非コンパクト型エルミート対称空間の同変実現

梶ヶ谷徹　(東京理科大)*

本稿の内容は, 橋永貴弘氏 (佐賀大) との共同研究 [6] に基づく.

1. 序

エルミート多様体 (M, g, J, ω) は, 各点 $x \in M$ においてエルミート構造を保つ点対称 $\sigma_x \in \mathrm{Aut}(M, g, J, \omega)$ が存在するとき, **エルミート対称空間**と呼ばれる. エルミート対称空間は, リーマン対称空間であると同時にケーラー多様体となり, リーマン対称空間の中でも取り分け良い構造を持つ.

以下, M を複素 n 次元の非コンパクト型エルミート対称空間 (HSSNT と略記) とする. エルミート対称空間はいろいろな見方ができるが, 本稿では常に, M をリーマン対称空間 G/K と見る (つまり, $G = \mathrm{Isom}_0(M, g)$, K を原点 $o \in M$ における G の固定部分群として, M を等質空間 G/K と同一視する). 本稿の目的を荒っぽく言うと, この $M = G/K$ を「同じ次元のベクトル空間の中に実現する (埋め込む)」方法を与える, と言うことである.

任意の HSSNT M は単連結完備かつ非正の断面曲率を持つリーマン多様体であることが知られている. 従って, Cartan-Hadamard の定理が示しているように, M は多様体として, ユークリッド空間 $\mathbb{R}^{2n}$ と微分同相になる. 実際, 原点 o における指数写像, あるいはその逆写像 $\mathrm{Log}_o : M \to T_oM \simeq \mathbb{R}^{2n}$ が微分同相写像を与える. 本稿では, この写像 Log_o を M の一つの実現 (埋め込み) とみなす. Log_o は微分同相ではあるが, T_oM を標準的な複素ユークリッド空間 $\mathbb{C}^n$ とみなしたとき, M の複素構造やシンプレクティック構造と言った幾何構造は保たない.

一方, よく知られているように, 任意の HSSNT M は, 複素多様体として, $\mathbb{C}^n$ 内のある有界領域 D として実現できる. すなわち, (M, J) と標準的な複素構造を持つある有界領域 (D, J_o) の間に正則微分同相写像が存在する. このことは最初, É. Cartan の有界対称領域の理論 [1] の中で示されたことになっているが, 現在広く知られている $M = G/K$ から D への正則微分同相写像の構成に, **Harish-Chandra の実現**と呼ばれているものがある. この方法は, 論文 [5] の中で "余談" として記されているが, 半単純リー群の表現論からの洞察に根差した簡潔な構成法を与えている.

80 年代後半, McDuff は, 単連結完備かつ非正の断面曲率を持つケーラー多様体 X に対して, X と標準的なシンプレクティックベクトル空間 $\mathbb{R}^{2n}$ の間にシンプレクティック微分同相写像が存在すること, すなわち大域的 Darboux の定理が成り立つことを示した [7]. 特に, 任意の HSSNT M は, シンプレクティック多様体としては, シンプレクティックベクトル空間 $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_o)$ とみなされる. シンプレクティック幾何としては, これ以上 M について言うことは何もないが, 対称空間の幾何としては, この微分同相の具体的な構成は一つの関心事である. 事実, (M, ω) から $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_o)$ へのシンプレクティック微分同相の具体的な公式は, Di Scala-Loi および Roos によって独立に発見されている (cf. [3]). なお, 彼らの公式は, M を有界対称領域 D と同一視した上で, D に付随する Jordan triple system を用いて与えられていることに注意しておく. (M, ω) から $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_o)$ へのシンプ

部分多様体幾何とリー群作用 2021 講演要旨. 日付: 2022 年 5 月 31 日.
*e-mail: kajigaya@rs.tus.ac.jp

レクティック微分同相は一意的ではないが, [3] で与えられた "標準的な" 微分同相写像をここでは, M の **Di Scala-Loi-Roos の実現**と呼ぶことにする. Harish-Chandra や Di Scala-Loi-Roos の実現については, 論文 [6] にその詳細をまとめておいたので, 合わせて参照して頂きたい.

これまで, 以上の3つの実現 (Log_o, Harish-Chandra および Di Scala-Loi-Roos の実現) は別々に述べられていたように思われるが, 論文 [6] における1つの帰結は, この3つの実現が実際は共通の枠組みの中で記述できる, と言うことである. つまり, [6] において, M の実現のより一般的な構成法を与え, 以上の実現を統一的に再構成した. 特に, この枠組みを通して, それらが共通の性質を持っていると言うことが分かる. 例えば, Harish-Chandra および Di Scala-Loi-Roos の実現を, ある意味で "標準的な" 正則およびシンプレクティック実現として特徴づけることができる. また, M のコンパクト双対 M^* に対して, M の実現の「双対写像」が自然に定義され, 双対写像もまた同様の性質を持つことが示される. さらには, M の実現を通して, M 内の (ある特別な) 部分多様体がどのように実現されているかを把握すると言うこともできる. 本稿では, 論文 [6] の結果に基づき, この M の実現の構成法とそこから分かるいくつかの性質について報告する.

2. K-同変写像

構成の出発点となるのは, 上述の実現がいずれも "K-同変な" 埋め込みであるという事実である. ここで, K は原点 $o \in M$ における G の固定部分群であるが[1], いずれの実現の場合にも, K はベクトル空間 ($\mathbb{R}^{2n}$ または $\mathbb{C}^n$) に適当に作用している. 一般に, 「M から同じ次元のベクトル空間への "K-同変な" 埋め込み」を構成するにはどうしたらよいであろうか? ここでは, これを次のように考える[2]:

以下, $M = G/K$ を複素 n 次元の既約な非コンパクト型エルミート対称空間とする. M に付随するカルタン分解を $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ とかくと, $\mathfrak{p}$ は M の原点 o における接空間 T_oM と自然に同一視できる. M の標準的なケーラー構造を (J, ω), $T_oM \simeq \mathfrak{p}$ 上の複素構造とシンプレクティック構造をそれぞれ J_o, ω_o と書けば, $(\mathfrak{p}, J_o, \omega_o)$ は複素ユークリッド空間 $\mathbb{C}^n$ と同一視できるので, 以降, $\mathfrak{p}$ を $\mathbb{C}^n$ とみなす. また, K はイソトロピー表現を通して, T_oM に作用している. イソトロピー表現は, 随伴表現 $\mathrm{Ad} : K \to SO(\mathfrak{p})$ と同値になるので, 以降, K はこの表現により $\mathfrak{p}$ に作用しているとみなす. 以上の同一視のもと, M から $\mathfrak{p}$ への K-同変な埋め込み

$$\Omega : M \to \mathfrak{p}$$

を構成すると言うことを考える.

なるべく自然に作るために, HSSNT の幾何について, 以下の二つの基本的な事実を思い出す.

(1) **K-作用の極性**: K の $\mathfrak{p}$ への作用は, 極作用である. つまり, 任意の K-軌道は $\mathfrak{p}$ のある部分集合 Σ と直交して交わる. 今の場合[3], この Σ は $\mathfrak{p}$ の極大可換部分空間 $\mathfrak{a}$

---

[1] $M = G/K$ が非コンパクト型のリーマン対称空間の場合, K は G の極大コンパクト部分群になる.

[2] このアイディアは, 数年前の同じ研究集会で別の話をしたときに, 座長をして下さっていた筑波大学の田崎博之先生に示唆して頂いたものである. 田崎先生と講演の機会を与えてくださった小池直之先生に, 改めて感謝致します.

[3] M は非コンパクト型リーマン対称空間で良い.

として取れる. 特に,

$$\mathrm{Ad}(K)\mathfrak{a}=\mathfrak{p}, \quad K\cdot A=M$$

が成り立つ. ここで, $A:=\mathrm{Exp}_o\mathfrak{a}$ である. 本稿では, $\mathfrak{a}$ と A をそれぞれ $\mathfrak{p}$ と M のセクションと呼ぶ.

(2) **Polydisk theorem**: $\mathfrak{a}^{\mathbb{C}}:=\mathfrak{a}\oplus J_o\mathfrak{a}$ とおくと, $A^{\mathbb{C}}:=\mathrm{Exp}_o\mathfrak{a}^{\mathbb{C}}$ は M の複素部分多様体であり, ケーラー多様体として, 双曲平面 $\mathbb{C}H^1(-C)$ の $r:=\mathrm{rank}(M)=\dim_{\mathbb{R}}\mathfrak{a}$ 個の直積への標準的な分解を持つ:

$$A^{\mathbb{C}}\simeq\underbrace{\mathbb{C}H^1(-C)\times\cdots\times\mathbb{C}H^1(-C)}_{r\text{-times}}$$

ここで, $\simeq$ はケーラー多様体として同型と言う意味である. 「標準的な分解」と言う意味を正確に述べておく. まず $\mathfrak{a}$ から定まる制限ルート系 (HSSNT の場合, これは C か BC 型になる) の中の長いルートに対応するルートベクトルたち $\{H_i\}_{i=1}^r$ が $\mathfrak{a}$ の標準的な直交基底を与えることが分かる. さらに各 $i=1,\dots,r$ に対し, $\mathfrak{a}_i^{\mathbb{C}}:=\mathbb{R}H_i+\mathbb{R}J_oH_i$ とおくと, $A_i^{\mathbb{C}}:=\mathrm{Exp}_o\mathfrak{a}_i^{\mathbb{C}}$ は $\mathbb{C}H^1(-C)$ と同型になり, 直交直和分解 $\mathfrak{a}^{\mathbb{C}}=\bigoplus_{i=1}^r\mathfrak{a}_i^{\mathbb{C}}$ に対応して分解

$$A^{\mathbb{C}}\simeq A_1^{\mathbb{C}}\times\cdots\times A_r^{\mathbb{C}}\simeq\mathbb{C}H^1(-C)\times\cdots\times\mathbb{C}H^1(-C)$$

が得られる[4].

K-作用の極性により, 任意の点 $x\in M$ は $x=k\mathrm{Exp}_o v$ $(k\in K,\ v\in\mathfrak{a})$ と書ける (ただし, この表し方は一意的ではないことに注意しておく). このことを使うと, 写像 $\mathrm{Log}_o:M\to\mathfrak{p}$ は,

$$\mathrm{Log}_o(k\mathrm{Exp}_o v)=\mathrm{Ad}(k)v, \quad k\in K,\ v\in\mathfrak{a}$$

と表すことができる. 特に, Log_o は K-同変であり, $\mathrm{Log}_o(A)=\mathfrak{a}$ となっていることに注意する. この状況を拡張して, 次のように K-同変写像を作ることを試みる: はじめにセクションの間の写像

$$\Omega_A:A\to\mathfrak{a}$$

をとり, K-作用の極性を用いて, $\Omega:M\to\mathfrak{p}$ を,

$$\Omega(k\mathrm{Exp}_o v):=\mathrm{Ad}(k)\Omega_A(\mathrm{Exp}_o v), \quad k\in K,\ v\in\mathfrak{a}$$

とおく. Ω は, それが well-defined であれば (つまり $x=k\mathrm{Exp}_o v$ の表し方によらずに定まっていれば), 明らかに K-同変かつ $\Omega(A)\subseteq\mathfrak{a}$ を満たす写像である. しかし, 勝手な Ω_A に対しては, 必ずしも Ω は well-defined にならない. 実際, 次がわかる:

補題 1. Ω が well-defined であるための必要十分条件は, Ω_A が (制限ルート系に付随する) Weyl 群の作用に関して同変になることである.

この補題の詳細を述べる代わりに, 最も簡単だが, 大事な例を挙げておく:

[4] ここでの polydisk の与え方は制限ルート系を用いているので, 古典的な記述の仕方 (例えば [Helgason] など) と異なるが, 結果的に同じものになる.

例 1. $M = \widehat{G}/\widehat{K} = SU(1,1)/S(U(1)\times U(1)) \simeq \mathbb{C}H^1$ とし, 対応する Cartan 分解を $\widehat{\mathfrak{g}} = \widehat{\mathfrak{k}} \oplus \widehat{\mathfrak{p}}$ とかく. この場合, $\widehat{\mathfrak{p}}$ は $\mathbb{C}$ と自然に同一視でき, この同一視のもと, $\widehat{\mathfrak{p}}$ への $\widehat{K}$-作用は, $\mathbb{C}$ への標準的な S^1-作用 $z \mapsto e^{i\theta}z$ と同値になる. 特に, セクションとしては, $\mathbb{C}$ の実軸 $\mathbb{R}$ をとることができる. セクションの間の写像 $\widehat{\Omega}_A$ を

$$\widehat{\Omega}_A(\mathrm{Exp}_o x) = \eta(x) \quad x \in \mathfrak{a} \simeq \mathbb{R}$$

と書けば, $\widehat{\Omega}_A$ は実数値関数 $\eta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ と対応している. ところで, 実軸上の点 $x \in \mathbb{R}$ は, $x = e^{i\pi}(-x)$ と 2 通りに表せるので, $\widehat{\Omega} : \mathbb{C}H^1 \to \widehat{\mathfrak{p}}$ が $\widehat{K}$-同変であるためには,

$$\eta(x) = \widehat{\Omega}(\mathrm{Exp}_o x) = \widehat{\Omega}(e^{i\pi}\mathrm{Exp}_o(-x)) = e^{i\pi}\eta(-x) = -\eta(-x)$$

が任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して成立する必要がある. つまり, $\widehat{\Omega}_A$ に対応する実数値関数 η は**奇関数**でなければならない. 逆に, η が奇関数であれば, $\widehat{\Omega}$ は well-defined になることが確かめられる. これを $\widehat{\Omega} = \Omega_{\eta,0}$ と書けば, $\Omega_{\eta,0}$ は "radial map"

$$\Omega_{\eta,0}(\mathrm{Exp}_o z) = \eta(|z|) \cdot \frac{z}{|z|}, \quad z \in \widehat{\mathfrak{p}} \simeq \mathbb{C}$$

として与えられる (ただし, $\widehat{\Omega}(o) = 0$).

一般の場合に話を戻す. 一般に M の中には $\mathbb{C}H^1$ の r 個の直積 $A^{\mathbb{C}} \simeq A_1^{\mathbb{C}} \times \cdots \times A_r^{\mathbb{C}}$ があることを思い出す (polydisk theorem). このとき, Ω の作り方から, 各 $i = 1, \ldots, r$ に対して, Ω の $A_i^{\mathbb{C}}$ への制限 $\Omega|_{A_i^{\mathbb{C}}}$ は, 自然な同一視 $A_i^{\mathbb{C}} \simeq \mathbb{C}H^1(-C)$ を通して, $\mathbb{C}H^1(-C)$ から $\widehat{\mathfrak{p}}$ へのセクションを保つ $\widehat{K}$-同変写像と同値になることがわかる. 従って, ある奇関数 η_i が存在して, $\Omega|_{A_i^{\mathbb{C}}}$ は例 1 で構成した写像 $\Omega_{\eta_i,0}$ と同値になる. 簡単な考察により, 実際はさらに, この奇関数は各 $A_i^{\mathbb{C}}$ によらないこと, つまり, 次のことが分かる:

命題 1. $\Omega : M \to \mathfrak{p}$ が well-defined であるとする. このとき, ある 1 つの奇関数 $\eta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が存在して, 任意の $i = 1, \ldots, r$ に対して, $\Omega|_{A_i^{\mathbb{C}}}$ は, $\Omega_{\eta,0} : \mathbb{C}H^1(-C) \to \widehat{\mathfrak{p}}$ と同値になる.

逆に, $\Omega_{\eta,0} : \mathbb{C}H^1(-C) \to \widehat{\mathfrak{p}}$ から, M 上の K-同変埋め込みを以下のようにして構成することができる:

(i) まず, 単射な奇関数 $\eta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ に対し, 例 1 で構成した $\mathbb{C}H^1(-C)$ に対する $\widehat{K}$-同変写像 $\Omega_{\eta,0} : \mathbb{C}H^1(-C) \to \widehat{\mathfrak{p}}$ をとる. 単射性により, これは埋め込みになる.

(ii) 次に, (命題 1 を見越して) $\Omega_{\eta,0}$ を polydisk $A^{\mathbb{C}} \simeq \mathbb{C}H^1(-C) \times \cdots \times \mathbb{C}H^1(-C)$ からその接空間 $\mathfrak{a}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{a} \oplus J_o\mathfrak{a}$ への埋め込みに対角的に拡張する. すなわち,

$$\Omega_{\eta,A^{\mathbb{C}}} := \Omega_{\eta,0} \times \cdots \times \Omega_{\eta,0} : A^{\mathbb{C}} \to \mathfrak{a}^{\mathbb{C}}$$

と定める. このとき, $\Omega_{\eta,A} := \Omega_{\eta,A^{\mathbb{C}}}|_A$ とおくと, これは A から $\mathfrak{a}$ への埋め込みになる. また, $\Omega_{\eta,A}$ は, $\mathfrak{a}$ の標準的な直交基底を正規化した基底 $\{\widetilde{H}_i\}_{i=1}^r$ を用いると, 次のように書くことができる:

$$\Omega_{\eta,A}\Big(\mathrm{Exp}_o\Big(\sum_{i=1}^r x_i\widetilde{H}_i\Big)\Big) = \sum_{i=1}^r \eta(x_i)\widetilde{H}_i.$$

(iii) 最後に, K-作用を用いて, $\Omega_{\eta,A}$ を M から $\mathfrak{p}$ への K-同変な写像として拡張する:

$$\Omega_\eta : M \to \mathfrak{p}, \quad \Omega_\eta(k\mathrm{Exp}_o v) := \mathrm{Ad}(k)\Omega_{\eta,A}(\mathrm{Exp}_o v).$$

ここで, $k \in K$, $v \in \mathfrak{a}$ である. このとき, Ω_η は well-defined な K-同変埋め込みになる. この埋め込みを奇関数 η に関する M の**強対角的実現**[5]と呼ぶことにする.

$\Omega_{\eta,A}$ による A の像は, $\mathfrak{a}$ の中の立方体

$$\square_{\eta,\mathfrak{a}} := \Big\{ \sum_{i=1}^{r} x_i \widetilde{H}_i \mid |x_i| < \sup_{x\in\mathbb{R}} \eta(x) \Big\}$$

であり, 強対角的実現 Ω_η による M の像は, ベクトル空間 $\mathfrak{p}$ の中で,

$$\Omega_\eta(M) = \mathrm{Ad}(K)\square_{\eta,\mathfrak{a}}$$

と表せることに注意しておく. つまり, $\eta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が全射ならば $\Omega_\eta(M) = \mathfrak{p}$ であり, そうでなければ, $\Omega_\eta(M)$ は $\mathfrak{p}$ 内の K-不変な有界領域である. このシンプルな描像は, Harish-Chandra の実現ではよく知られていて, その拡張になっている.

ここまでは, M を「非コンパクト型」のエルミート対称空間としてきたが, わずかな変更を加えれば, 「コンパクト型」エルミート対称空間の場合でも同様の K-同変写像の構成が可能である. 一般の構成の詳細については, 論文 [6] を参照して頂きたい. ここでは, その特別な場合として得られる, Ω_η の双対写像の定義だけ与えておく.

そのためには, M 上の強対角的実現 $\Omega_\eta : M \to \mathfrak{p}$ を与える奇関数 $\eta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が実解析的であると仮定する. $M^* = G^*/K$ を M の双対であるコンパクト型エルミート対称空間とし, そのカルタン分解を $\mathfrak{g}^* = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}^*$ とかく. 実軸上で η に一致する原点の周りで定義された正則関数 $\eta^{\mathbb{C}}$ をとり, $\eta^*(x) := -\sqrt{-1}\eta^{\mathbb{C}}(\sqrt{-1}x)$ とおくと, η^* はある開区間 $(-R^*, R^*)$ 上 (ただし, $0 < R^* \leq \pi/2$ とする) で定義できる実奇関数になる. 例えば, $\eta(x) = \tanh x$ (または $\sinh x$) なら, $\eta^*(x) = \tan x$ (または $\sin x$) である. この奇関数 η^* に対して, 原点 $o \in M^*$ のある K-不変開近傍 U_{η^*} で $U_{\eta^*} \subseteq (M^*)^o := M^* \setminus \mathrm{Cut}_o(M^*)$ となるものが取れて, 強対角的実現と同様の方法で, K-同変写像

$$\Omega^*_{\eta^*} : U_{\eta^*} \to \mathfrak{p}^*$$

を定義できる. これを $\Omega_\eta : M \to \mathfrak{p}$ の**双対写像**と呼ぶことにする.

例 2. 奇関数として恒等写像 $\eta = id$ を取ると, $\Omega_{id,0}$ は $\mathbb{C}H^1(-C)$ の Log_o に一致し, これを M 上に拡張した Ω_{id} が M の Log_o に一致する. また, η^* は id 自身であり, それに付随する双対写像 Ω^*_{id} は $(M^*)^o := M^* \setminus \mathrm{Cut}_o(M^*)$ 上で定義された M^* の Log_o に一致する.

3. 正則およびシンプレクティック実現

強対角的実現は, Log_o の拡張と思えるわけであるが, この方法により, M の幾何構造を保つ写像を作る, と言う初めの目的を考えよう. 強対角的実現による構成の 1 つの利点は, M の実現が, $\mathbb{C}H^1$ の実現から得られる, と言う点にある[6].

[5] 写像 Ω_η に対応する写像は, Jordan triple system を用いた文脈の中で, いくつかの文献の中に (暗に) 現れている (例えば [3] など). 上述の構成はその幾何学的な説明と言える.

[6] 「幾何構造を保つ M の実現が, $\mathbb{C}H^1$ のそれから得ることができる」と言う言い方をしているが, 実際のところ, 第 4 章で見るように, M 内の特殊な全測地的部分多様体 N に対しては, M の強対角的実現と N に関する同様の実現が「入れ子状」になっている, と言う構造がある (正確な主張は定理 5 を参照).

もし, $\Omega_\eta : M \to \mathfrak{p}$が正則(またはシンプレクティック)な写像であるとすると, polydisk の各因子$A_i^{\mathbb{C}}$が複素部分多様体であることから, $\Omega_{\eta,0} \simeq \Omega_\eta|_{A_i^{\mathbb{C}}}$もまた正則(またはシンプレクティック)である必要がある. $\Omega_{\eta,0}$は$\mathbb{C}H^1$上の$\widehat{K}$-同変写像だから, そのような性質を持つ$\Omega_{\eta,0}$を見つけることは, $\mathbb{C}H^1$のセクション上で定義されたODEを解くことに帰着される. 実際, 簡単なODEを解くことで, 奇関数として$\eta(x) = \tanh x$ (または$\sinh x$)をとると, $\mathbb{C}H^1$からの正則(またはシンプレクティック)な埋め込み$\Omega_{\eta,0} : \mathbb{C}H^1 \to \widehat{\mathfrak{p}}$が得られることが分かる.

逆に, $\Omega_{\eta,0}$として, この$\mathbb{C}H^1$からの正則(またはシンプレクティック)な埋め込みを取ると, それはMからの正則(またはシンプレクティック)な埋め込みに拡張され, 双対写像もまた同じ性質を持つことが分かる:

定理 2 ([6])**.** *Mを非コンパクト型既約エルミート対称空間, M^*をその双対のコンパクト型エルミート対称空間とし, $(M^*)^o = M^* \setminus \mathrm{Cut}_o(M^*)$とおく. このとき, 次が成り立つ.*

(1) *$\Omega_{\tanh} : (M, J) \to (D, J_o)$は, $\mathfrak{p}$内のあるK-不変有界領域Dの上への正則微分同相写像であり, Aを$\mathfrak{a}$の中へ写すMから$\mathfrak{p}$へのK-同変正則埋め込みとして(定数倍の違いを除き)一意的な写像である.*
また, $\Omega_{\tanh}$の双対写像$\Omega^*_{\tan} : (M^*)^o \to \mathfrak{p}^*$は, $\mathfrak{p}^*$の上への正則微分同相写像である.

(2) *$\Omega_{\sinh} : (M, \omega) \to (\mathfrak{p}, \omega_o)$は, $\mathfrak{p}$の上へのシンプレクティック微分同相写像であり, Aを$\mathfrak{a}$の中へ写すMから$\mathfrak{p}$へのK-同変シンプレクティック埋め込みとして(符号の違いを除き)一意的な写像である.*
また, $\Omega_{\sinh}$の双対写像$\Omega^*_{\sin} : (M^*)^o \to D^*$は, $\mathfrak{p}^*$のあるK-不変有界領域D^*の上へのシンプレクティック微分同相写像である.

さらに, 次を示すことができる:

命題 3. *$\Omega_{\tanh}$および$\Omega_{\sinh}$は, それぞれHarish-ChandraおよびDi Scala-Loi-Roosの実現に(適当な空間の同一視の下)一致する.*

この命題もそれほど明らかではないが, 詳細は[6]を参照して頂きたい.

なお, 定理2の主張において, 「Aを$\mathfrak{a}$の中へ写す」と言う仮定を除くと一意性に関する結果は一般に成り立たない. 実際, [4]では, そのような仮定を満たさないK-同変シンプレクティック微分同相写像を構成している. しかし, 定理2により, $\Omega_{\tanh}$や$\Omega_{\sinh}$は, 「K-作用の極性」と言うリーマン対称空間の基本的な性質に依拠した “標準的な” 正則およびシンプレクティック微分同相写像として特徴づけられることが分かる.

定理2からすぐに従う系を2つ述べておく.

(1) $\mathfrak{p}$と$\mathfrak{p}^*$の間には標準的な同一視がある($\mathfrak{g}$の複素化$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$のなかで$\sqrt{-1}$倍で写り合う)ので, この同一視のもと, 合成写像

$$h := (\Omega^*_{\tan})^{-1} \circ \Omega_{\tanh} : M \to (M^*)^o$$

として, Mから$(M^*)^o$への正則な埋め込みが得られる. つまり, 「Mはそのコンパクト双対M^*に正則に埋め込める」と言うことがわかる. このことはよく知ら

れた事実で, 実際, この写像 h は, **Borel の埋め込み**と呼ばれる写像に (適当な回転による違いを除き) 一致する. また同様に, 合成写像

$$s := (\Omega_{\sinh})^{-1} \circ \Omega^*_{\sin} : (M^*)^o \to M$$

は $(M^*)^o$ から M へのシンプレクティックな埋め込みを与え, M^* の稠密な開集合 $(M^*)^o$ を非コンパクト双対 M にシンプレクティックに埋め込むことができる.

(2) $\mathfrak{p}$ と $\mathfrak{p}^*$ の間の標準的な同一視のもと,

$$(\Omega^*_{\sin})^{-1} \circ \Omega_{\tanh} = (\Omega^*_{\tan})^{-1} \circ \Omega_{\sinh} \tag{1}$$

と言う関係が成り立つ. この関係式は, Di Scala-Loi による論文 [3] の主結果の 1 つを導く: 今, 正則的な実現 $\Omega_{\tanh}$ により M を有界領域 D と同一視し, ケーラー形式 ω も D 上に引き戻して, それを ω_{hyp} と書き, $(D, \omega_{\mathrm{hyp}}, J_o)$ を HSSNT と見ることにする. 同様にして, 正則的な実現 $\Omega^*_{\tan}$ により $(M^*)^o$ を $\mathfrak{p}^*$ と同一視し, $\mathfrak{p}^*$ に引き戻したケーラー形式を ω_{FS} と書いて, $(\mathfrak{p}^*, \omega_{\mathrm{FS}}, J^*_o)$ を $(M^*)^o$ と見る. このとき, 定理 2 より, $\widetilde{\Omega}_{\sinh} := \Omega_{\sinh} \circ \Omega^{-1}_{\tanh} : (D, \omega_{\mathrm{hyp}}) \to (\mathfrak{p}, \omega_o)$ および $\widetilde{\Omega}^*_{\sin} := \Omega^*_{\sin} \circ (\Omega^*_{\tan})^{-1} : (\mathfrak{p}^*, \omega_{\mathrm{FS}}) \to (D^*, \omega_o)$ はそれぞれシンプレクティック微分同相写像であるが, 関係式 (1) から,

$$\widetilde{\Omega}^*_{\sin} = \Omega^*_{\sin} \circ (\Omega^*_{\tan})^{-1} = \Omega_{\tanh} \circ (\Omega_{\sinh})^{-1} = (\widetilde{\Omega}_{\sinh})^{-1}$$

と言う関係があることが分かる. このことを用いると, 次の同値性が従う:

$$\begin{cases} (\widetilde{\Omega}_{\sinh})^* \omega_o = \omega_{\mathrm{hyp}} \\ (\widetilde{\Omega}^*_{\sin})^* \omega_o = \omega_{\mathrm{FS}} \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} (\widetilde{\Omega}_{\sinh})^* \omega_o = \omega_{\mathrm{hyp}} \\ (\widetilde{\Omega}_{\sinh})^* \omega_{FS} = \omega_o \end{cases}$$

最後の式は, $\widetilde{\Omega}_{\sinh}$ が, 2 つの異なるシンプレクティック構造 ω_{hyp} と ω_{FS} を「同時に」保つ写像であると言うことを言っていて, Di Scala-Loi の論文 [3] では, この性質を "**symplectic duality**" と呼んでいる. これは不思議な性質だが, 結果としてそれは, M と $(M^*)^o$ のそれぞれに互いに「双対の」シンプレクティック微分同相写像が存在することと同値になっていることが分かる.

ちなみに以上のことは, 正則実現 $\Omega_{\tanh}$(Harish-Chandra の実現) に対しても同様のことが言えて, この場合は, $\widetilde{\Omega}_{\tanh} := \Omega_{\tanh} \circ \Omega^{-1}_{\sinh}$ が 2 つの異なる複素構造を同時に保つ写像であると言うことが言える (cf. [6]).

4. 全測地的部分多様体の実現

HSSNT M は, 強対角的実現により, 常に同じ次元のベクトル空間かその中の有界領域として実現される. この節では, 強対角的実現によって, M の中の (ある特殊な) 全測地的部分多様体がどのように実現されるかについて述べる.

はじめに, いくつかの例を紹介しておく. 冒頭で述べたように, McDuff は, ケーラー構造をもつアダマール多様体 X から標準的なシンプレクティックベクトル空間 $\mathbb{R}^{2n}$ の上へのシンプレクティック微分同相写像の存在を示したが, その後, Ciriza は, McDuff の与えた写像が, X 内の (ある固定した点を通る) 全測地的な複素部分多様体を $\mathbb{C}^n$ 内の

ある「複素部分空間」に写す, と言うことを示した [2]. Di Scala-Loi も, 彼らが HSSNT の場合に具体的に与えたシンプレクティック微分同相写像 (Di Scala-Loi-Roos 実現) が同じ性質を持つことを示している [3]. 正則ではないシンプレクティック微分同相写像が (原点を通る) 任意の複素部分多様体を $\mathbb{C}^n$ 内のある複素部分空間に写すと言うのは, 面白い性質だが, 少し不思議に見える.

別の例を考えて見る. 複素 1 次元の複素双曲空間 $\mathbb{C}H^1$ の Harish-Chandra の実現による像は, ポアンカレ円板 D である. このとき, $\mathbb{C}H^1$ の原点を通る測地線を考えると, その像は, ポアンカレ円板 D 上の原点を通る「線分」になる. より一般に, 複素 n 次元の複素双曲空間 $\mathbb{C}H^n$ 内の原点を通る全測地的部分多様体の像は, Harish-Chandra の実現により, ある「部分ベクトル空間の有界領域」に写される. Harish-Chandra の実現が等長的ではないにも関わらず, $\mathbb{C}H^n$ の全測地的部分多様体が部分ベクトル空間の一部として実現される理由はなんであろうか?

以上の (一見不思議に見える) 例は, Harish-Chandra や Di Scala-Loi-Roos の実現に関してはいずれも, それらが強対角的実現であると言う事実を用いて説明することができる.

それを説明するために, 1 つだけ言葉を準備をする: $M = G/K$ を HSSNT とし, $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ をそのカルタン分解とする. $\mathfrak{p}$ に含まれる可換な部分空間 $\mathfrak{a}'$ が **Lie triple sytem(LTS) として複素化を持つ**とは, $(\mathfrak{a}')^{\mathbb{C}} := \mathfrak{a}' \oplus J_o\mathfrak{a}'$ が $\mathfrak{p}$ の Lie triple system になること, つまり, $[[(\mathfrak{a}')^{\mathbb{C}}, (\mathfrak{a}')^{\mathbb{C}}], (\mathfrak{a}')^{\mathbb{C}}] \subseteq (\mathfrak{a}')^{\mathbb{C}}$ を満たすこととする. 例えば, 極大可換部分空間 $\mathfrak{a}$ はそのようなものの典型例である. LTS として複素化を持つ $\mathfrak{a}'$ に対し, $(A')^{\mathbb{C}} = \mathrm{Exp}_o(\mathfrak{a}')^{\mathbb{C}}$ は M 内の全測地的な複素部分多様体になる. このとき, 次が分かる:

命題 4. *$\mathfrak{a}'$ を $\mathfrak{p}$ の可換な部分空間とし, その次元を r' $(1 \leq r' \leq r = \mathrm{rank}\, M)$ とする. このとき, 次は同値である.*

(1) *$\mathfrak{a}'$ が LTS として複素化を持つ.*

(2) *$(A')^{\mathbb{C}} := \mathrm{Exp}_o(\mathfrak{a}')^{\mathbb{C}}$ は, $\mathbb{C}H^1$ の r' 個の直積 $\mathbb{C}H^1(-C_1) \times \cdots \times \mathbb{C}H^1(-C_{r'})$ にケーラー多様体として同型である (ただし, 各 $\mathbb{C}H^1$ は互いに等長的でなくても良い).*

つまり, LTS として複素化を持つような $\mathfrak{a}'$ に対し, $(A')^{\mathbb{C}}$ は polydisk の一般化を与える.

本題に戻って, N を M の原点を通る完備な全測地的部分多様体とする. このとき, N はそれ自身リーマン対称空間になるので, N を等質空間 G_N/K_N と同一視し, 付随するカルタン分解を $\mathfrak{g}_N = \mathfrak{k}_N \oplus \mathfrak{p}_N$ と書く. また, $\mathfrak{p}_N$ の極大可換部分空間を $\mathfrak{a}_N$ と書き, その次元を r_N と書く.

今, $\mathfrak{a}_N$ が $\mathfrak{p}$ の中で LTS として複素化を持つと仮定し, $A_N^{\mathbb{C}} := \mathrm{Exp}_o\mathfrak{a}_N^{\mathbb{C}}$ とおく ($A_N^{\mathbb{C}}$ は M の複素部分多様体だが, N に含まれていなくても良い). このとき, 命題 4 により, 強対角的実現のときと同様に, 1 つの奇関数 $\eta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ から写像

$$\Omega_{\eta, A_N^{\mathbb{C}}} := \Omega_{\eta,1} \times \cdots \times \Omega_{\eta, r_N} : A_N^{\mathbb{C}} \to \mathfrak{a}_N^{\mathbb{C}}$$

を定義することができる. また, $\Omega_{\eta, A_N^{\mathbb{C}}}$ の $A_N = \mathrm{Exp}_o\mathfrak{a}_N$ への制限をとることにより, 写像 $\Omega_{\eta, A_N} : A_N \to \mathfrak{a}_N$ が得られる. さらにこれを K_N-作用を用いて N に拡張することで, K_N-同変な写像 $\Omega_{\eta,N} : N \to \mathfrak{p}_N$ が

$$\Omega_{\eta,N}(k_N \mathrm{Exp}_o(v_N)) := \mathrm{Ad}(k_N)\Omega_{\eta,A_N}(\mathrm{Exp}_o(v_N)) \quad (k_N \in K_N, v_N \in \mathfrak{a}_N)$$

となるように得られる．定義から, M の強対角的実現と同様に, $\mathfrak{a}_N$ の中のある立方体 $\square_{\eta,\mathfrak{a}_N}$ に対して,

$$\Omega_{\eta,N}(A_N) = \square_{\eta,\mathfrak{a}_N}, \quad \Omega_{\eta,N}(N) = D_{\eta,N} := \mathrm{Ad}(K_N)\square_{\eta,\mathfrak{a}_N}$$

となっている．ここで, $D_{\eta,N}$ は $\mathfrak{p}_N$ 自身か $\mathfrak{p}_N$ 内のある K_N-不変な有界領域であり, η と N にのみ依存して決まる．

この写像に関して, 次のことがわかる:

定理 5 ([6])**.** M を既約な HSSNT, N を M の原点を通る完備な全測地的部分多様体とする．もし, $\mathfrak{a}_N$ が $\mathfrak{p}$ の中で LTS として複素化を持つならば, 任意の単射な奇関数 $\eta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ に対して,

$$\Omega_\eta|_N = \Omega_{\eta,N} \tag{2}$$

が成立する．ここで, $\Omega_\eta : M \to \mathfrak{p}$ は M の強対角的実現である．特に, 任意の単射な奇関数 $\eta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ に対して, Ω_η は (N, A_N) を $(D_{\eta,N}, \square_{\eta,\mathfrak{a}_N})$ に写す.

逆に, 任意の単射な奇関数 $\eta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ に対して, Ω_η が (N, A_N) を $(D_{\eta,N}, \square_{\eta,\mathfrak{a}_N})$ に写すならば, $\mathfrak{a}_N$ は $\mathfrak{p}$ の中で LTS として複素化を持つ.

この前半部分の主張 (2) は, Di Scala-Loi が [3] の中で, (適当な空間の同一視のもと) $\eta = \sinh$ かつ N が複素部分多様体の場合に示していて, その一般化になっている．Di Scala-Loi は (2) の性質を “遺伝性 (hereditary)” と呼んでいる.

なお, ある特定の η に関しては, 逆の主張は必ずしも成り立たない (例えば $\eta = id$ とすると, 任意の N に対し, (N, A_N) が $(D_{\eta,N}, \square_{\eta,\mathfrak{a}_N})$ に写される)．しかし例えば, $\eta = \tanh$ や $\sinh$ のときは, Ω_η により (N, A_N) が $(D_{\eta,N}, \square_{\eta,\mathfrak{a}_N})$ に写されるような N は, $\mathfrak{a}_N$ が $\mathfrak{p}$ の中で LTS として複素化を持つものに限ることがわかる.

定理 5に基づいて, この節の冒頭に述べた 2 つの例を説明してみよう．N は原点を通る完備な全測地的部分多様体とする.

例 3. N を M の複素部分多様体とすると, N はそれ自身 HSSNT になり, 特に $\mathfrak{a}_N$ は $\mathfrak{p}$ の中で LTS として複素化を持つ．シンプレクティックな実現 (Di Scala-Loi-Roos の実現) $\Omega_{\sinh} : M \to \mathfrak{p}$ を考えると, $\Omega_{\sinh,N} : N \to \mathfrak{p}_N$ は N から $\mathfrak{p}_N$ の上へのシンプレクティック微分同相写像であり, 定理 5から, $\Omega_{\sinh}(N) = \Omega_{\sinh,N}(N) = \mathfrak{p}_N$ が成り立つ．つまり, $\Omega_{\sinh}$ により, N はそれ自身の接空間 $\mathfrak{p}_N \simeq T_oN$ として実現される．$\mathfrak{p}_N$ は $\mathfrak{p}$ の複素部分空間だから, これが, この節の冒頭に述べた, Di Scala-Loi-Roos の実現が「複素部分多様体を複素部分空間に写す」ということの理由である.

例 4. $M = \mathbb{C}H^n$ とすると, $\mathbb{C}H^n$ の階数が 1 だから, $\mathbb{C}H^n$ 内の (次元が 1 以上の) 原点を通る任意の全測地的部分多様体 N に対し常に $\dim_{\mathbb{R}}\mathfrak{a}_N = \dim_{\mathbb{R}}\mathfrak{a} = 1$ が成り立つ．特に, $\mathfrak{a}_N (= \mathfrak{a})$ は $\mathfrak{p}$ の中で LTS として複素化を持つ．従って, 例えば正則な実現 (Harish-Chandra の実現) $\Omega_{\tanh} : M \to \mathfrak{p}$ を考えると, $\Omega_{\tanh}(N) = \Omega_{\tanh,N}(N) = D_{\tanh,N} \subset \mathfrak{p}_N$ となり, N は $\mathfrak{p}_N$ 内の有界領域として実現されることになる.

なお, この例の場合, $\mathbb{C}H^n$ の階数が 1 と言うことが使われている．実際, M の階数が 2 以上の場合は, 原点を通る全ての全測地的部分多様体がある部分ベクトル空間 (の一部) として実現されるわけではない．しかし例えば, N が maximal rank (つまり, $\dim_{\mathbb{R}}\mathfrak{a}_N = \dim_{\mathbb{R}}\mathfrak{a}$) の場合には, 同様に N は $\mathfrak{p}_N$ 内の有界領域として実現されることがわかる.

最後に, もう1つ別の例を挙げておく.

例 5. M 上の反正則的対合 $\tau : M \to M$ の固定点の連結部分集合のことを M の**実形**と呼ぶ. 実形は M の全測地的なラグランジュ部分多様体になることが知られている. N が実形ならば, $\mathfrak{a}_N$ は $\mathfrak{p}$ の中で LTS として複素化を持つことがわかる (このことは上の2つの例ほど明らかではないが, 詳細は [6] を参照して頂きたい). 従って定理5より, 実形もまた, 強対角的実現 (例えば Log_o や Harish-Chandra および Di Scala-Loi-Roos の実現) により, $\mathfrak{p}$ の部分ベクトル空間かその中の有界領域として実現される.

以上の文脈の中で自然に現れた「$\mathfrak{a}_N$ が LTS として複素化を持つ」という性質を持つ全測地的部分多様体のクラスは, maximal rank なものや複素部分多様体, 実形と言った例を含んでいるだけでなく, 定理5が示唆しているように, M の幾何とうまく整合が取れているもののように思われる. 定理5はこのクラスを特徴付けるものではあるが, このクラスが M の全測地的部分多様体全体の中でどのような位置付けにあるのかは興味深い.

参考文献

[1] É. Cartan. *Sur les domaines bornés homogènes de l' espace de n variables complexes.* Abh. Math. Sem. Uniw. Hamburg **11** (1935), no. 1, 116–162.

[2] E. Ciriza. *On special submanifolds in symplectic geometry.* Differ. Geom. Appl. 3(1), 91–99 (1993)

[3] A.J. Di Scala and A. Loi. *Symplectic duality of symmetric spaces.* Adv. Math. **217** (2008), no. 5, 2336–2352.

[4] A.J. Di Scala, A. Loi and G. Roos. *The bisymplectomorphism group of a bounded symmetric domain.* Transform. Groups **13** (2008), no. 2, 283–304.

[5] Harish-Chandra. *Representations of semisimple Lie groups. VI. Integrable and square integrable representations.* Amer. J. Math. **78** (1956), 564–628.

[6] T. Hashinaga and T. Kajigaya. *Equivariant realizations of Hermitian symmetric space of noncompact type.* Math. Z. **300** (2022) 2363–2411.

[7] D. McDuff. *The symplectic structure of Kähler manifolds of nonpositive curvature.* J. Differential Geom. **28** (1988), no. 3, 467–475.