つ固定する. すると別の $\nabla' \in \mathcal{A}$ は $a \in \Omega^1$ を用いて $\nabla' = \nabla + \sqrt{-1}a$ と書ける. すると $F_{\nabla'}^{0,2} = 0$ であるから

$$F_{\nabla'}^{0,2} = F_{\nabla}^{0,2} + (da)^{0,2} = 0 + (da)^{0,2} \in (d\Omega)^{0,2}$$

であることが分かる. さらに

$$\begin{aligned} \text{Im}(\omega + F_{\nabla'})^n &= \text{Im}(\omega + F_{\nabla} + \sqrt{-1}da)^n \\ &= \text{Im}(\omega + F_{\nabla})^n + d \left(\text{Im} \sum_{k=1}^n c_k (\omega + F_{\nabla})^{n-k} \wedge (da)^{k-1} \wedge a \right) \\ &= 0 + d \left(\text{Im} \sum_{k=1}^n c_k (\omega + F_{\nabla})^{n-k} \wedge (da)^{k-1} \wedge a \right) \end{aligned}$$

であるから, $\text{Im}(\omega + F_{\nabla'})^n \in d\Omega^{n-1}$ と分かる. 従って, $\mathcal{F}$ の値域は実際は

$$\mathcal{F} : \mathcal{A} \rightarrow (d\Omega)^{0,2} \oplus d\Omega^{n-1}$$

と絞ることができる.

次に問題になるのは, $\mathcal{F}$ の線形化の全射性を示すことである.

$$\delta_{\nabla} \mathcal{F} : \Omega^1 \rightarrow (d\Omega)^{0,2} \oplus d\Omega^{n-1}$$

は

$$\delta_{\nabla} \mathcal{F}(b) = ((db)^{0,2}, \mathcal{G}(b))$$

と書けるわけだが, 第二成分の $\mathcal{G}(b)$ の表示が複雑である. これを見やすく表示するために

$$\tilde{\omega}_{\nabla} := \left| \frac{(\omega + F_{\nabla})^n}{\omega^n} \right|^{-1/(n-1)} \left(\text{id}_{TX} + \frac{F_{\nabla}^{\sharp}}{\sqrt{-1}} \right)^* \omega$$

という X 上のエルミート計量を定義する. このエルミート計量を用いると

$$\mathcal{G}(b) = C^{\tilde{*}} d_c^{\tilde{*}} b$$

と書けることが分かる. ただしここで $\tilde{*}$ は $\tilde{\omega}_{\nabla}$ に関するホッジ作用素であり, $d_c^{\tilde{*}}$ は d_c 作用素の $\tilde{\omega}_{\nabla}$ に関する形式的随伴である. このように見ると, ホッジ理論を使い微分形式の空間を分解することで, $\delta_{\nabla} \mathcal{F}$ が全射であることが比較的容易に分かり, 証明が完了する. $\square$

参考文献

- [1] R. Harvey and H.B. Lawson, Jr. Calibrated geometries. *Acta Math.* 148 (1982), 47–157.
- [2] N.-C. Leung, S.-T. Yau and E. Zaslow. From special Lagrangian to Hermitian-Yang-Mills via Fourier-Mukai transform. *Adv. Theor. Math. Phys.* 4 (2000), no. 6, 1319–1341.
- [3] M. Mariño, R. Minasian, G. Moore and A. Strominger. Nonlinear instantons from supersymmetric p -branes. *J. High Energy Phys.* 2000, no. 1, Paper 5, 32 pp.
- [4] R.C. McLean. Deformations of calibrated submanifolds. *Comm. Anal. Geom.* 6 (1998), no. 4, 705–747.