Hermann 作用から誘導される path 群作用の軌道の幾何学

森本 真弘（大阪公立大学数学研究所）

1　序論

ユークリッド空間の部分多様体の一般化として，ヒルベルト空間の部分多様体を考えることができる．第二基本形式，形作用素，法接続といった部分多様体の基本量は，ヒルベルト空間の部分多様体に対しても同様に定義できるが，形作用素のスペクトル理論は一般に難解である．R. S. Palais と C.-L. Terng は 1988 年に，**proper Fredholm (PF) 部分多様体**というヒルベルト空間の部分多様体のクラスを導入した ([21], [26])．その定義から，PF 部分多様体の形作用素は自己共役なコンパクト作用素となり，そのスペクトルの幾何学的な取り扱いが可能となる．更に，R. S. Palais や S. Smale らが構築した無限次元微分トポロジーやモース理論 ([20], [23], [24]) を，PF 部分多様体に対して適応することができる．その後の G. Thorbergsson や E. Heintze らの研究を通して，有限次元部分多様体幾何学への応用や，(affine) Kac-Moody 対称空間と呼ばれる無限次元対称空間との関わりが明らかとなり，PF 部分多様体は，幾何学における 1 つの重要な研究対象として認知されるようになった．

PF 部分多様体の重要な例として，ある種の path 群作用の軌道が挙げられる ([27])．特に，Hermann 作用 ([7], [8]) と呼ばれるコンパクト対称空間への作用に対して，同伴する path 群作用が，Kac-Moody 対称空間のイソトロピー表現に相当することが知られており，その軌道の部分多様体幾何学を研究することは重要な問題である．本講演では，Hermann 作用に同伴する path 群作用の軌道の部分多様体幾何学について，講演者の研究で得られた結果を紹介する.[1]

2　準備

G を連結コンパクト半単純リー群，K を G の対称部分群とする．つまり，G の対合 σ であって条件 $G_0^\sigma \subset K \subset G^\sigma$ を満たすものが存在する．ここで G^σ は σ による固定部分群, G_0^σ はその単位元成分を表す．G，K のリー代数をそれぞれ $\mathfrak{g}$，$\mathfrak{k}$ で表す．σ が引き起こす $\mathfrak{g}$ 上の対合的自己同型も，同じ記号 σ で表す．σ による ± 1 固有空間分解を $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{m}$ で表す．Killing 形式の負定数倍から誘導される $\mathrm{Ad}(G)$ 不変内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ を $\mathfrak{g}$ に固定し，対応する両側不変計量を G に固定，更に正規等質計量を等質空間 G/K に固定する．このとき G/K はコンパクト型対称空間であり，自然な射影 $\pi : G \to G/K$ はリーマン沈め込みとなる．

---

[1]本稿は，研究集会「部分多様体幾何とリー群作用 2021」（2022 年 3 月 20 日〜3 月 21 日，オンライン開催）の講演記録である．本研究は，科研費 20K22309 および大阪公立大学数学研究所（文科省共同利用・共同研究拠点「数学・理論物理の協働・共創による新たな国際的研究・教育拠点」JPMXP0619217849）の助成を受けたものである．

閉区間 $[0,1]$ から G へのソボレフ H^1-path 全体の成す path 群を $\mathcal{G} := H^1([0,1],G)$ で表す．$[0,1]$ から $\mathfrak{g}$ への L^2-path 全体の成す path 空間を $V_{\mathfrak{g}} := L^2([0,1],\mathfrak{g})$ で表す．ここで，$\mathcal{G}$ はヒルベルト・リー群となり，$V_{\mathfrak{g}}$ は可分なヒルベルト空間となる．$\mathcal{G}$ は $V_{\mathfrak{g}}$ に**ゲージ変換**

$$g * u = gug^{-1} - g'g^{-1}$$

により作用する．これは，等長かつ推移的な proper Fredholm (PF) 作用となる ([21], [26])．$G \times G$ の閉部分群 L に対して，部分群

$$P(G,L) = \{g \in \mathcal{G} \mid (g(0), g(1)) \in L\}$$

は $V_{\mathfrak{g}}$ にゲージ変換で作用する．この作用は,（推移的とは限らない）等長な PF 作用となる．作用が PF であることから，$P(G,L)$ 作用の各軌道は $V_{\mathfrak{g}}$ の PF 部分多様体となる．

各要素 $u \in V_{\mathfrak{g}}$ に対し，線形常微分方程式

$$g^{-1}g' = u, \quad g(0) = e \in G$$

の一意解を $g_u \in \mathcal{G}$ で表す．ここで，写像 $\Phi : V_{\mathfrak{g}} \to G$ を

$$\Phi(u) = g_u(1)$$

により定義し，これを（G 上の）**平行移動写像**と呼ぶ ([27], [28])．平行移動写像はリーマン沈め込み写像となり，同時に，基点ループ群 $\Omega_e(G)$ を構造群とする主束となる．更に，合成

$$\Phi_K := \pi \circ \Phi : V_{\mathfrak{g}} \to G \to G/K$$

もリーマン沈め込みとなり，これは G/K 上の平行移動写像と呼ばれる．一般に，G/K の閉部分多様体 N に対して，逆像 $\Phi_K^{-1}(N)$ は $V_{\mathfrak{g}}$ の PF 部分多様体となる．

G は G/K に，左移動

$$b \cdot (aK) := (ba)K$$

により等長に作用する．また，$G \times G$ は G に

$$(b,c) \cdot a := bac^{-1}$$

により等長に作用する．π と Φ は次の同変性を持つ ([27])：

$$\pi((b,c)\cdot a) = b \cdot \pi(a) \qquad (b,c) \in G \times K,\ a \in G,$$
$$\Phi(g * u) = (g(0), g(1)) \cdot \Phi(u) \qquad g \in \mathcal{G}, u \in V_{\mathfrak{g}}.$$

これらの性質から，次が従う：

$$\Phi_K(g * u) = g(0)\Phi_K(u) \qquad g \in P(G, G \times K),\ u \in V_{\mathfrak{g}}.$$

H を G の閉部分群とする.（後のセクションにおいて，H が対称部分群であると仮定する.）H のリー代数を $\mathfrak{h}$ で表し，直交直和分解を $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{p}$ で表す．このとき，H は G/K に，$H \times K$ は G に，$P(G, H \times K)$ は $V_{\mathfrak{g}}$ に，それぞれ等長に作用する．このとき，各作用の軌道について，次が成り立つ ([27]):

$$(H \times K) \cdot a = \pi^{-1}(H \cdot aK), \qquad P(G, H \times K) * u = \Phi^{-1}((H \times K) \cdot \Phi(u)).$$

よって，次が従う．

$$P(G, H\times K)*u = \Phi_K^{-1}(H\cdot\Phi_K(u)).$$

以上の結果は，次の可換図式としてまとめられる：

$$\begin{array}{ccccccccc}
\mathcal{G} & \supset & P(G,H\times K) & \curvearrowright & V_{\mathfrak{g}} & \supset & P(G,H\times K)*u & = & \Phi^{-1}((H\times K)\cdot a) \\
\psi\downarrow & & \psi\downarrow & & \Phi\downarrow & & \Phi\downarrow & & \Phi\downarrow \\
G\times G & \supset & H\times K & \curvearrowright & G & \supset & (H\times K)\cdot a & = & \pi^{-1}(H\cdot aK) \\
p\downarrow & & p\downarrow & & \pi\downarrow & & \pi\downarrow & & \\
G & \supset & H & \curvearrowright & G/K & \supset & H\cdot aK & & (\Phi(u)=a),
\end{array}$$

ここで p は第一成分への射影を表し，ψ は写像 $g\mapsto(g(0),g(1))$ を表す．π および Φ のファイバーの極小性から，次の条件は同値になる：軌道 $H\cdot aK$ は G/K の極小部分多様体である，軌道 $(H\times K)\cdot a$ は G 極小部分多様体である， 軌道 $P(G,H\times K)*u$ は $V_{\mathfrak{g}}$ の極小 PF 部分多様体である ([11], [5]).

A をコンパクト・リー群，X をリーマン多様体とする．X が **polar** であるとは，ある連結閉部分多様体 $\Sigma\subset X$ が存在して，X が各 A 軌道と交わり，各交点で直交することをいう．このような Σ を A 作用の**セクション**という．Σ は X の全測地的部分多様体となることが従う．Σ が誘導計量に関して平坦であるとき，A 作用は **hyperpolar**([8], [6]) であるという．ヒルベルト空間への PF 作用に対して，超極作用の概念を同様に定義することができる． 次の条件は同値となる ([6], [27], [3]):

(i) 作用 $H\curvearrowright G/K$ は超極,
(ii) 作用 $H\times K\curvearrowright G$ は超極,
(iii) 作用 $P(G,H\times K)\curvearrowright V_{\mathfrak{g}}$ は超極.

3 Hermann 作用の軌道の部分多様体幾何学

G/K をコンパクト型対称空間，H を G の**対称**部分群とする．このとき作用 $H\curvearrowright G/K$ は **Hermann 作用**と呼ばれる（[7], [8]）．本節では，Hermann 作用の軌道の部分多様体幾何学に関する既知の基本的結果をまとめる．詳細は Goertsches-Thorbergsson [2]，井川 [9]，大野 [19] を参照されたい．以下，G の対合 σ，τ であって条件 $G_0^\sigma\subset K\subset G^\sigma$，$G_0^\tau\subset H\subset G^\tau$ を満たすものを固定する．対合 σ，τ 関する $\mathfrak{g}$ の ±1 固有空間分解をそれぞれ $\mathfrak{g}=\mathfrak{k}+\mathfrak{m}$，$\mathfrak{g}=\mathfrak{h}+\mathfrak{p}$ で表す．$\mathfrak{m}\cap\mathfrak{p}$ の極大可換部分空間 $\mathfrak{t}$ を選び固定する．このとき Hermann 作用は，$\Sigma:=\pi(\exp\mathfrak{t})$ をセクションとする超極作用である ([8], [6]).

極大可換部分空間 $\mathfrak{t}$ に関する $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ のルート空間分解を考える：

$$\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{g}(0) + \sum_{\alpha\in\Delta}\mathfrak{g}(\alpha),$$

$$\begin{aligned}
\mathfrak{g}(0) &= \{z\in\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} \mid \forall\eta\in\mathfrak{t},\ \mathrm{ad}(\eta)z=0\},\\
\mathfrak{g}(\alpha) &= \{z\in\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} \mid \forall\eta\in\mathfrak{t},\ \mathrm{ad}(\eta)z=\sqrt{-1}\langle\alpha,\eta\rangle z\}.
\end{aligned}$$

ここで $\Delta = \Delta(\sigma,\tau) = \{\alpha \in \mathfrak{t}\backslash\{0\} \mid \mathfrak{g}(\alpha) \neq \{0\}\}$ は $\mathfrak{t}$ のルート系となる．定義から $\overline{\mathfrak{g}(\alpha)} = \mathfrak{g}(-\alpha)$（$\overline{}$ は複素共役）が成り立つので，実形式は

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 + \sum_{\alpha\in\Delta^+} \mathfrak{g}_\alpha,$$

$$\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}(0)\cap\mathfrak{g}, \qquad \mathfrak{g}_\alpha = (\mathfrak{g}(\alpha)+\mathfrak{g}(-\alpha))\cap\mathfrak{g}$$

となる．ここで

$$\begin{aligned}\mathfrak{g}_0 &= \{x\in\mathfrak{g} \mid \forall\eta\in\mathfrak{t},\ \mathrm{ad}(\eta)x = 0\},\\ \mathfrak{g}_\alpha &= \{x\in\mathfrak{g} \mid \forall\eta\in\mathfrak{t},\ \mathrm{ad}(\eta)^2x = -\langle\alpha,\eta\rangle^2 x\}\end{aligned}$$

と表せる．σ と $\mathrm{ad}(\eta)^2$ が可換であることから，分解

$$\mathfrak{k} = \mathfrak{k}_0 + \sum_{\alpha\in\Delta^+} \mathfrak{k}_\alpha, \qquad \mathfrak{m} = \mathfrak{m}_0 + \sum_{\alpha\in\Delta^+} \mathfrak{m}_\alpha.$$

$$\mathfrak{k}_0 = \mathfrak{g}_0\cap\mathfrak{k}, \qquad \mathfrak{m}_0 = \mathfrak{g}_0\cap\mathfrak{m},$$

$$\mathfrak{k}_\alpha = \mathfrak{g}_\alpha\cap\mathfrak{k}, \qquad \mathfrak{m}_\alpha = \mathfrak{g}_\alpha\cap\mathfrak{m}$$

を得る．ここで，$\mathfrak{g}_\alpha$ の直交変換 ψ_α を

$$\psi_\alpha(x) := \frac{1}{\langle\alpha,\alpha\rangle}\,\mathrm{ad}(\alpha)x, \quad x\in\mathfrak{g}_\alpha$$

により定義する．同値な定義は

$$\psi_\alpha(z+\bar{z}) := \sqrt{-1}(z-\bar{z}), \qquad z\in\mathfrak{g}(\alpha)$$

である．ここで $\sigma\circ\psi_\alpha = -(\psi_\alpha\circ\sigma)$ より，等長写像 $\psi_\alpha : \mathfrak{m}_\alpha \to \mathfrak{k}_\alpha$ が誘導される．

$$m(\alpha) := \dim\mathfrak{k}_\alpha = \dim\mathfrak{m}_\alpha$$

とおく．$\mathfrak{k}_\alpha$ の基底 $\{x_i^\alpha\}_{i=1}^{m(\alpha)}$ に対して $x_i^\alpha := \psi_\alpha(y_i^\alpha)$ とおくことで，$\mathfrak{m}_\alpha$ の基底 $\{y_i^\alpha\}_{i=1}^{m(\alpha)}$ であって任意の $\eta\in\mathfrak{t}$ に対して条件

$$[\eta, x_i^\alpha] = -\langle\alpha,\eta\rangle y_i^\alpha, \qquad [\eta, y_i^\alpha] = \langle\alpha,\eta\rangle x_i^\alpha$$

が成り立つものが得られる．

ここで，合成

$$\sigma\circ\tau : \mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$$

を考え，その固有空間分解

$$\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} = \sum_{\epsilon\in U(1)} \mathfrak{g}(\epsilon),$$

$$\mathfrak{g}(\epsilon) = \{z\in\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} \mid (\sigma\circ\tau)(z) = \epsilon z\}$$

を考える．各 $\epsilon \in U(1)$ に対して $\arg\epsilon$ はその偏角であって $-\pi < \arg\epsilon \leq \pi$ を満たすものを表す．$\sigma \circ \tau$ は $\mathrm{ad}(\eta)$ と可換なので，分解

$$\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} = \sum_{\epsilon \in U(1)} \mathfrak{g}(0,\epsilon) + \sum_{\alpha\in\Delta}\sum_{\epsilon\in U(1)} \mathfrak{g}(\alpha,\epsilon),$$

$$\mathfrak{g}(0,\epsilon) = \mathfrak{g}(0) \cap \mathfrak{g}(\epsilon), \qquad \mathfrak{g}(\alpha,\epsilon) = \mathfrak{g}(\alpha) \cap \mathfrak{g}(\epsilon)$$

を得る．更に，$\overline{\mathfrak{g}(\alpha,\epsilon)} = \mathfrak{g}(-\alpha,\epsilon^{-1})$ が成り立つので，実形式は

$$\mathfrak{g} = \sum_{\epsilon\in U(1)_{\geq 0}} \mathfrak{g}_{0,\epsilon} + \sum_{\alpha\in\Delta^+}\sum_{\epsilon\in U(1)} \mathfrak{g}_{\alpha,\epsilon},$$

$$U(1)_{\geq 0} = \{\epsilon \in U(1) \mid \mathrm{Im}(\epsilon) \geq 0\},$$

$$\begin{aligned}\mathfrak{g}_{0,\epsilon} &= (\mathfrak{g}(0,\epsilon) + \mathfrak{g}(0,\epsilon^{-1}) \cap \mathfrak{g},\\ \mathfrak{g}_{\alpha,\epsilon} &= (\mathfrak{g}(\alpha,\epsilon) + \mathfrak{g}(-\alpha,\epsilon^{-1})) \cap \mathfrak{g}\end{aligned}$$

となる．$\mathfrak{g}_{0,\epsilon}$ と $\mathfrak{g}_{\alpha,\epsilon}$ はそれぞれ σ で不変なので，分解

$$\begin{aligned}\mathfrak{k} &= \sum_{\epsilon\in U(1)_{\geq 0}} \mathfrak{k}_{0,\epsilon} + \sum_{\alpha\in\Delta^+}\sum_{\epsilon\in U(1)} \mathfrak{k}_{\alpha,\epsilon},\\ \mathfrak{m} &= \sum_{\epsilon\in U(1)_{\geq 0}} \mathfrak{m}_{0,\epsilon} + \sum_{\alpha\in\Delta^+}\sum_{\epsilon\in U(1)} \mathfrak{m}_{\alpha,\epsilon},\end{aligned}$$

$$\mathfrak{k}_{0,\epsilon} = \mathfrak{g}_{0,\epsilon} \cap \mathfrak{k}, \qquad \mathfrak{k}_{\alpha,\epsilon} = \mathfrak{g}_{\alpha,\epsilon} \cap \mathfrak{k},$$

$$\mathfrak{m}_{0,\epsilon} = \mathfrak{g}_{0,\epsilon} \cap \mathfrak{m}, \qquad \mathfrak{m}_{\alpha,\epsilon} = \mathfrak{g}_{\alpha,\epsilon} \cap \mathfrak{m}$$

を得る．$\mathfrak{g}_{\alpha,\epsilon}$ は ψ_α で不変なので，等長写像 $\psi_\alpha : \mathfrak{m}_{\alpha,\epsilon} \to \mathfrak{k}_{\alpha,\epsilon}$ を得る．

$$m(\alpha,\epsilon) := \dim \mathfrak{k}_{\alpha,\epsilon} = \dim \mathfrak{m}_{\alpha,\epsilon}$$

とおく．上と同様の議論により，$\mathfrak{k}_{\alpha,\epsilon}$ の基底 $\{x_i^{\alpha,\epsilon}\}_{i=1}^{m(\alpha,\epsilon)}$ および $\mathfrak{m}_{\alpha,\epsilon}$ の基底 $\{y_i^{\alpha,\epsilon}\}_{i=1}^{m(\alpha,\epsilon)}$ であって任意の $\eta \in \mathfrak{t}$ に対して条件

$$[\eta, x_i^{\alpha,\epsilon}] = -\langle\alpha,\eta\rangle y_i^{\alpha,\epsilon}, \qquad [\eta, y_i^{\alpha,\epsilon}] = \langle\alpha,\eta\rangle x_i^{\alpha,\epsilon}$$

が成り立つものがとれる．

ここで，$w \in \mathfrak{t}$ に対して軌道 $N := H \cdot (\exp w)K$ を考える．L_a で G/K の等長変換 $bK \mapsto (ab)K$ を表す．接空間 $T_{eK}M$ を $\mathfrak{m}$ と同一視する．軌道の形作用素を計算することで，次が得られる：

命題 3.1 (大野 [19])**.** 軌道 $N = H \cdot (\exp w)K$ の接空間・法空間は次のように表示される

$$T_{(\exp w)K}N = dL_{\exp w}\Big(\sum_{\substack{\epsilon\in U(1)_{\geq 0}\\ \epsilon\neq 1}} \mathfrak{m}_{0,\epsilon} + \sum_{\alpha\in\Delta^+} \sum_{\substack{\epsilon\in U(1)\\ \langle\alpha,w\rangle+\frac{1}{2}\arg\epsilon\notin\pi\mathbb{Z}}} \mathfrak{m}_{\alpha,\epsilon} \Big), \tag{3.1}$$

$$T^{\perp}_{(\exp w)K}N = dL_{\exp w}\Big(\mathfrak{t} + \sum_{\alpha\in\Delta^+} \sum_{\substack{\epsilon\in U(1)\\ \langle\alpha,w\rangle+\frac{1}{2}\arg\epsilon\in\pi\mathbb{Z}}} \mathfrak{m}_{\alpha,\epsilon} \Big). \tag{3.2}$$

更に，分解 (3.1) は形作用素の族 $\{A^N_{dL_{\exp w}(\xi)}\}_{\xi\in\mathfrak{t}}$ に関する同時固有空間分解である:

$$\begin{aligned} dL_{\exp w}(\mathfrak{m}_{0,\epsilon})&: \ \text{固有値}\,0\,\text{に関する固有空間}, \\ dL_{\exp w}(\mathfrak{m}_{\alpha,\epsilon})&: \ \text{固有値}\,-\langle\alpha,\xi\rangle\cot(\langle\alpha,w\rangle+\tfrac{1}{2}\arg\epsilon)\,\text{に関する固有空間}. \end{aligned}$$

σ と τ が可換な場合，$\epsilon=\pm1$ となるため，次を得る ([2, Theorem 5.3])：

系 3.2 (Goertsches-Thorbergsson [2])**.** $\sigma\circ\tau=\tau\circ\sigma$ と仮定する．このとき

$$\begin{aligned} T_{(\exp w)K}N &= dL_{\exp w}\Big(\ \mathfrak{m}_0\cap\mathfrak{h}+\sum_{\substack{\alpha\in\Delta^+\\ \langle\alpha,w\rangle\notin\pi\mathbb{Z}}}\mathfrak{m}_\alpha\cap\mathfrak{p}+\sum_{\substack{\alpha\in\Delta^+\\ \langle\alpha,w\rangle+\pi/2\notin\pi\mathbb{Z}}}\mathfrak{m}_\alpha\cap\mathfrak{h}\ \Big), \\ T^\perp_{(\exp w)K}N &= dL_{\exp w}\Big(\quad \mathfrak{t}\quad+\sum_{\substack{\alpha\in\Delta^+\\ \langle\alpha,w\rangle\in\pi\mathbb{Z}}}\mathfrak{m}_\alpha\cap\mathfrak{p}+\sum_{\substack{\alpha\in\Delta^+\\ \langle\alpha,w\rangle+\pi/2\in\pi\mathbb{Z}}}\mathfrak{m}_\alpha\cap\mathfrak{h}\ \Big), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} dL_{\exp w}(\mathfrak{m}_0\cap\mathfrak{h})&: \ \text{固有値}\,0\,\text{の固有空間}, \\ dL_{\exp w}(\mathfrak{m}_\alpha\cap\mathfrak{p})&: \ \text{固有値}\,-\langle\alpha,\xi\rangle\cot\langle\alpha,w\rangle\,\text{の固有空間}, \\ dL_{\exp w}(\mathfrak{m}_\alpha\cap\mathfrak{h})&: \ \text{固有値}\,\langle\alpha,\xi\rangle\tan\langle\alpha,w\rangle\,\text{の固有空間}. \end{aligned}$$

系 3.3. $\sigma=\tau$ と仮定する．このとき

$$\begin{aligned} T_{(\exp w)K}N &= dL_{\exp w}\Big(\ \sum_{\substack{\alpha\in\Delta^+\\ \langle\alpha,w\rangle\notin\pi\mathbb{Z}}}\mathfrak{m}_\alpha\ \Big), \\ T^\perp_{(\exp w)K}N &= dL_{\exp w}\Big(\quad \mathfrak{t}\quad+\sum_{\substack{\alpha\in\Delta^+\\ \langle\alpha,w\rangle\in\pi\mathbb{Z}}}\mathfrak{m}_\alpha\ \Big), \end{aligned}$$

$$dL_{\exp w}(\mathfrak{m}_\alpha): \ \text{固有値}\,-\langle\alpha,\xi\rangle\cot\langle\alpha,w\rangle\,\text{の固有空間}.$$

4 $P(G,H\times K)$-軌道の部分多様体幾何学

本節では，Hermann 作用から誘導される $P(G,H\times K)$ 作用の軌道の幾何学について，講演者により得られた結果を紹介する．前節と同様，G/K をコンパクト型対称空間，H を対称部分群とする．極大可換部分空間 $\mathfrak{t}\subset\mathfrak{m}\cap\mathfrak{p}$ を固定する．対応する $\mathfrak{t}$ のルート系を $\Delta=\Delta(\sigma,\tau)$ で表す．Hermann 作用 $H\curvearrowright G/K$ は超極なので，対応する $P(G,H\times K)$-作用も超極となり，そのセクションは $\mathfrak{t}$ に値を持つ定道全体 $\hat{\mathfrak{t}}=\{\hat{x}\in V_\mathfrak{g}\mid x\in\mathfrak{t}\}$ で与えられる ([27])．以下，$w\in\mathfrak{t}$ を任意にとり固定する．$P(G,H\times K)$ 軌道の第二基本形式・形作用素公式は [15] で与えられている．$P(G,H\times K)$ 軌道の主曲率は，次のように記述される：

定理 4.1 ([17])**.** 軌道 $P(G,H\times K)*\hat{w}$ に対して，その $\hat{\xi}\in\hat{\mathfrak{t}}$ 方向の主曲率は

$$\{0\}\cup\left\{\frac{\langle\alpha,\xi\rangle}{-\langle\alpha,w\rangle+\frac{1}{2}\arg\epsilon+m\pi}\ \middle|\ \alpha\in\Delta^+,\ \epsilon\in U(1),\ \langle\alpha,w\rangle+\frac{1}{2}\arg\epsilon\notin\pi\mathbb{Z},\ m\in\mathbb{Z}\right\}$$
$$\cup\left\{\frac{\langle\alpha,\xi\rangle}{n\pi}\ \middle|\ \alpha\in\Delta^+,\ \epsilon\in U(1),\ \langle\alpha,w\rangle+\frac{1}{2}\arg\epsilon\in\pi\mathbb{Z},\ n\in\mathbb{Z}\backslash\{0\}\right\}.$$

で与えられる．そららの重複度は順に，

$$\infty, \qquad \dim \mathfrak{m}_{\alpha,\epsilon}, \qquad \sum_{\epsilon} \dim \mathfrak{m}_{\alpha,\epsilon}$$

となる．特に，軌道が主軌道であれば，$\frac{\langle \alpha,\xi\rangle}{n\pi}$ の項は消える．

本定理の証明では，curvature-adapted 部分多様体から平行移動写像を通して得られる PF 部分多様体の主曲率関係公式（[12], [14]）を本質的に用いる．

系 4.2. $\sigma \circ \tau = \tau \circ \sigma$ と仮定する．このとき，軌道 $P(G, H \times K) * \hat{w}$ の $\hat{\xi} \in \hat{\mathfrak{t}}$ 方向の主曲率は

$$\begin{aligned} \{0\} \cup & \left\{ \frac{\langle \alpha, \xi \rangle}{-\langle \alpha, w \rangle + m\pi} \,\middle|\, \alpha \in \Delta^+,\ \langle \alpha, w \rangle \notin \pi\mathbb{Z},\ m \in \mathbb{Z} \right\} \\ & \cup \left\{ \frac{\langle \alpha, \xi \rangle}{-\langle \alpha, w \rangle + (m + \frac{1}{2})\pi} \,\middle|\, \alpha \in \Delta^+,\ \langle \alpha, w \rangle + \frac{\pi}{2} \notin \pi\mathbb{Z},\ m \in \mathbb{Z} \right\} \\ & \cup \left\{ \frac{\langle \alpha, \xi \rangle}{n\pi} \,\middle|\, \alpha \in \Delta^+,\ \langle \alpha, w \rangle \in \pi\mathbb{Z} \ \text{ or } \ \langle \alpha, w \rangle + \frac{\pi}{2} \in \pi\mathbb{Z},\ n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\} \right\}. \end{aligned}$$

重複度は順番に

$$\infty, \qquad \dim(\mathfrak{m}_\alpha \cap \mathfrak{p}), \qquad \dim(\mathfrak{m}_\alpha \cap \mathfrak{h}), \qquad \dim(\mathfrak{m}_\alpha \cap \mathfrak{p}) + \dim(\mathfrak{m}_\alpha \cap \mathfrak{h})$$

となる．特に，軌道が主軌道であれば，$\frac{\langle \alpha,\xi\rangle}{n\pi}$ の項は消える．

系 4.3. $\sigma = \tau$ と仮定する．このとき，軌道 $P(G, K \times K) * \hat{w}$ の $\hat{\xi} \in \hat{\mathfrak{t}}$ 方向の主曲率は

$$\begin{aligned} \{0\} \cup & \left\{ \frac{\langle \alpha, \xi \rangle}{-\langle \alpha, w \rangle + m\pi} \,\middle|\, \alpha \in \Delta^+,\ \langle \alpha, w \rangle \notin \pi\mathbb{Z},\ m \in \mathbb{Z} \right\} \\ & \cup \left\{ \frac{\langle \alpha, \xi \rangle}{n\pi} \,\middle|\, \alpha \in \Delta^+,\ \langle \alpha, w \rangle \in \pi\mathbb{Z},\ n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\} \right\}. \end{aligned}$$

重複度は順番に

$$\infty, \qquad \dim \mathfrak{m}_\alpha, \qquad \dim \mathfrak{m}_\alpha$$

となる．特に，軌道が主軌道であれば，$\frac{\langle \alpha,\xi\rangle}{n\pi}$ の項は消える．

注意 4.4. Terng [26] は，$P(G, \Delta G)$ 作用の主軌道の主曲率を計算し，それがヒルベルト空間 $V_{\mathfrak{g}}$ の等径部分多様体であることを示した．ここで ΔG は $G \times G$ の対角集合を表す．Pinkall と Thorbergsson [22] は，Terng の結果を $P(G, K \times K)$ 作用の場合へ拡張した．上記定理は，より一般に，対称部分群 H に対して，$P(G, H \times K)$ 作用の（主軌道とは限らない）軌道の主曲率公式を与えている．

部分多様体の各点において，各法ベクトルに対する主曲率が重複度込みで (-1) 倍不変であるとき，その部分多様体は**オースティア** ([4]) であるという．定義から，オースティア部分多様体は極小部分多様体となる．PF 部分多様体に対しても，オースティアの概念を同様に定義することができる．オースティア部分多様体の例を与えることは，基本的な問題である．

ここで，2 つの条件

(A) 軌道 $N = H \cdot (\exp w)K$ は G/K のオースティア部分多様体,
(B) 軌道 $\Phi_K^{-1}(N) = P(G, H \times K) * \hat{w}$ は $V_{\mathfrak{g}}$ のオースティア PF 部分多様体

の関係について考える．Hermann 作用および誘導される $P(G, H \times K)$ 作用の hyperpolar 性から，各軌道の法ベクトルとして，セクションに接するもののみを考えれば良いことに注意する．以下，講演者の研究で得られた結果を述べる．

定理 4.5 ([17]). ルート系 $\Delta = \Delta(\sigma, \tau)$ が reduced ならば，(A) と (B) は同値である．

ルート系 $\Delta = \Delta(\sigma, \tau)$ が reduced とは限らない場合は，次が成り立つ：

定理 4.6 ([17]).

(i) $\sigma = \tau$ のとき，(A) と (B) は同値である．
(ii) $\sigma \circ \tau = \tau \circ \sigma$ のとき,「(A) ならば (B)」が成り立つ．
(iii) G が単純であるとき,「(A) ならば (B)」が成り立つ．

ここで，(ii) と (iii) において「逆」は成り立たない．実際，次の反例が存在する：

「逆」に対する反例 ([17]). $(G, K, H) = (SU(p+q), S(U(p) \times U(q)), SO(p+q))$ $(p > q)$ とする．このときルート系 Δ は BC 型 $\{e_i, 2e_i\}_i \cup \{e_i \pm e_j\}_{i<j}$ となる．ここで，$w := \frac{\pi}{8}(e_1 + \cdots + e_q)$ と定めれば，対応する軌道 $N = H \cdot (\exp w)K$ はオースティアであるが，軌道 $(\pi \circ \Phi)^{-1}(N) = P(G, H \times K) * \hat{w}$ はオースティアとなることが従う．

尚,「逆」に関する詳細な考察については，[16] を参照されたい．

Hermann 作用のオースティア軌道は,（主に G が単純な場合）井川 [9]，大野 [19] により分類されている．彼らの結果を上記定理に適応することで，ヒルベルト空間内に等質なオースティア PF 部分多様体の例を多数構成することができる．

また，講演者は以前の研究において，次の定理を証明した：

定理 4.7 ([14]). G/K が標準球面であると仮定する．G/K の閉部分多様体 N に対して次は同値：

(i) N は G/K のオースティア部分多様体,
(ii) $\Phi_K^{-1}(N)$ は $V_{\mathfrak{g}}$ のオースティア PF 部分多様体.

よって，本節で述べたオースティア性に関する結果は，本結果を，G/K が球面とは限らない場合に拡張したものと言える．

尚，Hermann 作用の特殊な場合として，シグマ作用 ([1]) と呼ばれる作用が定義される．本節で述べた結果の，シグマ作用の場合への定式化については，[18] を参照されたい．

参考文献

[1] L. Conlon, *The topology of certain spaces of paths on a compact symmetric space*, Trans. Amer. Math. Soc. 112 (1964), 228–248.

[2] O. Goertsches, G. Thorbergsson, *On the geometry of the orbits of Hermann actions*, Geom. Dedicata **129** (2007), 101–118.

[3] C. Gorodski, G. Thorbergsson, *Variationally complete actions on compact symmetric spaces* J. Differential Geom. **62** (2002), no. 1, 39–48.

[4] R. Harvey and H. B. Lawson, Jr., *Calibrated geometries*, Acta Math., **148** (1982), 47–157.

[5] E. Heintze, X. Liu, C. Olmos, *Isoparametric submanifolds and a Chevalley-type restriction theorem*, Integrable systems, geometry, and topology, 151–190, AMS/IP Stud. Adv. Math., **36**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2006.

[6] E. Heintze, R. Palais, C.-L. Terng, G. Thorbergsson, *Hyperpolar actions on symmetric spaces*, Geometry, topology, & physics, 214–245, Conf. Proc. Lecture Notes Geom. Topology, IV, Int. Press, Cambridge, MA, 1995.

[7] R. Hermann, *Variational completeness for compact symmetric spaces.* Proc. Amer. Math. Soc. **11** (1960), 544–546.

[8] R. Hermann, *Totally geodesic orbits of groups of isometries*, Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A 65 = Indag. Math. **24** 1962 291–298.

[9] O. Ikawa, *The geometry of symmetric triad and orbit spaces of Hermann actions*, J. Math. Soc. Japan **63** (2011), no. 1, 79–136.

[10] O. Ikawa, T. Sakai, H. Tasaki, *Weakly reflective submanifolds and austere submanifolds.* J. Math. Soc. Japan **61** (2009), no. 2, 437–481.

[11] C. King, C.-L. Terng, *Minimal submanifolds in path space*, Global analysis in modern mathematics, 253–281, Publish or Perish, Houston, TX, 1993.

[12] N. Koike, *On proper Fredholm submanifolds in a Hilbert space arising from submanifolds in a symmetric space*, Japan. J. Math. (N.S.) **28** (2002), no. 1, 61–80.

[13] N. Koike, *Collapse of the mean curvature flow for equifocal submanifolds*, Asian J. Math. **15** (2011), no. 1, 101–127.

[14] M. Morimoto, *Austere and arid properties for PF submanifolds in Hilbert spaces*, Differential Geom. Appl., **69** (2020) 101613, 24pp.

[15] M. Morimoto, *On weakly reflective PF submanifolds in Hilbert spaces*, Tokyo J. Math. **44** (2021), no. 1, pp. 103–124.

[16] M. Morimoto, *On the converse problem for austere orbits of path group actions induced by Hermann actions*, Proceedings of The 23rd International Differential Geometry Workshop on Submanifolds in Homogeneous Spaces & Related Topics **23** (2021), 157–165.

[17] M. Morimoto, *Curvatures and austere property of orbits of path group actions induced by Hermann actions*, Transform. Groups, to appear (35 pages).

[18] M. Morimoto, *On the geometry of orbits of path group actions induced by sigma-actions*, arXiv:2201.01662 (21 pages), preprint.

[19] S. Ohno, *Geometric properties of orbits of Hermann actions*, arXiv:2101.00765.

[20] R. S. Palais, *Morse theory on Hilbert manifolds*, Topology **2** (1963), 299–340.

[21] R. S. Palais, C.-L. Terng, *Critical Point Theory and Submanifold Geometry*, Lecture Notes in Mathematics, **1353**. Springer-Verlag, Berlin, 1988.

[22] U. Pinkall, G. Thorbergsson, *Examples of infinite dimensional isoparametric submanifolds*, Math. Z. **205** (1990), no. 2, 279–286.

[23] S. Smale, *Morse theory and a non-linear generalization of the Dirichlet problem*, Ann. of Math. (2) **80** (1964), 382–396.

[24] S. Smale, *An infinite dimensional version of Sard's theorem*, Amer. J. Math. **87** (1965), 861–866.

[25] H. Tasaki, *Certain minimal or homologically volume minimizing submanifolds in compact symmetric spaces* Tsukuba J. Math. **9** (1985), no. 1, 117–131.

[26] C.-L. Terng, *Proper Fredholm submanifolds of Hilbert space.* J. Differential Geom. **29** (1989), no. 1, 9–47.

[27] C.-L. Terng, *Polar actions on Hilbert space.* J. Geom. Anal. **5** (1995), no. 1, 129–150.

[28] C.-L. Terng, G. Thorbergsson, *Submanifold geometry in symmetric spaces.* J. Differential Geom. **42** (1995), no. 3, 665–718.

大阪公立大学 数学研究所 〒 558-8585 大阪府大阪市住吉区杉本 3-3-138

e-mail: `morimoto-mshr@omu.ac.jp`