

非コンパクト型エルミート対称空間内の等質ラグランジュ部分多様体*

橋永貴弘 (佐賀大学)[†]

1 序

(M, ω, J) を実 $2n$ 次元 Kähler 多様体とする. ここで, ω は Kähler 形式, J は複素構造である. M の部分多様体 L が **ラグランジュ部分多様体** であるとは, $\omega|_L = 0$ かつ $\dim_{\mathbb{R}} L = n$ を満たすときを言う. また本稿では, ラグランジュ部分多様体 L が $\text{Aut}(M, \omega, J)$ の連結リー部分群 G の軌道として得られるとき, **等質** と呼ぶ. エルミート対称空間などの特定の Kähler 多様体内の等質ラグランジュ部分多様体の例の構成, 分類問題は興味深い問題の一つである. 特に, M が非コンパクト型エルミート対称空間の場合には, その自己同型群も非コンパクトであることから, M はコンパクト等質ラグランジュ部分多様体だけでなく, 非コンパクト等質ラグランジュ部分多様体の例を許容することが期待される. また任意の非コンパクト型エルミート対称空間は \mathbb{C}^n とシンプレクティック微分同相であるため ([9, 2, 5, 10]), 非コンパクト型エルミート対称空間内の等質ラグランジュ部分多様体は全て \mathbb{C}^n 内のラグランジュ部分多様体の例となる. エルミート対称空間内の等質ラグランジュ部分多様体の分類に関しては, M がコンパクトの場合には, $M = \mathbb{C}P^n$ かつ G が単純リー群の場合の分類が Bedulli-Gori によって ([1]), また $M = \mathbb{Q}_n(\mathbb{C})$ の場合の分類が Ma-Ohnita によって与えられている ([8]). 非コンパクトの場合には, $M = \mathbb{C}H^n$ かつ G が M の岩澤分解の可解部分 S の連結リー部分群の場合の分類が H.-Kajigaya により与えられている ([4]). しかしながら階数の高いエルミート対称空間の場合には, その具体例や性質, 分類について多くの部分が未解決である.

本稿では上述の $\mathbb{C}H^n$ 内の S の連結リー部分群作用による等質ラグランジュ部分多様体の分類に関して述べたのち, 階数の高い非コンパクト型エルミート対称空間内の等質ラ

* 部分多様体幾何とリー群作用 2021(2022年3月20日-21日) 記録集原稿.

[†] e-mail : hashinag@cc.saga-u.ac.jp

グランジュ部分多様体の (部分的な) 構成法について紹介する. 本稿の内容は, 梶ヶ谷徹氏 (東京理科大学) との共同研究, および栗原大武氏 (山口大学) との共同研究の内容を含む.

2 非コンパクト型エルミート対称空間の可解モデル

$M = G/K$ を非コンパクト型 (既約) エルミート対称空間, $G = KAN$ を G の岩澤分解とする. $S := AN$ とおくと, S は単連結な可解リー群となる. S を (G の) 岩澤分解の可解部分と呼ぶ. 対称空間の一般論でよく知られているように, S は M に単純推移的に作用するため, 両者は自然に同一視される. 特に M 上の幾何構造の S への引き戻しにより, S 上に左不変な幾何構造 (リーマン計量 g_S , 複素構造 J_S , および Kähler 形式 ω_S) を入れることで, S は Kähler 多様体として M と同一視される. 本稿では, この (S, g_S, J_S, ω_S) を M の可解モデルと呼ぶ.

例 2.1. ($M = \mathbb{C}H^n = SU(1, n)/S(U(1) \times U(n))$ の可解モデル)

$\mathfrak{s} := \text{span}_{\mathbb{R}}\{A, Z, X_1, \dots, X_{n-1}, Y_1, \dots, Y_{n-1}\}$ を $2n$ 次元実リー代数で (0 でない) ブラケット積が以下で与えられるものとする:

$$[A, Z] = Z, [A, X_i] = \frac{1}{2}X_i, [A, Y_i] = \frac{1}{2}Y_i, [X_i, Y_i] = Z.$$

また \mathfrak{s} 上の幾何構造 (内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathfrak{s}}$, 複素構造 $J_{\mathfrak{s}}$, Kähler 形式 $\omega_{\mathfrak{s}}$) を以下で定める:

- $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathfrak{s}}$: 上記の基底を正規直交基底とする内積,
- $J_{\mathfrak{s}}$: $J(A) = Z, J(Z) = -A, J(X_i) = Y_i, J(Y_i) = -X_i$ ($i = 1, \dots, n-1$)
- $\omega_{\mathfrak{s}}(U, V) := \langle U, J_{\mathfrak{s}}V \rangle_{\mathfrak{s}}$ ($\forall U, V \in \mathfrak{s}$).

このとき, \mathfrak{s} に対応する連結リー群を S , \mathfrak{s} 上の幾何構造 $(\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathfrak{s}}, J_{\mathfrak{s}}, \omega_{\mathfrak{s}})$ から定まる S 上の左不変な幾何構造をそれぞれ g_S, J_S, ω_S とすると, (S, g_S, J_S, ω_S) は複素双曲空間 $M = \mathbb{C}H^n$ の可解モデルとなる.

例 2.2 ([3]). ($M = Sp(n, \mathbb{R})/U(n)$ の可解モデル)

$\mathfrak{s} := \text{span}_{\mathbb{R}}\{A_i, Z_i, X_{jk}, Y_{jk} | i = 1, \dots, n, 1 \leq j < k \leq n\}$ を $n^2 + n$ 次元実リー代数で (0 でない) ブラケット積が以下で与えられるものとする:

- $[A_i, Z_i] = Z_i$
- $[A_i, X_{ik}] = \frac{1}{2}X_{ik}, [A_i, X_{ji}] = -\frac{1}{2}X_{ji},$
- $[A_i, Y_{ik}] = \frac{1}{2}Y_{ik}, [A_i, Y_{ji}] = \frac{1}{2}Y_{ji},$

- $[X_{ij}, X_{jk}] = \frac{1}{\sqrt{2}}X_{ik},$
- $[X_{ij}, Y_{jk}] = \frac{1}{\sqrt{2}}Y_{ik}, [X_{ij}, Y_{kj}] = \begin{cases} Y_{ik} & (i < k) \\ Y_{ki} & (k < i) \end{cases}, [X_{ij}, Y_{ij}] = Z_i,$
- $[X_{ij}, Z_j] = Y_{ij}.$

また \mathfrak{s} 上の幾何構造 (内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathfrak{s}}$, 複素構造 $J_{\mathfrak{s}}$, Kähler 形式 $\omega_{\mathfrak{s}}$) を以下で定める:

- $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathfrak{s}}$: 上記の基底を正規直交基底とする内積,
- $J_{\mathfrak{s}}$: $J(A_i) = Z_i, J(Z_i) = -A_i, J(X_{jk}) = Y_{jk}, J(Y_{jk}) = -X_{jk}$
- $\omega_{\mathfrak{s}}(U, V) := \langle U, J_{\mathfrak{s}}V \rangle_{\mathfrak{s}} \quad (\forall U, V \in \mathfrak{s}).$

このとき, \mathfrak{s} に対応する連結リー群を S , \mathfrak{s} 上の幾何構造 $(\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathfrak{s}}, J_{\mathfrak{s}}, \omega_{\mathfrak{s}})$ から定まる S 上の左不変な幾何構造をそれぞれ g_S, J_S, ω_S とすると, (S, g_S, J_S, ω_S) は $M = Sp(n, \mathbb{R})/U(n)$ の可解モデルとなる.

3 可解モデルの部分群作用から得られる等質ラグランジュ部分多様体

以下, 非コンパクト型エルミート対称空間 M をその可解モデル S と同一視する. S の連結リー部分群 S' で, ラグランジュ軌道を許容するものについて考える. S' の任意の軌道は, 適当な (S 中での) 共役類 S'' の原点軌道と等長的である. よって S' は原点軌道 $S'.o$ がラグランジュ軌道であるとしてよい. $S'.o$ が等質ラグランジュ部分多様体のとき, S' のリー代数 \mathfrak{s}' は以下を満たす:

- \mathfrak{s}' は \mathfrak{s} の部分リー代数,
- $\dim \mathfrak{s}' = \frac{1}{2} \dim \mathfrak{s},$
- $\langle X, JY \rangle_{\mathfrak{s}} = 0 \quad (\forall X, Y \in \mathfrak{s}').$

上記を満たす \mathfrak{s}' を \mathfrak{s} の **ラグランジュ部分代数** と呼ぶこととする. 逆に \mathfrak{s}' がラグランジュ部分代数のとき, 対応する連結リー群 $S' = \exp_{\mathfrak{s}}(\mathfrak{s}')$ の原点軌道 $S'.o$ は等質ラグランジュ部分多様体となる. したがって ラグランジュ軌道を許容する S の連結リー部分群 S' の分類は, \mathfrak{s} のラグランジュ部分代数 \mathfrak{s}' の分類に帰着される.

$M = \mathbb{C}H^n$ の場合, 梶ヶ谷徹氏との共同研究により, ラグランジュ軌道を許容する S の連結リー部分群の軌道同値類の分類を与えている. ここでは [4] で得られた結果を簡単に

紹介する (詳細は [4, 7] を参照されたし).

\mathfrak{s} の構造を例 2.1 で与えられたものとする. $\theta \in \mathbb{R}$ に対して, \mathfrak{s} のラグランジュ部分代数 l_θ を以下で定める:

$$l_\theta := \text{span}_{\mathbb{R}}\{\cos \theta A + \sin \theta Z\} \oplus \text{span}_{\mathbb{R}}\{X_1, \dots, X_{n-1}\}.$$

命題 3.1. \mathfrak{s}' を \mathfrak{s} のラグランジュ部分代数とする. このとき, ある $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ が存在して, \mathfrak{s}' は l_θ と同型になる.

簡単な考察により, \mathfrak{s} のラグランジュ部分代数の (リー代数としての) 同型類は $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ でパラメトライズされることがわかる. $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ に対して, $L_\theta := \exp_{\mathfrak{s}} l_\theta$ とする. L_θ の原点軌道の曲率を計算すると, $\theta_1 \neq \theta_2$ のとき, $L_{\theta_1} \cdot o$ と $L_{\theta_2} \cdot o$ は互いに等長的ではないことがわかる. したがって, S の連結リー部分群作用から得られる等質ラグランジュ部分多様体の合同類は $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ でパラメトライズされ, 原点軌道 $L_\theta \cdot o$ が合同類の代表元を与える. さらに $\theta \in [0, \frac{\pi}{2})$ に対して, L_θ -作用は L_0 -作用と軌道同値となり, L_0 -作用と $L_{\frac{\pi}{2}}$ -作用は軌道同値でないことがわかる:

定理 3.2. S' を S の連結リー部分群で, ラグランジュ軌道を持つとする. このとき, S' -作用は, L_0 -作用または $L_{\frac{\pi}{2}}$ -作用のいずれかに軌道同値である.

[4] では, 上記 2 つの作用に対して, ラグランジュ軌道をすべて決定し, その幾何学的性質を調べている:

- L_0 -作用は $(-\infty, \infty)$ でパラメトライズされるラグランジュ軌道の 1 変数族を持つ. また, 極小軌道をただ一つ持つ.
- $L_{\frac{\pi}{2}}$ -作用はすべての軌道がラグランジュ軌道であり, かつすべて合同である.

なお, 上記のラグランジュ軌道はすべて非コンパクトで, \mathbb{R}^n に微分同相である.

4 根付き木を用いたラグランジュ部分代数の構成法

階数 1 非コンパクト型エルミート対称空間 $M = \mathbb{C}H^n$ の場合には, 可解モデル S の連結リー部分群で, 等質ラグランジュ部分多様体を許容するものは L_0 -作用, または $L_{\frac{\pi}{2}}$ -作用のいずれかに軌道同値であり, またそれらのリー代数はそれぞれ,

$$l_0 = \text{span}_{\mathbb{R}}\{A, X_1, \dots, X_{n-1}\}, \quad l_{\frac{\pi}{2}} = \text{span}_{\mathbb{R}}\{Z, X_1, \dots, X_{n-1}\}.$$

であった.

ここでは、階数の高い場合に、(上記の結果を踏まえ) 等質ラグランジュ部分多様体を許容する S の連結リー部分群の例の部分的な構成法を紹介する。これ以降の話は、一般の非コンパクト型エルミート対称空間の場合でも考えられるが、ここでは階数 n 、実 $n^2 + n$ 次元非コンパクト型エルミート対称空間 $M = SP(n, \mathbb{R})/U(n)$ に話を限定して述べる。

$$\mathfrak{s} = \text{span}_{\mathbb{R}}\{A_i, Z_i, X_{jk}, Y_{jk} | i = 1, \dots, n, 1 \leq j < k \leq n\}$$

を例 2.2 で与えた構造を持つ可解リー代数とする。以下で定める \mathfrak{s} の部分空間 $\bar{\mathfrak{s}}$ からなる集合を考える：

$$\mathcal{S}(n) := \{\bar{\mathfrak{s}} := \text{span}_{\mathbb{R}}\{T_i, V_{jk} | i = 1, \dots, n, 1 \leq j < k \leq n\}\},$$

ここで $T_i \in \{A_i, Z_i\}$, $V_{ij} \in \{X_{ij}, Y_{ij}\}$ とする。定義から 各 $\bar{\mathfrak{s}}$ は

- $\dim \bar{\mathfrak{s}} = \frac{1}{2} \dim \mathfrak{s}$
- $\langle X, JY \rangle_{\bar{\mathfrak{s}}} = 0 \quad (\forall X, Y \in \bar{\mathfrak{s}})$

を自動的に満たす。しかしながら一般に \mathfrak{s} の部分リー代数ではない。

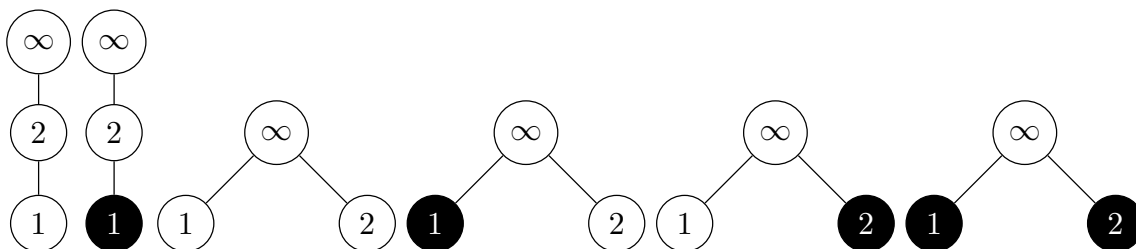
栗原大武氏との共同研究 ([6]) により、 $\mathcal{S}(n)$ 内の部分リー代数 (したがってラグランジュ部分代数) の “2 色葉を持つ増加ラベル付き根付き木” を用いた構成法を与えた。以下、我々の構成法について述べる。

本稿では、木というと連結でサイクルを持たない単純グラフ (ループと多重辺を持たないグラフ) を指すものとする。 T を $(n+1)$ 頂点の根付き木とする。 T の隣接する 2 頂点に対して、根に近い方を **親**、根に遠い方を **子** と言う。また子を持たない頂点を **葉** と言う。各頂点にラベルの付いた根付き木を **ラベル付き根付き木** と呼ぶ。以下、根にはラベル ∞ を付け、根以外の n 頂点には 1 から n のラベルを付けることとし、ラベル i の付いた頂点を頂点 i と呼ぶ。

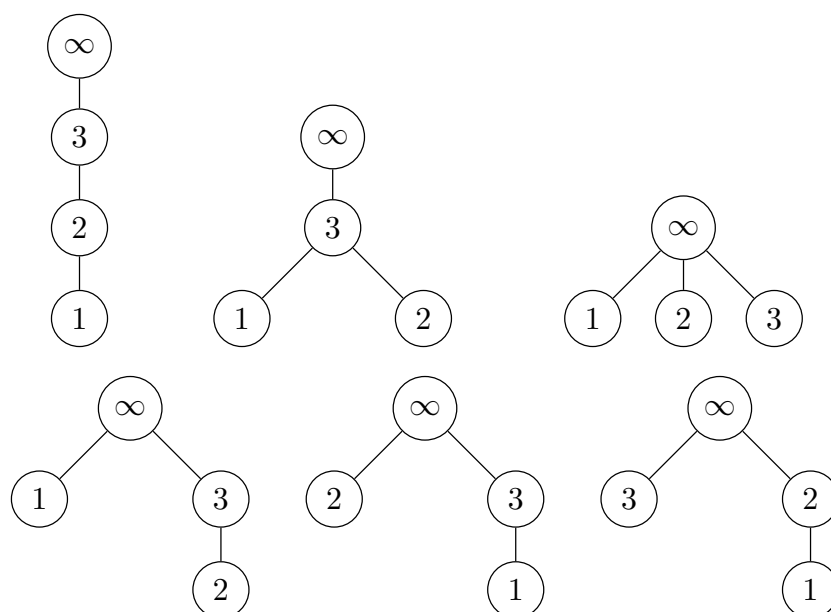
定義 4.1. ラベル付き根付き木 T が以下の条件を満たすとき、 T を **2 色葉を持つ増加ラベル付き根付き木** と呼ぶ：

- 葉は白または黒の 2 色で塗られ、葉以外の頂点は白で塗られている、
- 任意の隣接 2 頂点に対して、根に近い頂点 (親) の方がラベルが大きい。

例 4.2. $n = 2$ のとき、2 色葉を持つ増加ラベル付き根付き木は次の 6 通り：



また、 $n = 3$ のとき、増加ラベル付き根付き木は次の 6 通り：



これらの葉を 2 色で塗り分けると 2 色葉を持つ増加ラベル付き根付き木は全部で 26 通りあることがわかる。

以下の手順により $(n + 1)$ 頂点の 2 色葉を持つ増加ラベル付き根付き木から $\mathcal{S}(n)$ の中のラグランジュ部分代数を構成することができる。

2 色葉を持つ増加ラベル付き根付き木を用いたラグランジュ部分代数の構成法：

与えられた $(n + 1)$ 頂点の 2 色葉を持つ増加ラベル付き根付き木 T に対して、

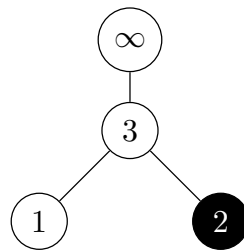
step.1 (T から “連結グラフ” を構成)： 任意の頂点 $i < j < k (i, j, k \in \{1, \dots, n\})$ に対して、頂点 i, j および j, k が辺で結ばれているならば、新たに 頂点 i, k を辺で結ぶ。さらに任意の頂点 i と根 (頂点 ∞) を辺で結ぶ。

step.2 (“連結グラフ” から \bar{s} を構成)： step.1 で構成したグラフに対して、頂点 i が白のとき、 $T_i = A_i$ とし、黒のとき、 $T_i = Z_i$ とする。また任意の頂点 $i < j$ に対して、頂点

i, j が辺で結ばれているとき, $V_{ij} = X_{ij}$ とし, 辺で結ばれていないとき, $V_{ij} = Y_{ij}$ とする. このように定めた T_i, V_{jk} を用いて, $\bar{\mathfrak{s}} := \text{span}_{\mathbb{R}}\{T_i, V_{jk} | i = 1, \dots, n, 1 \leq j < k \leq n\}$ を構成する.

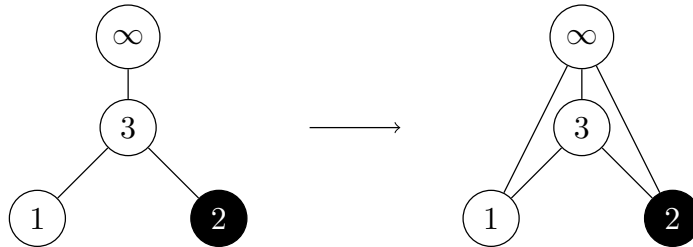
定理 4.3. 任意の 2 色葉を持つ増加ラベル付き根付き木に対して, 上記の構成法により得られた $\bar{\mathfrak{s}} := \text{span}_{\mathbb{R}}\{T_i, V_{jk} | i = 1, \dots, n, 1 \leq j < k \leq n\}$ は \mathfrak{s} のラグランジュ部分代数となる.

例 4.4. 2 色葉を持つ増加ラベル付き根付き木



からラグランジュ部分代数を構成する.

step.1: 2 色葉を持つ増加ラベル付き根付き木から連結グラフを構成する:



step.2: step.1 で得られたグラフから

$$T_1 := A_1, T_2 := Z_2, T_3 := A_3, V_{12} := Y_{12}, V_{13} := X_{13}, V_{23} := X_{23}$$

と定める. このとき, $\bar{\mathfrak{s}} := \text{span}_{\mathbb{R}}\{A_1, Z_2, A_3, Y_{12}, X_{13}, X_{23}\}$ は \mathfrak{s} のラグランジュ部分代数となっている.

逆に, $\mathcal{S}(n)$ の中の任意のラグランジュ部分代数に対して, 上記の手順の逆を辿ると, 2 色葉を持つ増加ラベル付き根付き木が得られる. つまり, 任意のラグランジュ部分代数 $\bar{\mathfrak{s}} := \text{span}_{\mathbb{R}}\{T_i, V_{jk} | i = 1, \dots, n, 1 \leq j < k \leq n\}$ に対して,

step.1' ($\bar{\mathfrak{s}}$ から “連結グラフ” を構成): $1, \dots, n$ および ∞ のラベルが付いた $n + 1$ 個の頂点を用意する. $T_i = A_i$ のとき, 頂点 i を白く塗り, $T_i = Z_i$ のとき, 頂点 i を黒く

塗る. $V_{ij} = X_{ij}$ のとき, 頂点 i, j を辺で結ぶ ($V_{ij} = Y_{ij}$ のとき, 頂点 i, j を辺で結ばない). また, 根は白く塗り, 各頂点 i と辺で結ぶ.

step.2' (“連結グラフ”から T を構成): step.1' で構成したグラフにおいて, 任意の頂点 $i < j < k$ ($i, j, k \in \{1, \dots, n, \infty\}$) に対して, 3 頂点 i, j, k が全て辺で結ばれているとき, 頂点 i, k を結ぶ辺を消す.

このとき, 得られるグラフは 2 色葉を持つ増加ラベル付き根付き木となる.

定理 4.5. $\mathcal{S}(n)$ 中のラグランジュ部分代数と $(n+1)$ 頂点の 2 色葉を持つ増加ラベル付き根付き木は 1:1 に対応する.

したがって, $(n+1)$ 頂点の 2 色葉を持つ増加ラベル付き根付き木を構成すれば, (原理的には) $\mathcal{S}(n)$ 中の全てのラグランジュ部分代数を構成できたことになる. ここでは詳細は述べないが, [6] では各 n に対して, $(n+1)$ 頂点の 2 色葉を持つ増加ラベル付き根付き木の個数 $\#\mathcal{T}_n$ を与える明示的な式を与えている. 各 n に対して, $\#\mathcal{T}_n$ は以下の通り:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	...
$\#\mathcal{T}_n$	2	6	26	150	1082	9366	94586	1091670	...

(OEIS: A000629 Number of necklaces of partitions of $n+1$ labeled beads.)

注意 4.6. 上記の step. 1', 2' は任意の (ラグランジュ部分代数とは限らない) $\bar{s} \in \mathcal{S}(n)$ に対して考えられるが, これによって得られるグラフが 2 色葉を持つ増加ラベル付き根付き木であることは, $\bar{s} \in \mathcal{S}(n)$ が \mathfrak{s} のラグランジュ部分代数であるかどうかの判定法にはならない. 例えば,

$$\bar{s}_1 := \text{span}_{\mathbb{R}}\{Z_1, A_2, A_3, X_{12}, X_{13}, X_{23}\}, \quad \bar{s}_2 := \text{span}_{\mathbb{R}}\{Z_1, A_2, A_3, X_{12}, Y_{13}, X_{23}\}$$

とすると, step.1', 2' により得られる 2 色葉を持つ増加ラベル付き根付き木は同じグラフとなる. しかしながら \bar{s}_1 は \mathfrak{s} のラグランジュ部分代数であるのに対し, \bar{s}_2 は \mathfrak{s} のラグランジュ部分代数でない.

$T_1 = \{V_1, E_1\}$, $T_2 = \{V_2, E_2\}$ をそれぞれ ∞_1, ∞_2 を根とする 2 色葉を持つ増加ラベル付き根付き木とする. 以下を満たす全単射写像 $\phi: V_1 \rightarrow V_2$ が存在するとき, T_1 と T_2 は同型であると言う:

- $\phi(\infty_1) = \infty_2$,
- $(i, j) \in E_1 \implies (\phi(i), \phi(j)) \in E_2$,

- i が j の子 $\implies \phi(i)$ は $\phi(j)$ の子,
- 頂点 i と $\phi(i)$ は同じ色.

$(n + 1)$ 頂点の 2 色葉を持つ増加ラベル付き根付き木のなす集合の同型類の個数を $\#[\mathcal{T}_n]$ で表す. 各 n に対して, $\#[\mathcal{T}_n]$ は知られている:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	...
$\#[\mathcal{T}_n]$	2	5	13	37	108	332	1042	3360	...

(OEIS: A029856 Number of rooted trees with 2-colored leaves.)

2つの 2 色葉を持つ増加ラベル付き根付き木 T_1, T_2 が同型のとき, T_1, T_2 から得られるラグランジュ部分代数 $\bar{\mathfrak{s}}_1, \bar{\mathfrak{s}}_2$ はリー代数として同型となる. したがって, $\mathcal{S}(n)$ の中のラグランジュ部分代数の同型類の個数は, 高々 $\#[\mathcal{T}_n]$ であることがわかる.

参考文献

- [1] L. Bedulli, A. Gori, Homogeneous Lagrangian submanifolds, *Commun. Anal. Geom.* **16**(3) (2008), 591–615.
- [2] A.J. Di Scala, A. Loi, Symplectic duality of symmetric spaces, *Adv. Math.* **217**(5), (2008), 2336–2352.
- [3] T. Hashinaga, Construction of Lagrangian orbits in some Hermitian symmetric spaces of noncompact type. *Recent Topics in Differential Geometry and Related Fields*, World Scientific (2019), 29–44.
- [4] T. Hashinaga, T. Kajigaya, A class of non-compact homogeneous Lagrangian submanifolds in complex hyperbolic spaces. *Ann. Glob. Anal. Geom.* **51**(1) (2017), 21–33.
- [5] T. Hashinaga, T. Kajigaya, Equivariant realizations of Hermitian symmetric spaces of noncompact type. *Math. Z.* **300** (2022), 2363–2411.
- [6] T. Hashinaga, H. Kurihara, Construction of homogeneous Lagrangian submanifolds via rooted trees. in preparation.
- [7] 梶ヶ谷 徹, 複素双曲空間内の等質ラグランジュ部分多様体, 数理解析研究所講究録, **2017** (2017), 84–102.
- [8] H. Ma, Y. Ohnita, On Lagrangian submanifolds in complex hyperquadrics and isoparametric hypersurfaces in spheres. *Math. Z.* **261**(4) (2009), 749–785.

- [9] D. McDuff, The symplectic structure of Kähler manifolds of nonpositive curvature. *J. Differ. Geom.* **28**(3) (1988), 467–475.
- [10] G. Roos, Jordan triple systems, In: J. Faraut, S. Kaneyuki, A. Korányi, Q. k. Lu, G. Roos (Eds.), *Analysis and Geometry on Complex Homogeneous Domains*, In: *Progr. Math.*, vol. 185, Birkhäuser, Boston, (2000), 425–534.