光錐，共形平坦多様体および等径超曲面

佐藤 雄一郎 (工学院大学) *

1 光錐

p は非負整数，n は 3 以上の自然数とする．指数 $(p+1)$ の $(n+1)$ 次元擬 Euclid 空間

$$\mathbb{E}^n_{p+1} := \left(\mathbb{R}^n, \langle\cdot,\cdot\rangle_{p+1} = -dx_1^2 - \cdots - dx_{p+1}^2 + dx_{p+2}^2 + \cdots + dx_{n+1}^2\right)$$

内の超曲面である指数 p の**光錐**を

$$\Lambda^n_p := \left\{x \in \mathbb{E}^{n+1}_{p+1} \setminus \{0\} \mid \langle x, x\rangle_{p+1} = 0\right\}$$

で定める．ただし，光錐に誘導される計量は退化していることに注意せよ．その退化次数は 1 である．光錐は，擬 Euclid 空間内の全臍的光的超曲面という特徴を持ち，計量の退化した空間形というべきものである ([BD96])．

光錐 Λ^n_p の計量は退化しているが，その部分多様体に誘導される計量は非退化になることはある．例えば

$$S^{n-1} := \{x = (1, x_2, \ldots, x_{n+1}) \in \Lambda^n_p \mid x_2, \cdots, x_{n+1} \in \mathbb{R}\}$$

で定義される光錐内の部分多様体に対する誘導計量は非退化であり，定曲率 1 の擬球面 (詳しくは第 3 節で述べるが)

$$\mathbb{S}^{n-1}_p := \left\{x \in \mathbb{E}^n_p \;\middle|\; \langle x, x\rangle_p = 1\right\}$$

と擬 Riemann 多様体として等長同型である．

次の枠組みを考えることができる．m を n 未満の正整数とし，(M^m, g_M) を擬 Riemann 多様体とする．このとき，多様体 M^m から光錐 Λ^n_p への滑らかなはめ込み $f\colon (M^m, g_M) \to \Lambda^n_p$ が**等長**であるとは，f による誘導計量が g_M に一致することをいう．$m = n-1$ のとき，すなわち，光錐内の超曲面を考えるとき，g_M の指数は p でなくてはならない．すなわち，計量 g_M の負固有値の個数は p である．また簡単のために指数 p の m 次元擬 Riemann 多様体 (M^m, g_M) を単に M^m_p と表す．特に M^m_0 は Riemann 多様体であり，M^m_1 は所謂 Lorentz 多様体である．

次は良く知られた事実である．

定理 1 ([AD89])**.** $m \geq 3$ とする．単連結な擬 Riemann 多様体 M^m_p に対し，共形平坦であることの必要十分条件は，光錐 Λ^{m+1}_p への等長はめ込みが存在することである．

局所的には，光錐内の超曲面を研究することと共形平坦な擬 Riemann 多様体を研究することは等価である．この観点から部分多様体論だけでなく，共形幾何学からも興味が持たれる．

この節では，光錐内の超曲面論を Honda–Tsukada の理論 [HT04] に沿って解説する．また Liu–Jung の研究 [LJ08] も参考にした．また，Izumiya は 3 次元光錐 Λ^3_0 内の曲面に対し，平均曲率が恒等的に零であることと平坦であることが同値であるという Izumiya の驚愕定理を発表した ([Iz09])．Gauss 曲率が内在的量であるという Gauss の驚愕定理 (Theorema Egregium) に対比して，平均曲率が内在的量になっているのである．

退化次数 1 の退化計量を持つ多様体内の超曲面論 [BD96] より，次は基本的な結果である．

命題 2. M^m_p を m 次元の擬 Riemann 多様体で，$m \geq 2$ とする．$f\colon M^m_p \to \Lambda^{m+1}_p \subset \mathbb{E}^{m+2}_{p+1}$ を等長はめ込みとする．このとき，M^m の法束の切断 $\overline{f}\colon M \to T^\perp M \subset f^*T\mathbb{E}^{m+2}_{p+1}$ が存在して，

$$\langle f, f\rangle_{p+1} = \langle \overline{f}, \overline{f}\rangle_{p+1} = 0,\ \langle f, \overline{f}\rangle_{p+1} = 1$$

が成立する．特に，$T^\perp M = \mathrm{Span}\{f, \overline{f}\}$ である．また，f の Gauss の公式と Weingarten の公式は次で与えられる:

$$D_X Y = \nabla_X Y + h(X,Y) f - g_M(X,Y)\overline{f} \quad \text{(Gauss)},$$
$$D_X f = X, \quad D_X \overline{f} = -A(X) \quad \text{(Weingarten)}.$$

* 部分多様体幾何とリー群作用 2021 講演記録.

ここで，M 上の対称双線型形式 h を $f : M_p^m \to \Lambda_p^{m+1}$ の**第二基本形式**と呼び，そのトレース

$$H := \frac{1}{m}\mathrm{trace}_{g_M} h \in C^\infty(M)$$

を f の**平均曲率**と呼ぶ．また A を f の**形作用素**と呼ぶ．命題 2 より，次が成立する．

命題 3.

$$h(X,Y) = g_M(A(X),Y), \quad A(X) = -L(X).$$

ここで，L は M_p^m の Schouten 作用素である．すなわち，ベクトル場 $X \in \Gamma(TM)$ に対し，

$$L(X) = \frac{1}{m-2}\left(Q(X) - \frac{S}{2(m-1)}X\right)$$

で与えられる．Q は M_p^m の Ricci 作用素，S は M_p^m のスカラー曲率を表す．

従って，形作用素 (および第二基本形式) は内在的であることを意味する．

命題 4. $f : (M^m, g_M) = M_p^m \to \Lambda_p^{m+1} \subset \mathbb{E}_{p+1}^{m+2}$ を等長はめ込みとする．このとき，f の Gauss の方程式は

$$\mathrm{Rm} = -h \owedge g_M$$

である．ここで，Rm は M_p^m の $(0,4)$ 型の Riemann 曲率テンソルであり，$\owedge$は Kulkarni–Nomizu 積を表す．すなわち，$X,Y,Z,W \in \Gamma(TM)$ に対し，

$$\begin{aligned}(h \owedge g_M)(X,Y,Z,W) &= \begin{vmatrix} h(X,Z) & h(X,W) \\ g_M(Y,Z) & g_M(Y,W) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} g_M(X,Z) & g_M(X,W) \\ h(Y,Z) & h(Y,W) \end{vmatrix} \\ &= h(X,Z)g_M(Y,W) - h(Y,Z)g_M(X,W) + h(Y,W)g_M(X,Z) - h(X,W)g_M(Y,Z)\end{aligned}$$

である．また，f の Codazzi の方程式は

$$(\nabla_X h)(Y,Z) = (\nabla_Y h)(X,Z)$$

である．

注意 5.

- 命題 4 より，定理 1 の十分性が分かる．必要性は，擬 Euclid 空間内の部分多様体論の基本定理を用いることによって示される．
- Ricci の方程式は自明に成立している．特に，等長はめ込み $f : M_p^m \to \Lambda_p^{m+1} \subset \mathbb{E}_{p+1}^{m+2}$ は剛性を持つ．
- $(M^m, g_M) = M_p^m$ に対し，定曲率 c の擬 Riemann 多様体であることの必要十分条件は，その $(0,4)$ 型 Riemann 曲率テンソル Rm が次のように表せることである:

$$\mathrm{Rm} = \frac{c}{2}(g_M \owedge g_M).$$

命題 4 より，M_p^m の Ricci 曲率テンソル Ric とスカラー曲率 S について次が分かる．

系 6.

$$\mathrm{Ric}(X,Y) = -(m-2)h(X,Y) - mHg_M(X,Y), \quad S = -2m(m-1)H.$$

これより，2 次元の場合は状況が特殊であることが分かる．例えば，任意の 2 次元擬 Riemann 多様体は Einstein であることが分かり，その断面曲率 (Gauss 曲率) は，平均曲率の (-1) 倍に一致する．すなわち，平均曲率は内在的量になっている．しかしながら，系 6 より，第二基本形式が内在的であることは結論付けられない．

ここまでは局所的な議論であるが，大域的な結果として一つ次を挙げる．

命題 7. M_p^m を擬 Riemann 多様体とする．このとき，等長はめ込み $f : M_p^m \to \Lambda_p^{m+1} \subset \mathbb{E}_{p+1}^{m+2}$ が存在するならば，M_p^m は向き付け可能である．

証明は命題 2 より，M^m の接方向に横断的な大域的切断 $\overline{f}$ が存在することによる．すなわち，第 1 Stiefel–Whitney 類が消えている．

2　共形平坦多様体

この節では m を 3 以上の自然数とする．擬 Riemann 多様体 $M_p^m = (M^m, g_M)$ が**共形平坦**であるとは, 各点 $x \in M^m$ に対し，その周りの適当な座標近傍 $(U; x_1, \ldots, x_m)$ と U 上の滑らかな関数 ρ が存在して

$$g_M|_U = e^{2\rho}(-dx_1^2 - \cdots - dx_p^2 + dx_{p+1}^2 + \cdots + dx_m^2)$$

が成立することである．定義より，局所的な条件であるため，あるテンソルを用いて次の条件とも同値である．

$$\begin{aligned} &W(X,Y)Z := R(X,Y)Z - L(Y,Z)X + L(X,Z)Y + g_M(Y,Z)Q(X) - g_M(X,Z)Q(Y) = 0 \quad (m \geq 4), \\ &C(X,Y,Z) := (\nabla_X L)(Y,Z) - (\nabla_Y L)(X,Z) = 0 \quad (m = 3). \end{aligned}$$

ここで W, C はそれぞれ Weyl の共形 (曲率) テンソル，Cotton テンソルと呼ばれている．また

$$L(X,Y) := g_M(L(X),Y) = \frac{1}{m-2}\left(\mathrm{Ric}(X,Y) - \frac{S}{2(m-1)}g_M(X,Y)\right)$$

であり，Schouten テンソルと呼ばれる．

注意 8. 2 次元擬 Riemann 多様体 $M_p^2 = (M^2, g_M)$ を考える．このとき，$p = 0, 1$ の場合のみ考えれば良い．実際，反等長変換により，$p = 2$ の場合は $p = 0$ の場合に帰着される．さて $p = 0$ の場合，これは Riemann 多様体であるから，共形平坦であることはよく知られている．一方，$p = 1$ の場合は Lorentz 多様体であるが，ある局所座標 $(U; u, v)$ が存在して

$$g_M|_U = 2e^{2\rho}dudv$$

と表せることが知られている ([Wei96])．特に，共形平坦であることも従う．また $m = 3$ のとき，W は自明に消えていることが従うため，C が消えることが必要かつ十分であるが，$m \geq 4$ のとき，$W = 0$ が成立するならば $C = 0$ が成立する．

擬 Euclid 空間 $\mathbb{E}_p^n$ は平坦より，自明に共形平坦である．それ以外には正定曲率である指数 p の**擬球面**

$$\mathbb{S}_p^n(r) := \{x \in \mathbb{E}_p^{n+1} \mid \langle x, x\rangle_p = r^2\}$$

や負定曲率である指数 p の**擬双曲空間**

$$\mathbb{H}_p^n(r) := \{x \in \mathbb{E}_{p+1}^{n+1} \mid \langle x, x\rangle_{p+1} = -r^2\}$$

がある．$p = 0$ のときは単に球面 $\mathbb{S}^n(r)$ と (合同な連結成分を 2 つ持つ) 双曲空間 $\mathbb{H}^n(r)$ であり，$p = 1$ のときは擬球面 $\mathbb{S}_1^n(r)$，擬双曲空間 $\mathbb{H}_1^n(r)$ をそれぞれ **de Sitter 時空**，**反 de Sitter 時空**と呼ぶことがある．すなわち，定曲率ならば共形平坦であることは擬 Rieman 幾何の枠組みでも成立する．

共形平坦な等質 Riemann 多様体の分類を述べる．

定理 9 ([Ta75])**.** M^m を共形平坦な等質 Riemann 多様体とする．このとき，その普遍被覆空間は Riemann 空間形

$$\mathbb{E}^m,\ \mathbb{S}^m(r),\ \mathbb{H}^m(r)$$

または Riemann 直積多様体

$$\mathbb{S}^k(r) \times \mathbb{H}^{m-k}(r),\ \mathbb{S}^{m-1}(r) \times \mathbb{E}^1,\ \mathbb{H}^{m-1}(r) \times \mathbb{E}^1$$

のいずれか一つに等長同型である．

この結果は Honda–Tsukada によって擬 Riemann 多様体の場合に一般化された．

定理 10 ([HT07])**.** M_p^m を共形平坦な等質擬 Riemann 多様体とする．Schouten 作用素が対角化可能ならば，M_p^m は擬 Riemann 空間形

$$\mathbb{E}_p^m,\ \mathbb{S}_p^m(r),\ \mathbb{H}_p^m(r)$$

または擬 Riemann 直積多様体

$$\mathbb{S}_s^k(r) \times \mathbb{H}_{p-s}^{m-k}(r),\ \mathbb{S}_p^{m-1}(r) \times \mathbb{E}^1,\ \mathbb{H}_p^{m-1}(r) \times \mathbb{E}^1,\ \mathbb{S}_{p-1}^{m-1}(r) \times \mathbb{E}_1^1,\ \mathbb{H}_{p-1}^{m-1}(r) \times \mathbb{E}_1^1$$

のいずれかに局所等長同型である．

注意 11.

- 擬 Riemann 幾何においては Schouten 作用素は一般に対称変換ではなく，対角化可能とは限らない．
- 擬 Riemann 幾何において等質性から完備性が導出されないため，安易に等長同型になると主張できない．
- 上述した分類結果は仮定を少し緩めることができる．すなわち，共形平坦多様体に対し，Schouten 作用素が対角化可能であり，その固有値関数がすべて定数であるならば，同様の分類結果を得る．

3 等径超曲面

m を 2 以上の自然数，$f : M^m_t \to \overline{M}^{m+1}_p$ を擬 Riemann 多様体間の等長はめ込み，N を f に沿う単位法ベクトル場とする．このとき，f が**等径**であるとは，N に関する形作用素 A の固有多項式が M^m の点に依らず不変になることをいう．この定義は Hahn [Ha84] によって与えられたものであるが賛否両論あるため，いくつかコメントする．

(a) 等径であることの数式を用いて，定式化すると次の通りである:
等長はめ込み f の形作用素 A に対し，固有多項式 $\Phi_A(\lambda)$ を考える．すなわち，

$$\Phi_A(\lambda) := \det(\lambda I - A) = \lambda^m + \sigma_1(A)\lambda^{m-1} + \cdots + \sigma_{m-1}(A)\lambda + \sigma_m(A).$$

このとき，f が等径であるとは，係数 $\sigma_i(A)$ がすべて M^m 上の定数関数となることと等価である．

(b) 形作用素 A が対角化可能であれば，等径であることと A の主曲率関数がすべて定数であることが同値になり，主曲率一定超曲面を考えていることになる．擬 Riemann 幾何では形作用素が対角化不可能な場合や複素数固有値を持つ場合があることから，実の範囲で定式化するために固有多項式のレベルで定義を与えている．

(c) 擬 Riemann 幾何では，f は等径であって固有多項式は不変であるが，その最小多項式は不変ではない例が存在する．実際，等径超曲面に対する形作用素の固有値の重複度は一定であるが，その代数的重複度 (固有値の重複度) と幾何学的重複度が一致するとは限らない．実際，Hahn [Ha84] による次のような例が存在する．

$$f : \mathbb{R}^2 \ni (u, v) \mapsto \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(u+v), \frac{1}{\sqrt{2}}(u-v), \sin v \right) \in \mathbb{E}^3_1.$$

このとき，$\left\{ \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v} \right\}$ に関して誘導計量，形作用素はそれぞれ

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & \cos^2 v \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & -\sin v \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

と表現され，形作用素の固有多項式は λ^2 であって，f は等径である．また固有値 0 に対する代数的重複度は一定で 2 となっている．一方で $v = k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ のとき，その幾何学的重複度は 2 であり，一致するが，$v \neq k\pi$ のとき，その幾何学的重複度は 1 となり，異なることに注意する．すなわち，最小多項式は不変ではない．さらに，等径だが等質でない例にもなっている．Magid は等径超曲面の定義として，上述の我々の定義よりさらに強く，形作用素の最小多項式が点に依らず不変として研究を行った．Magid の意味では，Hahn による上のような例は除外される．

第 4 節で述べる本研究結果は，Hahn の意味での等径超曲面で従うものである．ちなみに擬 Riemann 幾何，特に擬 Riemann 空間形内の等径超曲面の分類であるが，筆者の調べ得る範囲での年表は次の通りになる．

(1981 年) Nomizu は Lorentz 空間形内の空間的等径超曲面を定義し，Cartan 型の公式を導いた．また，いくつかの例を挙げた ([No81])．

(1984 年) Hahn は擬 Riemann 空間形内の等径超曲面を定義し，基本的な性質を調べた．また，Nomizu の結果を包含する形で，形作用素が対角化可能であるとき，Cartan 型の公式が成立することを示した ([Ha84])．

(1985 年) Magid は Minkowski 時空 $\mathbb{E}^n_1$ 内の時間的等径超曲面を分類した ([Ma84])．

(1999 年) Xiao は反 de Sitter 時空内の Magid の意味での時間的等径超曲面を分類した ([Xi99])．

(2006 年) Li–Xie は de Sitter 時空，反 de Sitter 時空内の空間的等径超曲面を分類した ([LX06])．

(2012 年) Li は de Sitter 時空内の Type I, Type II である Magid の意味での時間的等径超曲面を分類した ([Li12])．

(2018 年) Li は de Sitter 時空内の Type III である Magid の意味での時間的等径超曲面を分類した ([Li18])．

ここで Lorentz 空間形とは，Minkowski 時空, de Sitter 時空および反 de Sitter 時空を総称したものであり，超曲面が空間的または時間的であるとは，その誘導計量の指数がそれぞれ 0 または 1 になることをいう．

上述の年表により Lorentz 空間形内の非退化な等径超曲面の分類については決着がついているが，その分類は空間的な場合を除いて，局所的なものであることに注意する．完備なものや極大なものといった大域的な分類の完成はやや絶望的な状況下にある．時間的超曲面の Type I から Type IV については第 5 節にて説明する．

光錐内への等長はめ込み $f : M_p^m \to \Lambda_p^{m+1}$ が**等径**であるとは，f の形作用素の固有多項式は M の点に依らず不変であることという．これは M_p^m を内在的に共形平坦多様体を思ったときにその Schouten 作用素の固有多項式が M の点の依らず不変であることと同値である．以下この節では f を光錐への等長はめ込みとする．命題 2 より，$\overline{f}$ が定まるが，これは光錐への写像を思うことができる．そこで f と $\overline{f}$ を用いて

$$f_+ := \frac{1}{\sqrt{2}}(f + \overline{f}), \quad f_- := \frac{1}{\sqrt{2}}(f - \overline{f})$$

を定めると，それぞれ擬球面 $\mathbb{S}_{p+1}^{m+1}(1)$, 擬双曲空間 $\mathbb{H}_p^{m+1}(1)$ への写像とみなせる．さらに簡単のため $\mathbb{S}_{p+1}^{m+1}(1) = \mathbb{S}_{p+1}^{m+1}$, $\mathbb{H}_p^{m+1}(1) = \mathbb{H}_p^{m+1}$ と表す．

f の形作用素を A とするとき，写像 $f_\pm$ が等長はめ込みになるための必要十分条件は $\det(I \mp A) \neq 0$ を満たすことである．従って，光錐内の超曲面を考えると，それに付随して (特異点が現れたり，一点に潰れてしまう場合もあるが) 擬球面や擬双曲空間内の超曲面を考えることができる．特に，次が成立する．

命題 12. $f : M_p^m \to \Lambda_p^{m+1}$ の形作用素 A に対し，$\det(I \mp A) \neq 0$ を満たすとする．このとき，f が等径であるならば，$f_\pm$ も等径である．逆に $f_\pm$ が等径であるならば，元々の超曲面 f も等径である．さらに相異なる主曲率の個数は保たれる．

4 主結果

まず光錐内の形作用素が対角化可能な等径等長はめ込みの分類を決定する．

定理 13. $m \geq 3$ とし，等長はめ込み $f : M_p^m \to \Lambda_p^{m+1}$ は等径であるとする．形作用素 A が対角化可能であるならば，M_p^m は擬 Riemann 空間形

$$\mathbb{E}_p^m, \ \mathbb{S}_p^m(r), \ \mathbb{H}_p^m(r)$$

または擬 Riemann 直積多様体

$$\mathbb{S}_s^k(r) \times \mathbb{H}_{p-s}^{m-k}(r) \ (2 \leq k \leq m-2), \ \mathbb{S}_p^{m-1}(r) \times \mathbb{E}^1, \ \mathbb{H}_p^{m-1}(r) \times \mathbb{E}^1, \ \mathbb{S}_{p-1}^{m-1}(r) \times \mathbb{E}_1^1, \ \mathbb{H}_{p-1}^{m-1}(r) \times \mathbb{E}_1^1$$

のいずれかに擬 Riemann 多様体として局所等長同型である．さらに f の像は次のいずれかの像と局所的に合同である：

(1) $\mathbb{E}_p^m \to \Lambda_p^{m+1}$; $x \mapsto \left(\langle x, x \rangle_p + \dfrac{1}{4}, x, \langle x, x \rangle_p - \dfrac{1}{4} \right)$,

(2) $\mathbb{S}_p^m(r) \to \Lambda_p^{m+1}$; $x \mapsto (r, x) \quad (r > 0)$,

(3) $\mathbb{H}_p^m(r) \to \Lambda_p^{m+1}$; $x \mapsto (x, r) \quad (r > 0)$,

(4) $\mathbb{S}_s^k(r) \times \mathbb{H}_{p-s}^{m-k}(r) \to \Lambda_p^{m+1}$; $(x, y) \mapsto (x, y) \quad (r > 0, \ 2 \leq k \leq m-2)$,

(5) $\mathbb{S}_p^{m-1}(r) \times \mathbb{E}^1 \to \Lambda_p^{m+1}$; $(x, t) \mapsto \left(r \cosh\left(\dfrac{t}{r}\right), x, r \sinh\left(\dfrac{t}{r}\right) \right) \quad (r > 0)$,

(6) $\mathbb{H}_p^{m-1}(r) \times \mathbb{E}^1 \to \Lambda_p^{m+1}$; $(x, t) \mapsto \left(x, r \cos\left(\dfrac{t}{r}\right), r \sin\left(\dfrac{t}{r}\right) \right) \quad (r > 0)$,

(7) $\mathbb{S}_{p-1}^{m-1}(r) \times \mathbb{E}_1^1 \to \Lambda_p^{m+1}$; $(x, t) \mapsto \left(r \cos\left(\dfrac{t}{r}\right), r \sin\left(\dfrac{t}{r}\right), x \right) \quad (r > 0, \ p \geq 1)$,

(8) $\mathbb{H}_{p-1}^{m-1}(r) \times \mathbb{E}_1^1 \to \Lambda_p^{m+1}$; $(x, t) \mapsto \left(r \sinh\left(\dfrac{t}{r}\right), x, r \cosh\left(\dfrac{t}{r}\right) \right) \quad (r > 0, \ p \geq 1)$.

さらに M_p^m 測地的完備であるならば，f の像は上記のいずれかの像に合同である．

この定理の証明は以下の通りである．まず形作用素が対角化可能であることと Schouten 作用素が対角化可能であることは同値であり，そのようなクラスの共形平坦擬 Riemann 多様体は (定理 10, 注意 11 より) 分類されていることから，光錐への等長はめ込みを実際に構成しさえすれば良い．一意性は，光錐への等長はめ込みの剛性 (注意 5) より従う．

この分類結果と命題 12 の応用として，光錐内の等径超曲面の分類から非平坦な擬 Riemann 空間形内の等径超曲面の分類定理を得ることが出来る．

定理 14. $m \geq 3,\ 0 \leq p \leq m$ とし，等長はめ込み $f : M_p^m \to \mathbb{S}_{p+1}^{m+1}$ は等径であるとする．このとき，形作用素 A が対角化可能であるならば，f の像は次のいずれかの像と局所的に合同である:

(1) $\mathbb{E}_p^m \to \mathbb{S}_{p+1}^{m+1}\ ; x \mapsto \left(\langle x, x\rangle_p - \dfrac{3}{4}, x, \langle x, x\rangle_p - \dfrac{5}{4}\right)$,
(2) $\mathbb{S}_p^m(r) \to \mathbb{S}_{p+1}^{m+1}\ ;\ x \mapsto \left(\sqrt{r^2-1}, x\right) \quad (r \geq 1)$,
(3) $\mathbb{H}_p^m(r) \to \mathbb{S}_{p+1}^{m+1}\ ;\ x \mapsto \left(x, \sqrt{1+r^2}\right) \quad (r > 0)$,
(4) $\mathbb{S}_s^k\left(\sqrt{1+r^2}\right) \times \mathbb{H}_{p-s}^{m-k}(r) \to \mathbb{S}_{p+1}^{m+1}\ ;\ (x, y) \mapsto (x, y) \quad (r > 0,\ 2 \leq k \leq m-2)$,
(5) $\mathbb{S}_p^{m-1}\left(\sqrt{1+r^2}\right) \times \mathbb{E}^1 \to \mathbb{S}_{p+1}^{m+1}\ ;\ (x, t) \mapsto \left(r\cosh\left(\dfrac{t}{r}\right), x, r\sinh\left(\dfrac{t}{r}\right)\right) \quad (r > 0)$,
(6) $\mathbb{H}_p^{m-1}\left(\sqrt{r^2-1}\right) \times \mathbb{E}^1 \to \mathbb{S}_{p+1}^{m+1}\ ;\ (x, t) \mapsto \left(x, r\cos\left(\dfrac{t}{r}\right), r\sin\left(\dfrac{t}{r}\right)\right) \quad (r > 1)$,
(7) $\mathbb{S}_{p-1}^{m-1}\left(\sqrt{1+r^2}\right) \times \mathbb{E}_1^1 \to \mathbb{S}_{p+1}^{m+1}\ ;\ (x, t) \mapsto \left(r\cos\left(\dfrac{t}{r}\right), r\sin\left(\dfrac{t}{r}\right), x\right) \quad (r > 0,\ p \geq 1)$,
(8) $\mathbb{H}_{p-1}^{m-1}\left(\sqrt{r^2-1}\right) \times \mathbb{E}_1^1 \to \mathbb{S}_{p+1}^{m+1}\ ;\ (x, t) \mapsto \left(r\sinh\left(\dfrac{t}{r}\right), x, r\cosh\left(\dfrac{t}{r}\right)\right) \quad (r > 1,\ p \geq 1)$.

さらに M_p^m が測地的完備であるならば，f の像は上記のいずれかの像に合同である．

証明の方針は次の通りである．仮定より，等長はめ込み $f : M_p^m \to \mathbb{S}_{p+1}^{m+1}$ は等径であるとする．このとき，命題 12 と類似の考察により，$f_+ : M^m \to \Lambda_p^{m+1}$ による誘導計量で，M^m は共形平坦となり，さらに f_+ は等径である．定理 13 より，f_+ は分類済みである．また f_+ は等長はめ込みであるから f_- を以下で求めることができる ([LJ08]).

$$f_- = \frac{1}{m}\Delta f_+ - \frac{S}{2m(m-1)} f_+.$$

ここで，スカラー曲率 S やラプラシアン Δ は f_+ の誘導計量によるものであることに注意する．従って $f_\pm$ の具体的表示から，f を復元することで分類結果が得られる．すなわち，共径平坦擬 Riemann 多様体の分類から，擬球面内の等径超曲面の分類が具体的な表示でもってして得られる．

注意 15. この結果は，$m \geq 3$ で成立することに注意せよ．また擬 Riemann 空間形内の形作用素が対角化可能である等径超曲面の分類は，Abe–Koike–Yamaguchi [AKY87] によって得られていること注意せよ．本研究ではその分類定理の別証明を与えているということになる．一方，擬 Riemann 空間形内の等径曲面の場合であるが，形作用素が対角化可能である場合に分類が完了している ([LZ03])．また，3 次元 de Sitter 時空 $\mathbb{S}_1^3$ 内の等径曲面に関して，Li–Wang [LW05] によって，対角化可能でない場合を込めて，完全な分類が得られている．

特に，指数 $(m+1)$ の擬球面 $\mathbb{S}_{m+1}^{m+1}$ は双曲空間 $\mathbb{H}^{m+1}$ に反等長同型であるから，系として次を得る．

系 16. $m \geq 3$ とし，等長はめ込み $f : M_0^m \to \mathbb{H}^{m+1}$ は等径であるとする．このとき，f の像は次のいずれかの像と局所的に合同である：

(1) $\mathbb{E}^m \to \mathbb{H}^{m+1}\ ;\ x \mapsto \left(||x||^2 + \dfrac{5}{4}, x, ||x||^2 + \dfrac{3}{4}\right)$,
(2) $\mathbb{S}^m(r) \to \mathbb{H}^{m+1}\ ;\ x \mapsto (\sqrt{1+r^2}, x) \quad (r > 0)$,
(3) $\mathbb{H}^m(r) \to \mathbb{H}^{m+1}\ ;\ x \mapsto (x, \sqrt{r^2-1}) \quad (r \geq 1)$,
(4) $\mathbb{S}^k\left(\sqrt{r^2-1}\right) \times \mathbb{H}^{m-k}(r) \to \mathbb{H}^{m+1}\ ;\ (x, y) \mapsto (x, y) \quad (r > 1,\ 2 \leq k \leq m-2)$,
(5) $\mathbb{S}^{m-1}\left(\sqrt{r^2-1}\right) \times \mathbb{E}^1 \to \mathbb{H}^{m+1}\ ;\ (x, t) \mapsto \left(x, r\sinh\left(\dfrac{t}{r}\right), r\cosh\left(\dfrac{t}{r}\right)\right) \quad (r > 1)$,
(6) $\mathbb{H}^{m-1}\left(\sqrt{1+r^2}\right) \times \mathbb{E}^1 \to \mathbb{H}^{m+1}\ ;\ (x, t) \mapsto \left(r\cos\left(\dfrac{t}{r}\right), r\sin\left(\dfrac{t}{r}\right), x\right) \quad (r > 0)$,

ここで，$||\cdot||$ は標準的なユークリッドノルムを表す．さらに M_0^m が測地的完備であるならば，f の像は上記のいずれかの像に合同である．

この系 16 より，Riemann 幾何において等質な共形平坦多様体の分類結果 (定理 9) と双曲空間内の等径超曲面の分類結果の類似性が観察される．

5　課題

外空間が Lorentz 空間形である場合，空間的等径超曲面の形作用素は必ず対角化可能であるが，時間的等径超曲面は必ずしもそうではないし，複素固有値を持ち得る．実際，Magid [Ma85] は，時間的超曲面の計量に自己随伴な接束上の束準同型 A は次の 4 パターンに分かれることを示した．

$$[\text{Type I}]\ A \sim \begin{bmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{bmatrix}, \qquad [\text{Type II}]\ A \sim \begin{bmatrix} a_0 & 0 & & & \\ 1 & a_0 & & & \\ & & a_1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & a_{n-2} \end{bmatrix}$$

$$[\text{Type III}]\ A \sim \begin{bmatrix} a_0 & 0 & 0 & & & \\ 0 & a_0 & 1 & & & \\ -1 & 0 & a_0 & & & \\ & & & a_1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & a_{n-3} \end{bmatrix}, \qquad [\text{Type IV}]\ A \sim \begin{bmatrix} a_0 & b_0 & & & \\ -b_0 & a_0 & & & \\ & & a_1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & a_{n-2} \end{bmatrix} \quad (b_0 \neq 0).$$

Honda–Tsukada [HT13] は等質な共形平坦 Lorentz 多様体を Type III を除き，局所的な分類を完成させている．一方で Xiao [Xi99] は，外空間が反 de Sitter 時空内の等径超曲面の局所な分類を完成した．

本研究の観点から得られる帰結を考える．まず等質な共形平坦 Lorentz 多様体の Schouten 作用素 A が Type III のとき，適当な (正規直交ではない) 基底を選択すると

$$A \sim \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & & & & & \\ 0 & \lambda & 1 & & & & & \\ 1 & 0 & \lambda & & & & & \\ & & & \ddots & & & & \\ & & & & \lambda & & & \\ & & & & & -\lambda & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & -\lambda \end{bmatrix}$$

と表示可能である．ただし，

$$\lambda < 0, \quad \dim T_\lambda \geq \dim T_{-\lambda} + 2$$

である．ここで T_α は α に関する固有空間である．従って $f_\pm$ がはめ込みになるための条件は，$\det(I \mp A) \neq 0$ であることと同値であるから，Type III の場合，$\lambda \neq -1$ と同値である．すなわち，$\lambda \neq -1$ を満たす場合，Xiao による分類結果を用いれば，本質的には共形平坦 Lorentz 多様体の分類が得られることになる．以上により，完全な分類を完成させるためには $\lambda = -1$ の場合のみが残った．

問題 1. $\lambda = -1$ である共形平坦等質 Lorentz 多様体を分類せよ．

等質ならば等径であるから，光錐への等長はめ込み $f : M_1^m \to \Lambda_1^{m+1}$ は等径であるが，M_1^m は等質でない例を決定できれば，それも興味深い問題になり得る．

問題 2. 等質でない Magid の意味での等径な共形平坦 Lorentz 多様体は存在するか．

ここで，擬 Euclid 空間 $\mathbb{E}_2^{m+2}$ の平行移動を落とした等長変換群 $O(2,m)$ は光錐 Λ_1^{m+1} に等長的かつ推移的に作用していることに注意する．すなわち，光錐内の (外在的) 等質超曲面を分類する方が先か．

参考文献

[AKY87] N. Abe, N. Koike and S. Yamaguchi, *Congruence theorems for proper semi-Riemannian hypersurfaces in a real space form*, Yokohama Math. J., **35**, (1987), no. 1–2, 123–136.

[AD89] A. C. Asperti and M. Dajczer, *Conformally flat Riemannian manifolds as hypersurfaces of the light cone*, Canad. Math. Bull., **32**, (1989), 281–285.

[BD96] A. Bejancu and K. L. Duggal, *Lightlike submanifolds of semi-Riemannian manifolds and applications*, Kluwer Academic Publishers, (1996).

[Ha84] J. Hahn, *Isoparametric hypersurfaces in the pseudo-Riemannian space forms*, Math. Z., **187** (1984), 195–208.

[HT04] K. Honda and K. Tsukada, *Conformally flat semi-Riemannian manifolds with nilpotent Ricci operators and affine differential geometry*, Ann. Global Anal. Geom., **25** (2004), 253–275.

[HT07] K. Honda and K. Tsukada, *Three-dimensional conformally flat homogeneous Lorentzian manifolds*, J. Phys. A, **40** (2007), 831–851.

[HT13] K. Honda and K. Tsukada, *Conformally flat homogeneous Lorentzian manifolds*, Recent trends in Lorentzian geometry, Springer Proc. Math. Stat., **26**, Springer, New York, (2013), 295–314.

[Iz09] S. Izumiya, *Legendrian dualities and spacelike hypersurfaces in the lightcone*, Mosc. Math. J., **9**, (2009), 325–357.

[Li12] Z.-Q. Li, *Lorentzian isoparametric hypersurfaces in the Lorentzian sphere* S_1^{n+1}, Surveys in Geometry Analysis, Adv. Lect. Math. (ALM), **23**, (2012), 267–328.

[Li18] Z.-Q. Li, *Lorentzian isoparametric hypersurfaces in the Lorentzian sphere* S_1^{n+1} (in Chinese), Scientia Sinica Mathematica, **48**, (2018), 725–756.

[LJ08] H. Liu and S. D. Jung, *Hypersurfaces in lightlike cone*, J. Geom. Phys., **58** (2008), 913–922.

[LUY11] H. Liu, M. Umehara and K. Yamada, *The duality of conformally flat manifolds*, Bull. Braz. Math. Soc. (N.S.), **42** (2011), 131–152.

[LW05] C. Li and J. Wang, *The classification of isoparametric surfaces in* S_1^3, Kobe J. Math., **22** (2005), 1–12.

[LX06] Z.-Q. Li and X.-H. Xie, *Space-like isoparametric hypersurfaces in Lorentzian space forms*, Front. Math. China, **1** (2006), 130–137.

[LZ03] M. Li and Y. Zhao, *Isoparametric surfaces in* 3*-dimensional de Sitter space and anti-de Sitter space*, Northeast. Math. J., **19** (2003), 259–266.

[Ma84] M. Magid, *Isometric immersions of Lorentz space with parallel second fundamental forms*, Tsukuba J. Math. **8** (1984), 31–54.

[Ma85] M. A. Magid, *Lorentzian isoparametric hypersurfaces*, Pacific J. Math., **118**, (1985), no. 1, 165–197.

[No81] K. Nomizu, *On isoparametric hypersurfaces in the Lorentzian space forms*, Japan J. Math., **7**, (1981), no. 1, 217–226.

[Ta75] H. Takagi, *Conformally flat Riemannian manifolds admitting a transitive group of isometries*, Tohoku Math. J. (2), **27** (1975), 103–110.

[Wei96] T. Weinstein, *An introduction to Lorentz surfaces*, De Gruyter Expositions in Mathematics, **22**, Walter de Gruyter & Co., Berlin, (1996).

[Xi99] L. Xiao, *Lorentzian isoparametric hypersurfaces in* H_1^{n+1}, Pacific J. Math., **189**, (1999), no. 2, 377–397.