

重み付き Ricci 曲率に関する種々の曲率条件と幾何解析

櫻井 陽平 (埼玉大学)*

1. 導入

本稿では滑らかな重み付き Riemann 多様体 (M, d, m) を扱う. すなわち $M = (M, g)$ は n 次元完備 Riemann 多様体, d はその上の Riemann 距離関数, さらに m は滑らかな関数 $f \in C^\infty(M)$ を用いて共形変形された Riemann 体積測度

$$m := e^{-f} \text{vol}$$

である. ただし vol は標準的な Riemann 体積測度を表す. 重み付き Riemann 多様体は測度距離空間上の幾何解析における基本的な対象であり, また幾何学流理論において自己相似解を記述する際にも自然に現れる. 重み付き Riemann 多様体上では変形された測度を考えるため, 体積に関わるその他の量も変形したものを考える. Ricci 曲率は Riemann 体積測度の振る舞いを制御するものであったが, 重み付き Riemann 多様体上では次の重み付き Ricci 曲率を考える:

$$\text{Ric}_f^N := \text{Ric} + \nabla^2 f - \frac{df \otimes df}{N - n}.$$

ここで $N \in (-\infty, \infty]$ である.

最近, Lu-Minguzzi-太田 [12] は重み付き Ricci 曲率に関する以下の曲率条件を導入し, 比較幾何学を展開した: 実数 $\kappa \in \mathbb{R}$ および $N \in (-\infty, 1] \cup [n, \infty)$ に対し,

$$\text{Ric}_f^N \geq c^{-1} \kappa e^{-\frac{4(1-\varepsilon)f}{n-1}} g. \quad (1)$$

ただし $N \neq n$ の場合に

$$\varepsilon_0 := \frac{N - 1}{N - n}$$

とおき ($N = \infty$ の場合は 1 と解釈), ε は以下の範囲を動くものとする:

$$\varepsilon = 0 \text{ for } N = 1, \quad \varepsilon \in (-\sqrt{\varepsilon_0}, \sqrt{\varepsilon_0}) \text{ for } N \neq 1, n, \quad \varepsilon \in \mathbb{R} \text{ for } N = n. \quad (2)$$

また c は以下で定まる定数である: $N \neq 1$ の場合は

$$c := \frac{1}{n-1} \left(1 - \varepsilon^2 \frac{N-n}{N-1} \right)$$

とし, $N = 1$ の場合は $c := (n-1)^{-1}$ とする. この曲率条件は従来, 測度距離空間上の幾何解析の分野で研究されてきた枠組み (曲率次元条件) と Wylie-Yerushkin [21] により導入された枠組み (射影同値アフィン接続の幾何解析) を結びつけるものである. 本稿ではこの曲率条件が導入された背景を中心に解説する. またこの設定で展開される比較幾何学の概要を述べる.

* 〒 338-8570 埼玉県さいたま市桜区下大久保 255
e-mail: ysakurai@rimath.saitama-u.ac.jp

2. 背景

2.1. 曲率次元条件

測度距離空間上の幾何解析の分野では従来、次の曲率条件が研究されてきた：実数 $K \in \mathbb{R}$ および $N \in [n, \infty]$ に対し、

$$\text{Ric}_f^N \geq Kg. \quad (3)$$

この条件は Sturm [18], [19], Lott-Villani [11] により導入された曲率次元条件 $\text{CD}(K, N)$ により特徴付けられ、より一般の滑らかとは限らない測度距離空間上で理論が展開されている。 $N \in [n, \infty]$ の場合、 N は次元の上界としての役割を果たすことが知られている。 実際、曲率条件 (3) を満たす重み付き Riemann 多様体は Ricci 曲率が K 以上、次元が N 以下の（重みなし）Riemann 多様体のように振る舞う。 例えば $K = 0$ かつ $N \in [n, \infty)$ の場合、次の Bishop-Gromov 型不等式が成り立つことが知られている：任意の $x \in M$ と $r, R > 0$ で $r \leq R$ を満たすものに対し、

$$\frac{m(B_R(x))}{m(B_r(x))} \leq \left(\frac{R}{r}\right)^N.$$

このような観点から以前は $N \in (-\infty, n)$ は考察の対象外となっていた（負の次元を考えるのは不自然である）。 一方、太田-高津 [15], [16] により偏微分方程式論、情報幾何の観点から $N \in (-\infty, n)$ の場合の有用性が指摘され、 $N \in (-\infty, n)$ の場合に曲率条件 (3) のもとでの幾何解析的研究が始まった。 例えば太田 [14] による $N \in (-\infty, 0)$ に対する曲率次元条件、Kolesnikov-Milman [10] による $N \in (-\infty, 0]$ での Poincaré 不等式、Klartag [4] による $N \in (-\infty, 1)$ での局所化、Milman [13] による $N \in (-\infty, 1)$ での等周不等式、Wylie [20] による $N \in (-\infty, 1]$ での Cheeger-Gromoll 型分裂定理といった研究が行われている。

ここで次小節で解説する Wylie-Yeroshkin [21] の研究に繋がる Wylie [20] の結果を紹介する。 古典的な Cheeger-Gromoll の分裂定理の主張は以下であった：非負 Ricci 曲率の Riemann 多様体が直線（ \mathbb{R} から M への等長埋め込み）を含むならば、 M は \mathbb{R} とある Riemann 多様体の直積に等長的である。 Wylie [20] はこれを以下のように拡張した：

定理 1 ([20]). 重み付き Riemann 多様体が以下の曲率条件を満たすとする： $N \in (-\infty, 1]$ に対し、 $\text{Ric}_f^N \geq 0$ 。 また f は上に有界であるとする。 このとき M が直線を含むならば、 M は \mathbb{R} とある Riemann 多様体の捩れ積に等長的である。 さらに $N \in (-\infty, 1)$ ならば M は直積に等長的である。

さらに Wylie [20] は $N = 1$ の場合に直積分裂が起きない具体例を構成している。 このことから $N = 1$ には何かしらの特異性が窺える。

2.2. 射影同値アフィン接続の幾何解析

本小節では Wylie-Yeroshkin [21] により導入された以下の曲率条件について振り返る：実数 $\kappa \in \mathbb{R}$ に対し、

$$\text{Ric}_f^1 \geq (n-1)\kappa e^{-\frac{4f}{n-1}}g. \quad (4)$$

$\kappa = 0$ の場合は Wylie [20] の分裂定理が成り立つ設定であることに注意する。 この曲率条件のもと彼らは比較幾何学を展開し、ラプラシアンと比較定理、Bonnet-Myers 型直径評価、Cheng 型最大直径定理、Bishop-Gromov 型体積比較定理を示した。

曲率条件(4)は定数でなく関数による有界性であり、曲率条件(3)と比較すると奇異に映る。ここでは曲率条件(4)のとある解釈について説明しよう。鍵となるのはLevi-Civita接続 ∇ と射影同値なアフィン接続

$$\nabla_U^\alpha \mathcal{V} := \nabla_U \mathcal{V} - \alpha(U)\mathcal{V} - \alpha(\mathcal{V})U$$

である。ただし α は1-形式である。

一つ目の考察は Ric_f^1 とアフィン接続 ∇^α から誘導されるRicci曲率の関係性についてである。接続 ∇^α から誘導されるRicci曲率は

$$\begin{aligned} R^{\nabla^\alpha}(U, \mathcal{V})\mathcal{W} &:= \nabla_U^\alpha \nabla_{\mathcal{V}}^\alpha \mathcal{W} - \nabla_{\mathcal{V}}^\alpha \nabla_U^\alpha \mathcal{W} - \nabla_{[U, \mathcal{V}]}^\alpha \mathcal{W}, \\ \text{Ric}^{\nabla^\alpha}(\mathcal{V}, \mathcal{W}) &:= \text{tr}_g [U \mapsto R^{\nabla^\alpha}(U, \mathcal{V})\mathcal{W}] \end{aligned}$$

で定まる。今、1-形式

$$\alpha_f := \frac{df}{n-1}$$

を考える。まずWylie-Yeroshkin [21]は Ric_f^1 が $\text{Ric}^{\nabla^{\alpha_f}}$ に一致することを示した。二つ目の考察は ∇^α の測地線についてである。点 $x \in M$ に対し単位接球面を $U_x M$ で表す。単位接ベクトル $v \in U_x M$ に対し $\gamma_v : [0, \infty) \rightarrow M$ を ∇ に関する測地線で初期条件 $\gamma_v(0) = x$ および $\gamma_v'(0) = v$ を満たすものとする。関数 $s_{f,v} : [0, \infty] \rightarrow [0, s_{f,v}(\infty)]$ を

$$s_{f,v}(t) := \int_0^t e^{-\frac{2f(\gamma_v(\xi))}{n-1}} d\xi$$

で定め、その逆関数を $t_{f,v} : [0, s_{f,v}(\infty)] \rightarrow [0, \infty]$ とする。彼らは曲線 $\hat{\gamma}_v := \gamma_v \circ t_{f,v}$ がアフィン接続 ∇^{α_f} に関する測地線であることを指摘した。上述の考察を組み合わせると以下が結論付けられる：

命題 2 ([21]). 実数 $\kappa \in \mathbb{R}$ に対し、以下は同値である：

1. 任意の $v \in U_x M$ と $t \in [0, \infty)$ に対し $\text{Ric}_f^1(\gamma_v'(t)) \geq (n-1)\kappa e^{-\frac{4f(\gamma_v(t))}{n-1}}$;
2. 任意の $v \in U_x M$ と $s \in [0, s_{f,v}(\infty))$ に対し $\text{Ric}^{\nabla^{\alpha_f}}(\hat{\gamma}_v'(s)) \geq (n-1)\kappa$.

これより曲率条件(4)はアフィン接続 ∇^{α_f} に関してRicci曲率が下から定数で押さえられているような条件であるという解釈が得られる。これは $N=1$ 特有の現象であり、その特異性を物語っている。

2.3. 両枠組みの邂逅

前小節で説明した二つの枠組みを統一的に扱えないかという疑問が生じる。この問いに対し、まず桑江-Li [5]は曲率条件(4)を以下のように拡張し、Wylie-Yeroshkin [21]により得られていた比較幾何学的結果の拡張を与えた(桑江-宿利 [9]も参照)：実数 $\kappa \in \mathbb{R}$ および $N \in (-\infty, 1]$ に対し、

$$\text{Ric}_f^N \geq (n-N)\kappa e^{-\frac{4f}{n-N}} g. \quad (5)$$

その後Lu-Minguzzi-太田 [12]は前節で述べた曲率条件(1)を導入し、両者の統一化を図った。曲率条件(1)において $N \in [n, \infty)$ かつ $\varepsilon = 1$ のとき(このとき $c = (N-1)^{-1}$)、曲率条件(3)で $K = (N-1)\kappa$ かつ $N \in [n, \infty)$ の場合に帰着する。また $N = 1$ かつ $\varepsilon = 0$ のとき($c = (n-1)^{-1}$)、曲率条件(4)に帰着する。さらに $N \in (-\infty, 1]$ かつ $\varepsilon = \varepsilon_0$ のとき($c = (n-N)^{-1}$)、曲率条件(5)に帰着する。

3. 比較幾何学

本節では曲率条件 (1) のもとで展開される比較幾何学の概要を述べる. 以下では $\kappa \in \mathbb{R}$ および $N \in (-\infty, 1] \cup [n, \infty]$ とし, また ε は (2) の範囲を動くものとする.

3.1. 境界のない Riemann 多様体上の比較幾何学

本小節では境界のない重み付き Riemann 多様体の比較幾何学について述べる. 比較幾何学では距離関数に対するラプラシアン比較定理が基本的道具である. 重み付き Riemann 多様体上では重み付きラプラシアン

$$\Delta_f := \Delta + g(\nabla f, \nabla \cdot)$$

を考える. 点 $x \in M$ に対し, 距離関数 $\rho_x : M \rightarrow [0, \infty)$ が

$$\rho_x(y) := d(x, y)$$

で定まる. また $v \in U_x M$ に対し, 測地線 $\gamma_v : [0, \infty) \rightarrow M$ の切断値が

$$\tau(v) := \sup\{t > 0 \mid \rho_x(\gamma_v(t)) = t\}$$

と定まる. 関数 $s_{f,v} : [0, \infty) \rightarrow [0, s_{f,v}(\infty)]$ を以下で定める:

$$s_{f,v}(t) := \int_0^t e^{-\frac{2(1-\varepsilon)f(\gamma_v(\xi))}{n-1}} d\xi.$$

さらに $\mathfrak{s}_\kappa(s)$ を Jacobi 方程式 $\psi''(s) + \kappa\psi(s) = 0$ の初期条件 $\psi(0) = 0, \psi'(0) = 1$ に対する一意解とする. Lu-Minguzzi-太田 [12] は次のラプラシアン比較定理を示した:

定理 3 ([12]). 曲率条件 (1) のもと, 任意の $x \in M, v \in U_x M, t \in (0, \tau(v))$ に対し

$$\Delta_f \rho_x(\gamma_v(t)) \geq -c^{-1} \frac{\mathfrak{s}'_\kappa(s_{f,v}(t))}{\mathfrak{s}_\kappa(s_{f,v}(t))} e^{-\frac{2(1-\varepsilon)f(\gamma_v(t))}{n-1}}.$$

定理 3 は $N = 1$ かつ $\varepsilon = 0$ の場合は Wylie-Yeroshkin [21] により, また $N \in (-\infty, 1]$ かつ $\varepsilon = \varepsilon_0$ の場合は桑江-Li [5] により得られていた. 標準的な議論より, 定理 3 から Bonnet-Myers 型直径比較定理, Bishop-Gromov 型体積比較定理が導かれる. 講演者は桑江一洋氏 (福岡大学) と共同で定理 3 の等号成立条件を調べ, それを用いて Cheng 型最大直径定理や Bishop-Gromov 型体積比較定理の等号成立下での剛性定理を証明した ([6]).

3.2. 境界付き Riemann 多様体上の比較幾何学

次に境界付き重み付き Riemann 多様体の比較幾何学について述べる. 境界付き Riemann 多様体の比較幾何学については Heintze-Karcher [1], 加須栄 [2], [3] による先駆的研究が存在する. 境界付きの場合は Ricci 曲率の下界性に加え, 境界 ∂M の平均曲率の下界性を仮定するのが自然である. 境界上の点 $z \in \partial M$ に対し, 内向き単位法ベクトルを u_z とし, 平均曲率を H_z と表す. このとき点 z における重み付き平均曲率が以下で定まる:

$$H_{f,z} := H_z + g(\nabla f, u_z),$$

講演者は桑江氏と共同で以下の曲率条件を導入し、比較幾何学を展開した ([8]) : 実数 $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ に対し,

$$\text{Ric}_f^N \geq c^{-1} \kappa e^{-\frac{4(1-\varepsilon)f}{n-1}} g, \quad H_{f, \partial M} \geq c^{-1} \lambda e^{-\frac{2(1-\varepsilon)f}{n-1}}. \quad (6)$$

境界付きの場合は、境界からの距離関数に対するラプラシアン比較定理が基本的である。境界からの距離関数 $\rho_{\partial M} : M \rightarrow [0, \infty)$ が

$$\rho_{\partial M}(x) := d(x, \partial M)$$

で定まる。点 $z \in \partial M$ に対し、 $\gamma_z : [0, T] \rightarrow M$ を初期条件 $\gamma_z(0) = z$ および $\gamma'_z(0) = u_z$ を満たす測地線とし、その切断値が

$$\tau(z) := \sup\{t > 0 \mid \rho_{\partial M}(\gamma_z(t)) = t\}$$

と定まる。関数 $s_{f,z} : [0, T] \rightarrow [0, s_{f,z}(T)]$ を

$$s_{f,z}(t) := \int_0^t e^{-\frac{2(1-\varepsilon)f(\gamma_z(\xi))}{n-1}} d\xi$$

と定める。さらに $\mathfrak{s}_{\kappa,\lambda}(s)$ を Jacobi 方程式 $\psi''(s) + \kappa\psi(s) = 0$ の初期条件 $\psi(0) = 1, \psi'(0) = -\lambda$ に対する一意解とする。次のラプラシアン比較定理が成り立つ：

定理 4 ([8]). 曲率条件 (6) のもと、任意の $z \in M, t \in (0, \tau(z))$ に対し

$$\Delta_f \rho_{\partial M}(\gamma_z(t)) \geq -c^{-1} \frac{\mathfrak{s}'_{\kappa,\lambda}(s_{f,z}(t))}{\mathfrak{s}_{\kappa,\lambda}(s_{f,z}(t))} e^{-\frac{2(1-\varepsilon)f(\gamma_z(t))}{n-1}}.$$

$N = 1$ かつ $\varepsilon = 0$ の場合、定理 4 は講演者 [17] により得られていた。定理 4 を用いることで、内在半径比較定理、境界の近傍の Heintze-Karcher 型体積比較定理、 p -ラプラシアンの最小 Dirichlet 固有値比較定理を示すことができる。さらに定理 4 の等号成立条件を精査することで、比較定理の等号成立下における剛性定理が得られる。

3.3. 展望

講演者は桑江氏と共同で、Sturm, Lott-Villani 型のエントロピーの凸性による曲率条件 (1) の特徴付けを与えた ([7])。そのような特徴付けを用いることで、より一般の滑らかとは限らない測度距離空間に対して曲率条件 (1) を定式化できる可能性がある。本稿で述べたような比較幾何学を特異空間上で展開出来れば面白い。今後の課題である。

参考文献

- [1] E. Heintze and H. Karcher, *A general comparison theorem with applications to volume estimates for submanifolds*, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. **11** (1978), 451–470.
- [2] A. Kasue, *Ricci curvature, geodesics and some geometric properties of Riemannian manifolds with boundary*, J. Math. Soc. Japan **35** (1983), no. 1, 117–131.
- [3] A. Kasue, *On a lower bound for the first eigenvalue of the Laplace operator on a Riemannian manifold*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **17** (1984), no. 1, 31–44.
- [4] B. Klartag, *Needle decompositions in Riemannian geometry*, Mem. Amer. Math. Soc. **249** (2017), no. 1180, v + 77 pp.

- [5] K. Kuwae and X.-D. Li, *New Laplacian comparison theorem and its applications to diffusion processes on Riemannian manifolds*, to appear in Bull. Lond. Math. Soc..
- [6] K. Kuwae and Y. Sakurai, *Rigidity phenomena on lower N -weighted Ricci curvature with ε -range for non-symmetric Laplacian*, Illinois J. Math. **65** (2021), no. 4, 847–868.
- [7] K. Kuwae and Y. Sakurai, *Lower N -weighted Ricci curvature bound with ε -range and displacement convexity of entropies*, preprint arXiv:2009.12986v3.
- [8] K. Kuwae and Y. Sakurai, *Comparison geometry of manifolds with boundary under a lower N -weighted Ricci curvature bound with ε -range*, preprint arXiv:2011.03730.
- [9] K. Kuwae and T. Shukuri, *Laplacian comparison theorem on Riemannian manifolds with modified m -Bakry-Emery Ricci lower bounds for $m \leq 1$* , Tohoku Math. J. (2) **74** (2022), no. 1, 83–107.
- [10] A. V. Kolesnikov and E. Milman, *Brascamp-Lieb-type inequalities on weighted Riemannian manifolds with boundary*, J. Geom. Anal. **27** (2017), no. 2, 1680–1702.
- [11] J. Lott and C. Villani, *Ricci curvature for metric-measure spaces via optimal transport*, Ann. of Math. (2) **169** (2009), no. 3, 903–991.
- [12] Y. Lu, E. Minguzzi and S. Ohta, *Comparison theorems on weighted Finsler manifolds and spacetimes with ε -range*, Anal. Geom. Metr. Spaces **10** (2022), no. 1, 1–30.
- [13] E. Milman, *Beyond traditional Curvature-Dimension I: new model spaces for isoperimetric and concentration inequalities in negative dimension*, Trans. Amer. Math. Soc. **369** (2017), no. 5, 3605–3637.
- [14] S. Ohta, *(K, N) -convexity and the curvature-dimension condition for negative N* , J. Geom. Anal. **26** (2016), no. 3, 2067–2096.
- [15] S. Ohta and A. Takatsu, *Displacement convexity of generalized relative entropies*, Adv. Math. **228** (2011), no. 3, 1742–1787.
- [16] S. Ohta and A. Takatsu, *Displacement convexity of generalized relative entropies. II*, Comm. Anal. Geom. **21** (2013), no. 4, 687–785.
- [17] Y. Sakurai, *Comparison geometry of manifolds with boundary under a lower weighted Ricci curvature bound*, Canad. J. Math. **72** (2020), no. 1, 243–280.
- [18] K.-T. Sturm, *On the geometry of metric measure spaces. I*, Acta Math. **196** (2006), no. 1, 65–131.
- [19] K.-T. Sturm, *On the geometry of metric measure spaces. II*, Acta Math. **196** (2006), no. 1, 133–177.
- [20] W. Wylie, *A warped product version of the Cheeger-Gromoll splitting theorem*, Trans. Amer. Math. Soc. **369** (2017), no. 9, 6661–6681.
- [21] W. Wylie and D. Yeroshkin, *On the geometry of Riemannian manifolds with density*, preprint arXiv:1602.08000.