四元数/超複素-対応

長谷川和志 (金沢大学人間社会研究域)

1　序.

A. Haydys により四元数ケーラー多様体からそれと同次元の超ケーラー多様体を構成する方法が与えられており，この構成法は QK/HK-対応と呼ばれている (quaternionic Kähler/hyper-Kähler-対応)[4]. この構成は，[1] において，計量が不定値な場合に拡張されている．本稿では，これらを一般化した，ある種の U(1) 作用をもつ四元数多様体からそれと同次元の超複素多様体を構成する方法を [3] に基づいて報告する．この構成を Q/H-対応（四元数/超複素-対応）とよぶが，Q/H-対応の例として，ある種の四元数 Hopf 多様体から超複素 Hopf 多様体を得ることができる（例 10）．超複素 Hopf 多様体は位相的な理由で超ケーラー構造を許容しないことが分かるので，Q/H-対応は既知の QK/HK-対応を真に一般化したものといえる．

2　準備.

まず，四元数多様体等の定義から始める．

定義 1.　多様体 M において，Q は階数 3 の $\mathrm{End}(TM)$ の部分束であり，M の任意の点 x に対して，Q_x が $I_1,\ I_2,\ I_3$ で $I_1^2=I_2^2=I_3^3=-\mathrm{id},\ I_1I_2=-I_2I_1=I_3$ を満たす $I_1,\ I_2,\ I_3\in\mathrm{End}(T_xM)$ で張られるとき，(M,Q) は**概四元数多様体**という．さらに，Q を保つ捩れのないアファイン接続 ∇ が存在するとき，(M,Q) は**四元数多様体**という．

以下，四元数多様体 M の次元を $\dim M=4n$ とおく．上のような (I_1,I_2,I_3) を Q の許容枠といい，∇ を四元数接続という．なお，四元数接続は Q に対して一意的ではないことに注意する ([2]).

$n\geq 2$ のとき，(擬) リーマン計量 g が四元数多様体 (M,Q) 上の Q-エルミート計量でありその Levi-Civita 接続が Q の四元数接続であるとき，(M,Q,g) は **(擬) 四元数ケーラー多様体**とよばれる．$n=1$ のとき Q が反自己双対で g がアインシュタイン計量であるときに，**四元数ケーラー多様体**とよぶ.

定義 2. $(M, H = (I_1, I_2, I_3))$ が I_1, I_2, I_3 は M の概複素構造であり，$I_1I_2 = -I_2I_1 = I_3$ を満たすとき，**概超複素多様体**という．特に，I_1, I_2, I_3 が複素構造であるとき，**超複素多様体**という．

超複素多様体上には，I_1, I_2, I_3 を平行とする，捩れのないアファイン接続が唯一存在する．この接続を小畠接続という．したがって，小畠接続は$Q = \langle I_1, I_2, I_2 \rangle$ の四元数接続であり，超複素多様体 $(M, H = (I_1, I_2, I_3))$ は $(M, Q = \langle I_1, I_2, I_2 \rangle)$ とみて四元数多様体となる．また，(擬) リーマン計量 g が I_1, I_2, I_3 に関してケーラー的であるとき，$(M, g, H = (I_1, I_2, I_3))$ は **(擬) 超ケーラー多様体**とよばれる．明らかに，(擬) 超ケーラー多様体の Levi-Civita 接続は小畠接続と一致する．

3 Swann-束.

四元数多様体 (M, Q) の許容枠のなす M 上の主 SO(3)-束を $\pi_S : S \to M$ とし，主 $\mathbb{R}^{>0}$-束である $\pi_{S_0} : S_0(:= (\Lambda^{4n}(T^*M)\backslash\{0\})/\{\pm 1\}) \to M$ を考える．対角線写像 $\triangle : M \to M \times M$ による引き戻し束を $\hat{M} := \triangle^{\#}(S_0 \times S) = \{(x, (\rho, s)) \in M \times (S_0 \times S) \mid x = \pi_{S_0}(\rho) = \pi_S(s)\}$ とおく．$\hat{\pi} : \hat{M} \to M$ を束射影とする．$\hat{M}$ は M 上の主 $\mathbb{R}^{>0} \times \mathrm{SO}(3) = \mathbb{H}^*/\{\pm 1\}$-束であるが，$\mathbb{R}^{>0} \times \mathrm{SO}(3)$ の作用として，右作用を考えるとき $\varepsilon = 1$ とし，左作用を考えるとき $\varepsilon = -1$ とする (講演では $\varepsilon = -1$ とした)．(M, Q) の四元数接続 ∇ は S, S_0 に接続形式 $\theta = (\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ ($\mathfrak{so}(3) \cong \mathbb{R}^3$), θ_0 を誘導し，さらに $\hat{M}$ に接続形式 $\bar{\theta}$ を誘導する．よって，$T\hat{M}$ の分解

$$T\hat{M} = \bar{\mathcal{V}} \oplus \bar{\mathcal{H}} \tag{1}$$

を得る．ここで, $\bar{\mathcal{V}} = \mathrm{Ker}\, \hat{\pi}_*$, $\bar{\mathcal{H}} = \mathrm{Ker}\, \bar{\theta}$ である． この分解を用いて，以下のように $\hat{M}$ 上に概超複素構造を定義できる．c は非零の実数とし，(e_1, e_2, e_3) は $[e_\alpha, e_\beta] = 2e_\gamma$ を満たす $\mathfrak{so}(3)$ の基底とする ((α, β, γ) は $(1, 2, 3)$ の巡回置換)．$e_0 := 1 \in \mathbb{R}\,(\cong T_1\mathbb{R}^{>0})$ とし，$Z_0^c := c\,\widetilde{e}_0$, $Z_\alpha := \widetilde{e}_\alpha$ とおく ($\alpha = 1, 2, 3$)．ここで，$\widetilde{A}$ は A が生成する基本ベクトル場とする．$\hat{M}$ 上の概超複素構造 $(\hat{I}_1^{\bar{\theta},c}, \hat{I}_2^{\bar{\theta},c}, \hat{I}_3^{\bar{\theta},c})$ を

$$\hat{I}_\alpha^{\bar{\theta},c} Z_0^c = -Z_\alpha, \quad \hat{I}_\alpha^{\bar{\theta},c} Z_\alpha = Z_0^c, \quad \hat{I}_\alpha^{\bar{\theta},c} Z_\beta = Z_\gamma, \quad \hat{I}_\alpha^{\bar{\theta},c} Z_\gamma = -Z_\beta$$

および $(x, (\rho, s)) \in \hat{M}$ の水平ベクトル X に対して

$$(\hat{I}_\alpha^{\bar{\theta},c})_{(x,(\rho,s))}(X) = (I_\alpha(\hat{\pi}_* X))^{\bar{h}}_{(x,(\rho,s))}$$

で定める．ここで，$Y^{\bar{h}}$ は Y の水平持ち上げを表すとする．この概超複素構造は，元来 [6] において導入されたものであるが，今回，[3] ではこれと異なる定式化で与えた．この概超複素構造は非零の実数 c と $\hat{M}$ に誘導された接続形式 $\bar{\theta}$ に依存する (故に，四元数接続 ∇ に依存する) が以下のことが成立する．

命題 3 ([6, 3]) $\hat{M}$ の上記の概超複素構造が Q の四元数接続の取り方に依存しないことと，$c = -4(n+1)$ であることは必要十分である．

以下，$c_0 := -4(n+1)$ とする．上記の概超複素構造の積分可能性については以下の通りである．

命題 4 ([6, 3]) $n = 1$ のときは Q は反自己双対と仮定する．$\hat{M}$ の上記の概超複素構造は $c = c_0$ のとき超複素構造となる ([6, 3])．$c \neq c_0$ のとき，$\hat{M}$ の上記の概超複素構造が超複素構造となるための必要十分条件は ∇ のリッチ曲率 Ric^{∇} の歪対称成分が Q-エルミート的となることである ([3])．

$c = c_0$ と選んだ超複素多様体 $\hat{M}$ を **Swann 束**という．命題 4 の第 2 の主張は [6] には述べられておらず，[3] でより詳細に Nijenhuis テンソルを記述することで得られた．なお，(M, Q, g) がスカラー曲率が非零の四元数ケーラー多様体であるとき, $\hat{M}$ は擬超ケーラー計量をもつ ([7])．さらに，S_0 は自明束なので $\hat{M} = S \times \mathbb{R}^{>0}$ となり，$\hat{M}$ は M の超ケーラー錐ともよばれる．

4 主結果.

本稿の主結果は Swann 束に，Joyce によって定義された超複素運動量写像を与えることで得られる．なお，超複素運動量写像は以下で定められるものである．

定義 5 ([5]) $(M, (I_1, I_2, I_3))$ を超複素多様体とし，コンパクトなリー群 F が M に自由かつ各 I_i を保つように作用しているとする．F のリー環 $\mathfrak{F}$ には F の随伴作用を考える．X_f を $f \in \mathfrak{F}$ によって誘導される M のベクトル場とする．F-同変写像 $\mu_i : M \to \mathfrak{F}^*$ の組 $\mu = (\mu_1, \mu_2, \mu_3)$ が

$$d\mu_1 \circ I_1 = d\mu_2 \circ I_2 = d\mu_3 \circ I_3$$

を満たし，かつすべての非零の $f \in \mathfrak{F}$ に対して，$(d\mu_1 \circ I_1)(X_f)$ が M の各点で零にならないとき，μ を F の**超複素運動量写像**という．

四元数多様体 (M, Q) 上のベクトル場 $X \in \Gamma(TM)$ が，X の生成する 1-助変数変換群 $\{\varphi_t\}$ について，$\varphi_{-t}^* I := \varphi_{t*} \circ I \circ \varphi_{t*}^{-1} \in Q$ が任意の $I \in Q$ と t に対して成り立つとする．このような X に対して，**自然持ち上げ** $\hat{X} \in \Gamma(T\hat{M})$ が定義できる．すなわち，$(x, (\rho, s)) \in \hat{M}$ $(s = (I_1, I_2, I_3))$ に対して，$\hat{\varphi}_t : \hat{M} \to \hat{M}$ を

$$\hat{\varphi}_t((x, (\rho, s))) = (\varphi_t(x), (\varphi_{-t}^* \rho, (\varphi_{-t}^* I_1, \varphi_{-t}^* I_2, \varphi_{-t}^* I_3)))$$

と定め,

$$\hat{X}_{(x,(\rho,s))} = \left. \frac{d}{dt} \hat{\varphi}_t((x, (\rho, s))) \right|_{t=0}$$

と定める．また，$L_X\nabla$ を

$$(L_X\nabla)_Y Z = L_X(\nabla_Y Z) - \nabla_{L_X Y} Z - \nabla_Y(L_X Z)$$

$(Y, Z \in \Gamma(TM))$ と定める．$\mathcal{Z}$ を (M, Q) のツイスター空間とする．今回，$\hat{M}$ で $c = c_0$ とし超複素運動量写像を考えることで，次の主張を得た．

定理 6 ([3]) (M, Q) を四元数多様体とし，$n = 1$ のときは Q は反自己双対と仮定する．さらに，$\mathrm{U}(1)$ が M に自由に Q を保つように作用しているとし，ベクトル場 X はこの $\mathrm{U}(1)$-作用を生成しているとする．四元数構造 Q が $L_X\nabla = 0$ かつ

$$Ric^{\nabla}(X, Y) = Ric^{\nabla}(IX, IY) \ \ (Y \in TM, I \in \mathcal{Z})$$

であり，さらに

$$(Ric^{\nabla})(X, X) \circ \hat{\pi} + 4(n+2)(\sum_{i=1}^{3} \theta_i(\hat{X})^2)$$

が $\hat{M}$ 上に零点を持たないような四元数接続 ∇ を許容するとする．このとき，$\hat{X}$ は $\hat{M}$ に自由に作用する $\mathrm{U}(1)$-作用を生成し，M と同次元の超複素多様体 $(M', (I'_1, I'_2, I'_3))$ と $L_Z I'_1 = 0$，$L_Z I'_2 = 2\varepsilon I'_3$，$L_Z I'_3 = -2\varepsilon I'_2$ を満たすような $Z \in \Gamma(TM')$ が存在する．

　また，M' には $L_Z \Theta'_1 = 0$，$L_Z \Theta'_2 = 2\varepsilon\Theta'_3$，$L_Z \Theta'_3 = -2\varepsilon\Theta'_2$ を満たす閉 2-形式 $\Theta'_1, \Theta'_2, \Theta'_3$ も存在する．

証明の概略: まず，定理の仮定のもとでは $\hat{M} = S \times \mathbb{R}^{>0}$ となり，$\hat{X}$ は S に接していることが分かる．$\hat{M}$ 上の 1-形式 $\hat{\theta}^c_\alpha$ $(\alpha = 1, 2, 3)$ を A を非零の実定数として

$$\hat{\theta}^c_\alpha|_{TS} := Ar^{\frac{2}{c}}\theta_\alpha \ \ \hat{\theta}^c_\alpha(Z^c_0) := 0$$

で定める．ここで，r は $\mathbb{R}^{>0}$ の標準座標とする．次に $\mu^c : \hat{M} \to \mathbb{R}^3$ を $x \in \hat{M}$ に対して，

$$\mu^c(x) = \hat{\theta}^c(\hat{X}_x) = (\hat{\theta}^c_1(\hat{X}_x), \hat{\theta}^c_2(\hat{X}_x), \hat{\theta}^c_3(\hat{X}_x)) \tag{2}$$

と定める．定理の仮定のもと，$c = c_0$ のとき μ^{c_0} は超複素運動量写像となることが分かる．$P = (\mu^{-1})(1, 0, 0)$ とするとき，$M' = P/\langle\hat{X}\rangle$ が条件をみたす超複素多様体となる．

5　例．

　以下，例をあげる．

例 7. (M,g,Q) をスカラー曲率が非零の擬四元数ケーラー多様体とし，$\mathrm{U}(1)$ が M に g と Q を保つように自由に作用しているとする．X はこの $\mathrm{U}(1)$-作用を生成し，光的ではないとする．さらに，$\hat{X}$ は $\hat{M}$ の擬超ケーラー計量に関して光的でないとする．このとき，g の Levi-Civita 接続は定理 6 の仮定をみたすことが分かり，M' は擬超ケーラー多様体となる (Θ'_α が I'_α に関するケーラー形式となる $(\alpha=1,2,3)$)．

例 7 において，M から M' を与える対応は QK/HK-対応とよばれる (quaternionic Kähler/hyper-Kähler-対応)．これに倣い，定理 6 において四元数多様体 M から超複素多様体 M' を与える対応を Q/H-対応とよぶことにする．なお，Q/H-対応は (適当な設定のもとで) 関手となっている．

例 8. $(M,(I_1,I_2,I_3))$ を超複素多様体とし，$X\in\Gamma(TM)$ は $L_XI_1=0$, $L_XI_2=2\varepsilon I_3$, $L_XI_3=-2\varepsilon I_2$ を満たすような自由な $\mathrm{U}(1)$-作用を生成するとする $(\varepsilon=\pm1)$．M の小畠接続は定理 6 の仮定をみたす．このとき，Q/H-対応で得られる M' に対して，2 重被覆写像 $k: M\to M'$ が存在する．

最後に四元数 Hopf 多様体の例を与えるが，その定義から述べる．$\tilde{M}:=\mathbb{H}^n\backslash\{0\}$ とおく．$\tilde{M}$ の標準的な超複素構造を $\tilde{H}=(\tilde{I}_1,\tilde{I}_2,\tilde{I}_3)$ とし，それの定める四元数構造を $\tilde{Q}=\langle\tilde{I}_1,\tilde{I}_2,\tilde{I}_3\rangle$ とする．また，$\tilde{M}$ には標準的な超ケーラー計量があるのでそれを $\tilde{g}$ とする．

いま，$\mathcal{A}\in\mathrm{Sp}(n)\mathrm{Sp}(1)$ および $\lambda>1$ とし，$\gamma:=\lambda\mathcal{A}$ とおくと，$\Gamma:=\langle\gamma\rangle$ は $\tilde{g}$ の相似変換群の部分群となり $(\tilde{M},\tilde{g})$ に自由かつ固有不連続に作用する．このとき，商空間 $\tilde{M}/\Gamma$ は四元数構造 Q（と四元数接続 ∇）をもつ．実際，$\tilde{M}$ 上の四元数構造 $\tilde{Q}$ は $\mathrm{GL}(n,\mathbb{H})\mathrm{Sp}(1)$-不変であり $\Gamma\subset\mathrm{GL}(n,\mathbb{H})\mathrm{Sp}(1)$ なので，$\tilde{M}/\Gamma$ には概四元数構造 Q が誘導される．さらに，$\tilde{g}$ の Levi-Civita 接続 $\tilde{\nabla}$ は $\tilde{g}$ の相似変換で不変あることに注意すれば，$\tilde{\nabla}$ が $(\tilde{M}/\Gamma,Q)$ の四元数接続 ∇ を誘導することが分かる．すなわち，$(\tilde{M}/\Gamma,Q)$ は四元数多様体となる．なお，γ の $\mathrm{GL}(n,\mathbb{H})\mathrm{Sp}(1)$ における中心化群 $G^Q:=Z_{\mathrm{GL}(n,\mathbb{H})\mathrm{Sp}(1)}(\gamma)$ は (Q,∇) を保つように $\tilde{M}/\Gamma$ に作用する．

また，$\mathcal{A}\in\mathrm{Sp}(n)$ とするとき，$\Gamma=\langle\gamma\rangle$ $(\gamma=\lambda\mathcal{A},\ \lambda>1)$ は $\tilde{M}$ の超複素構造 $\tilde{H}$ を保つので，商空間 $\tilde{M}/\Gamma$ に超複素構造 H を誘導する．特に，$\tilde{H}$ の小畠接続（これは $\tilde{g}$ の Levi-Civita 接続に一致）は H の小畠接続を誘導する．なお，$\gamma=\lambda\mathcal{A}$ の $\mathrm{GL}(n,\mathbb{H})$ における中心化群 $G^H:=Z_{\mathrm{GL}(n,\mathbb{H})}(\gamma)$ は (H,∇) を保つように $\tilde{M}/\Gamma$ に作用する．

定義 9. 上記のように定めた，$(\tilde{M}/\Gamma,Q)$ および $(\tilde{M}/\Gamma,H)$ をそれぞれ**四元数 Hopf 多様体**および**超複素 Hopf 多様体という**．

今，$q\in\mathrm{Sp}(1)\backslash\{\pm1\}$ とし $\mathcal{A}=R_q\in\mathrm{Sp}(n)\mathrm{Sp}(1)$ とする．ここで，R_q は q の右からの作用を表すとする．このとき，四元数 Hopf 多様体 $M=\tilde{M}/\Gamma$ を得る．

中心化群は $G^Q = \mathrm{GL}(n,\mathbb{H})\mathrm{U}(1) = \mathbb{R}^{>0} \times \mathrm{SL}(n,\mathbb{H})\mathrm{U}(1)$ となるが，その部分群 $\mathbb{R}^{>0} \times \mathrm{Sp}(n)\mathrm{U}(1)$ をとる．なお，この部分群は M に推移的に作用し，（等質四元数多様体として）

$$M = S^1 \times \frac{\mathrm{Sp}(n)\mathrm{U}(1)}{\mathrm{Sp}(n-1)\triangle_{\mathrm{U}(1)}}$$

と表される．ここで，

$$\mathrm{Sp}(n-1)\triangle_{\mathrm{U}(1)} = \left\{ \left[\left(\begin{array}{c|ccc} e^{i\theta} & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & A & \\ 0 & & & \end{array} \right),\ e^{i\theta} \right] \;\middle|\; A \in \mathrm{Sp}(n-1), e^{i\theta} \in \mathrm{U}(1) \right\}$$

である．この M は定理 6 の仮定を満たすことが分かり，次の例が得られる．

例 10. 四元数 Hopf 多様体 $M = S^1 \times \frac{\mathrm{Sp}(n)\mathrm{U}(1)}{\mathrm{Sp}(n-1)\triangle_{\mathrm{U}(1)}}$ に Q/H-対応を適用すると，超複素 Hopf 多様体 $M' = S^1 \times \frac{\mathrm{Sp}(n)}{\mathrm{Sp}(n-1)}$ が得られる．

位相的な理由により，例 10 の M' は超ケーラー構造を許容しないことが分かる．したがって，今回得られた Q/H-対応は QK/HK-対応にはあらわれない様な例を含む．

参考文献

[1] D. Alekseevsky, V. Cortés, M. Dyckmanns and T. Mohaupt, *Quaternionic Kähler metrics associated with special Kähler manifolds*, J. Geom. Phys. 92 (2015), 271-287.

[2] D. Alekseevsky and S. Marchiafava, *Quaternionic structures on a manifold and subordinated structures*, Ann. Mat. Pura Appl. (4) 171 (1996), 205-273.

[3] V. Cortés and K. Hasegawa, *The quaternionic/hypercomplex-correspondence*, Osaka J. Math., 58 (2021), 213-238.

[4] A. Haydys, *Hyper-Kähler and quaternionic Kähler manifolds with S^1-symmetries*, J. Geom. Phys. 58 (2008), 293-306.

[5] D. Joyce, *The hypercomplex quotient and the quaternionic quotient*, Math. Ann. 290 (1991), 323-340.

[6] H. Pedersen, Y. Poon and A. Swann, *Hypercomplex structures associated to quaternionic manifolds*, Differential Geom. Appl. 9 (1998), 273-292.

[7] A. Swann, *Hyper-Kähler and quaternionic Kähler geometry*, Math. Ann. 289 (1991), 421-450.