Super Ricci flow に沿った Bamler-Zhang 型熱核評価

國川 慶太 (宇都宮大学)

本研究の内容は, 埼玉大学の櫻井陽平氏との共同研究である.

1 背景

時間発展するリーマン多様体 $(M^n, g(t))_{t\in[0,T)}$ を考える. 特に, リーマン計量が

$$\partial_t g = -2\,\mathrm{Ric}$$

を満たすとき, $(M^n, g(t))_{t\in[0,T)}$ をリッチフローという. 以下, M はコンパクトとする. リッチフローがいつ長時間解, すなわち $T = +\infty$ となる解を持つかを考えるのは基本的な問いあり, これに関しては Hamilton [3] が先駆的な仕事がある. 彼は, もし $T < +\infty$ であれば, リッチフローは $t \nearrow T$ で曲率テンソル Rm のノルムが発散してしまうという意味で特異性を持つことを示した. すなわち,

$$\lim_{t\nearrow T} \sup_M |\mathrm{Rm}| = +\infty.$$

この結果から, $|\mathrm{Rm}|$ を時間によらない定数で上から評価できれば, $T = +\infty$ と結論づけることができる. つまり, リッチフローの長時間解の存在を示すためには, $|\mathrm{Rm}|$ を時間によらず評価すればよいわけである. ところが曲率テンソル Rm を評価するというのは強い条件であり, もう少し曲率の条件を弱めたくなる. この問題については, Sesum [8] が肯定的に解決している. 彼女は, Hamilton と同じ設定のもと,

$$\limsup_{t\nearrow T} \sup_M |\,\mathrm{Ric}\,| = +\infty$$

が成り立つことを示した. この結果により, $|\,\mathrm{Ric}\,|$ が時間によらず有界ならば, $T = +\infty$, つまりリッチフローは長時間解を持つと言える. さて, もちろん次に気になるのはスカラー曲率 R である. Hamilton と Sesum の結果を, スカラー曲率 R の条件にまで弱められるかどうかが問題である. つまり, $T < +\infty$ のとき,

$$\limsup_{t\nearrow T} \sup_M R = +\infty$$

は成り立つだろうか. もしこれが成り立つのなら, スカラー曲率 R の有界性から長時間解の存在を示すことができる. しかし, この問題は一般には未解決であり, 低次元や Kähler Ricci flow の場合に限定して解答が得られているだけである. リッチフローやその特異性研究に限らず, リーマン幾何や幾何解析において, スカラー曲率だけをコントロールして何らかの結果を出すという研究は, 未だ発展途上にある.

このような背景に基づき, Bamler-Zhang はスカラー曲率の有界性のもとで, 広くリッチフローの性質を調べ, この分野の研究を発展させた. 彼らは論文 [1] の中で, リッチフローに沿った

(a) distance distortion estimate
(b) よいカットオフ関数の構成
(c) 平均値不等式の証明

などを行っている. Distance distortion estimate は, リッチフローに沿って異なる時刻での距離を比較する評価である. リッチフローの定義式を見ると, リーマン計量の時間微分が Ric でコントロールされているわけなので, $|\operatorname{Ric}|$ の有界性を仮定すれば, 簡単に distance distortion estimate に相当するものを導出できる. しかし, スカラー曲率 R の有界性だけから distance distortion estimate を出すのは容易ではなく, 非常に繊細な評価の積み重ねが要求される. さらに, Bamler-Zhang は上記 3 つの道具 (a), (b), (c) を駆使し,

- 熱核のガウス型評価
- 後方擬局所性定理
- 強 ε 正則性定理

などを示している.

2 今回の設定

今回の話では, Bamler-Zhang [1] の設定を, リッチフローよりも一般の幾何学的フロー (super Ricci flow) に拡張する. 以下, $(M^n, g(t))_{t\in[0,T)}$ は super Ricci flow

$$\partial_t g \geq -2\operatorname{Ric}$$

を満たすとする. ただし, M はコンパクト, $T < +\infty$ とする. 主結果を紹介するため, 次のような微分量を紹介しておく: (時間依存してもよい) ベクトル場 V に対し,

$$\mathcal{D}(V) := \partial_t H - \Delta H - 2|h|^2 + 4\operatorname{div}(h) - 2\langle \nabla H, V\rangle + 2\operatorname{Ric}(V,V) - 2h(V,V).$$

ここで,

$$h := -\frac{1}{2}\partial_t g, \quad H := \operatorname{tr} h$$

とおいた. 微分量 $\mathcal{D}(V)$ は, Müller [6] により導入されたので, 我々はこれを Müller quantity と呼んでいる. Müller quantity $\mathcal{D}(V)$ は複雑に見えるが, 実は通常のリッチフローでは $\mathcal{D}(V) = 0$ となっている. また, 実は一般の幾何学的フローで Perelman の $\mathcal{F}$ 汎関数や $\mathcal{W}$ 汎関数 (に相当するもの) を考えると, その第 1 変分の被積分関数として $\mathcal{D}(V)$ が自然に現れることが知られている ([2] 参照). 特に, 任意の V に対して $\mathcal{D}(V) \geq 0$ ならば, 幾何学的フローに沿って $\mathcal{F}$ 汎関数と $\mathcal{W}$ 汎関数が単調量であることが従う. また, $\mathcal{D}(V)$ を最初に導入した Müller 自身は, 一般の幾何学的フロー沿って, $\mathcal{D}(V) \geq 0$ ならば Perelman の簡約体積 (に相当するもの) が単調量となることを示し

ている. 幾何学的フローにおいて, $\mathcal{F}$ 汎関数, $\mathcal{W}$ 汎関数, そして簡約体積の単調性などから, 幾何解析的に有用な様々な結果を導くことができる. そのため, 本研究では $\mathcal{D}(V) \geq 0$ を仮定することにした. 例えば, $\mathcal{W}$ 汎関数の単調性から (log-)Sobolev 不等式が得られるが ([2] 参照), これは本研究においても使用している.

ここで, super Ricci flow $\partial_t g \geq -2\,\mathrm{Ric}$ かつ $\mathcal{D}(V) \geq 0$ を満たす例を紹介しておく.

(1) 通常のリッチフロー. この場合, $\mathcal{D}(V) \equiv 0$ である.

(2) 時間依存しない通常のリーマン多様体 (M, g_0) を考え, $g(t) \equiv g_0$ とする (つまり static なフロー). このとき, $\mathrm{Ric}(g_0) \geq 0$ であれば, (M, g_0) は自明に super Ricci flow を満たす. また, やはり自明に $\mathcal{D}(V) \equiv 0$ である.

(3) List flow. これはリッチフローと熱方程式を連立させた幾何学的フローで, List により導入された [5].

(4) Müller flow. List flow の一般化として, リッチフローと調和写像流を連立させた幾何学的フロー. Müller により導入された [7].

(5) 非負断面曲率を持つローレンツ多様体内の空間的超曲面に関する平均曲率流.

(6) Twisted Kähler-Ricci flow.

3 主結果

今回の講演で紹介した主結果は, Bamler-Zhang [1] の結果の一部であるガウス型熱核評価を, super Ricci flow かつ $\mathcal{D}(V) \geq 0$ という設定に拡張したことである. M の 2 点 $x, y \in M$, そして異なる時刻 $s, t \in [0, T)$, $s < t$ に対し, フローに沿った熱方程式 $\partial_t u = \Delta_{g(t)} u$ の熱核を $G(x, t; y, s)$ で表す. つまり, $(y, s) \in M \times [0, T)$ を固定するとき

$$(\partial_t - \Delta_x) G(\cdot, \cdot; y, s) = 0, \quad \lim_{t \searrow s} G(\cdot, t; y, s) = \delta_y.$$

定理 (K.-Sakurai [4]). M^n をコンパクト, $T < +\infty$ とし, super Ricci flow $(M, g(t))_{t \in [0,T)}$ を考える. また, 任意のベクトル場 V に対し $\mathcal{D}(V) \geq 0$ を仮定する. このとき, 任意の $A > 0$ に対し, 定数 $C_1, C_2, C_3, C_4 > 0$ が存在し, 次のことが成り立つ: もし

$$H \leq H_1 \ (H_1 > 0 : \text{定数}), \quad t - s \leq A H_1, \quad s \geq (t-s)/A \ (\text{ただし}\, s, t \in [0, T),\, s < t)$$

ならば,

$$\frac{C_1}{(t-s)^{n/2}} \exp\left(-\frac{C_2 d_s(x,y)^2}{t-s}\right) \leq G(x, t; y, s) \leq \frac{C_3}{(t-s)^{n/2}} \exp\left(-\frac{C_4 d_s(x,y)^2}{t-s}\right).$$

ここで, 定数 $C_1 \sim C_4$ は $n, T, g(0), A$ のみに依存する.

主張が入り組んでおり少々わかりづらいが, 要するに super Ricci flow でスカラー曲率に相当する量 H が有界であるとき, 適当な時間区間内で熱核のガウス型評価を導出したということであ

る．これは, Bamler-Zhang [1] がスカラー曲率有界なリッチフローで示したガウス型熱核評価を, super Ricci flow かつ $\mathcal{D}(V) \geq 0$ という設定に拡張したものになっている．

証明の骨格は, Bamler-Zhang [1] がすでにリッチフローの場合に組み上げていたものと同じである．我々の貢献は, super Ricci flow かつ $\mathcal{D}(V) \geq 0$ という設定が, Bamler-Zhang の幾何解析的手法と全てうまく噛み合って機能することを発見した点にある．Bamler-Zhang の証明は非常に複雑かつ緻密な評価を多数積み重ねたものであり, どのような設定であればうまく一般化できるかは一見しただけではわからない．彼らの手法がうまく機能するかどうかを, 一つ一つ精査しなければならないところにこの研究の困難さがある．例えば, Bamler-Zhang の証明でキーポイントとなるのは (a) distance distortion estimate であるが, その証明では熱方程式 $\partial_t u = \Delta_{g(t)} u$ の解に対して $|\Delta_{g(t)} u|$ を評価する場面が現れる．我々は, 一般の幾何学的フローにおいて $|\Delta u|$ の評価途中で $\mathcal{D}(V)$ が現れることに気づき, 詳細な計算の結果, super Ricci flow かつ $\mathcal{D}(V) \geq 0$ の仮定のもとでは全てうまく機能すると確認できたわけである．なお, 今回の設定が, いつもうまく機能するとは限らないことにも注意が必要である．例えば, Bamler-Zhang [1] の他の主結果である「後方擬局所性定理」及び「強 ε 正則性定理」を示すためには, 曲率テンソルの高階微分評価 (Shi 型評価) などが必要であるが, こういったものには基本的には太刀打ちできない．というのも, super Ricci flow は計量の時間発展が不等式でしか与えられておらず, 具体的にどのような時間発展をするかの情報がほとんどないからである．情報が少なすぎて, $\mathcal{D}(V) \geq 0$ という仮定を追加しても状況が改善されることはないだろうというのが, 現状での我々の見解である．

参考文献

[1] R. H. Bamler and Q. S. Zhang, *Heat kernel and curvature bounds in Ricci flows with bounded scalar curvature*, Adv. Math. **319** (2017), 396–450.

[2] S. Fang and T. Zheng, *The (logarithmic) Sobolev inequalities along geometric flow and applications*, J. Math. Anal. Appl. **434** (2016), no. 1, 729–764.

[3] R. S. Hamilton, *Three-manifolds with positive Ricci curvature*, J. Differential Geometry **17** (1982), no. 2, 255–306.

[4] K. Kunikawa and Y. Sakurai, *Gaussian heat kernel estimates of Bamler-Zhang type along super Ricci flow*, preprint, arXiv:2104.05191.

[5] B. List, *Evolution of an extended Ricci flow system*, Comm. Anal. Geom. **16** (2008), no. 5, 1007–1048.

[6] R. Müller, *Monotone volume formulas for geometric flows*, J. Reine Angew. Math. **643** (2010), 39–57.

[7] R. Müller, *Ricci flow coupled with harmonic map flow*, Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4) **45** (2012), no. 1, 101–142.

[8] N. Sesum, *Curvature tensor under the Ricci flow*, Amer. J. Math. **127** (2005), no. 6, 1315–1324.