非連結コンパクト Lie 群の極地
とコンパクト対称空間の極大対蹠集合

田崎博之
(筑波大学)
部分多様体幾何とリー群作用 2021

この講演の内容は田中真紀子さんとの共同研究の成果に基づいている。今までにこの研究集会で古典型コンパクト Lie 群の極大対蹠部分群の分類、連結コンパクト Lie 群内に極地として実現されるコンパクト対称空間の極大対蹠集合の分類について講演を行った。今回は連結コンパクト Lie 群内に極地として実現されないが、非連結コンパクト Lie 群内に極地として実現されるコンパクト対称空間の極大対蹠集合の分類を行う。

1　対蹠集合

コンパクト Riemann 対称空間 M の点 x における点対称を s_x で表す。M の部分集合 S は次の条件を満たすとき、**対蹠集合**という。すべての $x, y \in S$ に対して $s_x(y) = y$ が成り立つ。M の対蹠集合の元の個数の最大値を **2-number** といい $\#_2 M$ で表す。$\#_2 M$ は有限の値になることがわかる。2-number を与える対蹠集合を**大対蹠集合**と呼ぶ。これらの概念は Chen-Nagano [2] が導入した。包含関係に関して極大な対蹠集合を**極大対蹠集合**と呼ぶ。大対蹠集合は極大な対蹠集合になるが、一般には逆は成り立たない。

2　極地

集合 X と写像 $f : X \to X$ に対して

$$F(f, X) = \{x \in X \mid f(x) = x\}$$

によって f の**不動点集合** $F(f, X)$ を定める。前節同様に、M をコンパクト Riemann 対称空間とする。M の点 o に対して、o における点対称 s_o の不動点集合 $F(s_o, M)$ の各連結成分を**極地**と呼ぶ。一点から成る極地を**極**と呼ぶ。極地はその定義から

全測地的部分多様体であることがわかる。特に誘導計量に関して Riemann 対称空間になる。極地や極も Chen-Nagano の導入した概念であり、これまでに多くの研究がある。

3 対称 R 空間

Riemann 対称対の線形イソトロピー作用の軌道が Riemann 対称空間になるとき、これを**対称 R 空間**と呼ぶ。対称 R 空間は、コンパクト Riemann 対称空間の中でも特によい性質を持っている。対称 R 空間の大対蹠集合とトポロジーの関連性には成果が挙がっているが、我々がこの研究を始めた頃は、一般のコンパクト対称空間の極大対蹠集合の情報はあまりなかった。

極地はイソトロピー部分群の軌道になっていて、この性質を利用して詳しく調べることができる。これまでの極地に関する研究は対蹠集合に関するものに比べて多数あり、極地に関する研究成果を利用して対蹠集合を調べる。

対称 R 空間の大対蹠集合の例を挙げておく。$n+1$ 次元 Euclid 空間の原点を中心とする半径 r の n 次元球面を $S^n(r)$ で表す。$S^n(r)$ は Euclid 空間の標準的計量から誘導される計量に関して対称 R 空間になる。$x \in S^n(r)$ に対して $F(s_x, S^n(r)) = \{\pm x\}$ が成り立つ。これより、$\{\pm x\}$ は $S^n(r)$ の大対蹠集合であることがわかる。

もう一つ例を挙げておく。$\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ を係数体とする射影空間を $P^n(\mathbb{K})$ で表す。具体的な計算により、$F(s_x, P^n(\mathbb{K})) = \{x\} \cup P^{n-1}(\mathbb{K})$ であることがわかる。ここで、$P^{n-1}(\mathbb{K})$ は x の直交補空間内の 1 次元部分空間全体のなす射影空間である。$e_1, \dots, e_{n+1}$ を $\mathbb{K}^{n+1}$ の正規直交 $\mathbb{K}$ 基底とすると、$\{\mathbb{K}e_1, \dots, \mathbb{K}e_{n+1}\}$ は $P^n(\mathbb{K})$ の大対蹠集合になる。

一般に対称 R 空間 M の $\#_2 M$ は M の $\mathbb{Z}_2$ 係数の Betti 数の総和に一致する。これは Takeuchi の結果である。上に挙げた例でこの関係を調べてみよう。球面の場合は $|\{\pm x\}| = 2$ であり、これは $S^n(r)$ の $\mathbb{Z}_2$ 係数の Betti 数の総和に一致する。射影空間の場合は $|\{\mathbb{K}e_1, \dots, \mathbb{K}e_{n+1}\}| = n+1$ であり、これは $P^n(\mathbb{K})$ の $\mathbb{Z}_2$ 係数の Betti 数の総和に一致する。

4 コンパクト Lie 群

コンパクト Lie 群には両側不変 Riemann 計量が存在し、これに関してコンパクト Riemann 対称空間になる。よって、コンパクト Lie 群の対蹠集合を考えることができる。コンパクト Lie 群の単位連結成分では、点対称は $s_x(y) = xy^{-1}x$ と記述できる。このように点対称を代数的に記述できるので、単位連結成分以外への点対称の作用をこの代数的記述によって拡張できる。また、コンパクト Lie 群を対称空間として考えることにより、その代数的構造を幾何学的観点から調べることができる。

コンパクト Lie 群の極大対蹠集合が単位元を含むとき、可換部分群になることがわかる。さらに、単位元以外の元の位数は 2 になるので、有限生成可換群の基本定理より、$\mathbb{Z}_2$ のいくつかの積 $\mathbb{Z}_2 \times \cdots \times \mathbb{Z}_2$ に同型な部分群になることがわかる。この 2 を一般の素数 p に変えた部分群の研究が Borel-Serre [1] によってなされている。これは Chen-Nagano[2] の先行研究であり、$p = 2$ の場合に限って対称空間に一般化したのが、Chen-Nagano の導入したコンパクト対称空間における対蹠集合である。

5 記号の準備

コンパクト対称空間の極大対蹠集合の分類結果を記述するための記号の準備をしておく。

$$\Delta_n = \left\{ \begin{bmatrix} \pm 1 & & \\ & \ddots & \\ & & \pm 1 \end{bmatrix} \right\} \subset O(n), \quad \Delta_n^{\pm} = \{ g \in \Delta_n \mid \det g = \pm 1 \}$$

とすると、Δ_n と Δ_n^+ はそれぞれ $U(n)$ と $SU(n)$ の共役を除いて一意的な大対蹠部分群である。Δ_n と Δ_n^+ はそれぞれ $O(n)$ と $SO(n)$ の共役を除いて一意的な大対蹠部分群でもある。商群の極大対蹠部分群を記述するにはさらに記号を準備する必要がある。ここではユニタリ群に関するもののみ扱う。

$$I_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad J_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad K_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

とおいて、

$$D[4] = \{ \pm 1_2, \pm I_1, \pm J_1, \pm K_1 \},$$
$$D^{\pm}[4] = \{ g \in D[4] \mid \det g = \pm 1 \}$$

によって二面体群 $D[4]$ とその部分集合 $D^{\pm}[4]$ を定める。$D^{+}[4]$ は部分群である。自然数 n を 2 の冪 2^k と奇数 l の積 $2^k \cdot l$ に分解し、$0 \leq s \leq k$ に対して

$$D(s, n) = \{ d_1 \otimes \cdots \otimes d_s \otimes d_0 \mid d_i \in D[4]\,(1 \leq i \leq s), d_0 \in \Delta_{n/2^s} \}$$

によって部分群 $D(s, n) \subset O(n)$ を定める。この部分群の元の形は、たとえば

$$J_1 \otimes d_0 = \begin{bmatrix} 0 & -d_0 \\ d_0 & 0 \end{bmatrix}, \quad I_1 \otimes K_1 \otimes d_0 = \begin{bmatrix} 0 & -d_0 & 0 & 0 \\ -d_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_0 \\ 0 & 0 & d_0 & 0 \end{bmatrix}$$

となっている。$D(s,n)$ の元 d は $d^2 = \pm 1_n$ を満たす。

$$\begin{aligned} PD(s,n) &= \{d \in D(s,n) \mid d^2 = 1_n\}, \\ ND(s,n) &= \{d \in D(s,n) \mid d^2 = -1_n\} \end{aligned}$$

によって、$PD(s,n)$ と $ND(s,n)$ を定める。

6 $U(n)$ の商群の極大対蹠部分群

定理 6.1 (Tanaka-T.[3]). μ を自然数、$\mathbb{Z}_\mu$ を $U(n)$ の中心内の μ 次巡回群、すなわち

$$\mathbb{Z}_\mu = \{z 1_n \mid z^\mu = 1\},$$

θ を 1 の原始 2μ 乗根とする。$U(n)$ から $U(n)/\mathbb{Z}_\mu$ への自然な射影を π_n で表す。このとき、$U(n)/\mathbb{Z}_\mu$ の極大対蹠部分群は次のいずれかに共役である。

(1) n または μ が奇数のとき、$\pi_n(\{1,\theta\}\Delta_n)$.

(2) n と μ がともに偶数のとき、$\pi_n(\{1,\theta\}D(s,n)) \quad (0 \leq s \leq k)$,
ただし、$(s,n) = (k-1, 2^k)$ の場合は除外。

この講演では $U(n)$ に関する結果のみ述べているが、他の古典型コンパクト Lie 群およびその商群の極大対蹠部分群の分類結果については [3] を参照。

7 極大対蹠集合の分類の方針

G をコンパクト Lie 群とする。$\{B_i\}$ を G の極大対蹠部分群の分類結果とする。このとき、$\{M \cap B_i\}$ は M の極大対蹠集合の分類結果の候補になる。各 $M \cap B_i$ が M の極大対蹠集合かどうか確認することにより、M の極大対蹠集合の分類を得る。G の極大対蹠部分群の共役類と M の極大対蹠集合の合同類の対応等の詳細については [4] を参照。

8 極地の極大対蹠集合の分類

自然数 $1 \leq k \leq n-1$ に対して、$\mathbb{C}^n$ 内の k 次元複素部分空間全体のなす複素 Grassmann 多様体を $G_k(\mathbb{C}^n)$ で表す。$G_k(\mathbb{C}^n)$ の元、すなわち $\mathbb{C}^n$ 内の k 次元複素部分空間 V に対して V に関する鏡映変換 $1_V - 1_{V^\perp} \in U(n)$ を対応させることにより、$G_k(\mathbb{C}^n)$ を $U(n)$ に埋め込むことができる。この埋め込みの像は $U(n)$ の極地になることがわかる。$U(n)$ の極地としての $G_k(\mathbb{C}^n)$ の実現と $U(n)$ の極大対蹠部分群の分類より次の定理を得る。

定理 8.1. $G_k(\mathbb{C}^n)$ の極大対蹠集合は

$$G_k(\mathbb{C}^n) \cap \Delta_n = \{\langle \boldsymbol{e}_{i_1}, \ldots, \boldsymbol{e}_{i_k} \rangle \mid 1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n\}$$

に合同である。ただし、$\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ は $\mathbb{C}^n$ の標準的ユニタリ基底であり、$\langle \boldsymbol{e}_{i_1}, \ldots, \boldsymbol{e}_{i_k} \rangle$ は $\boldsymbol{e}_{i_1}, \ldots, \boldsymbol{e}_{i_k}$ の張る部分空間である。

$U(2m)$ の極地としての $G_m(\mathbb{C}^{2m})$ の実現から、$U(2m)^* = U(2m)/\{\pm 1_{2m}\}$ の極地としての $G_m(\mathbb{C}^{2m})^* = G_m(\mathbb{C}^{2m})/\{\pm 1_{2m}\}$ の実現が定まる。

$$\begin{array}{ccc}
G_m(\mathbb{C}^{2m}) & \hookrightarrow & U(2m) \\
\downarrow & & \downarrow \\
G_m(\mathbb{C}^{2m})^* & \hookrightarrow & U(2m)^*
\end{array}$$

$U(2m)^*$ の極地としての $G_m(\mathbb{C}^{2m})^*$ の実現と $U(2m)^*$ の極大対蹠部分群の分類より次の定理を得る。

定理 8.2 (Tanaka-T.[4]). 商空間 $G_m(\mathbb{C}^{2m})^*$ の極大対蹠集合は次のいずれかに $U(2m)^*$ 合同である。

$$\begin{aligned}
&\pi_{2m}(\{d_1 \otimes \cdots \otimes d_s \otimes d_0 \in PD(s, 2m) \mid \exists d_i \ (0 \leq i \leq s) \ \mathrm{Tr} d_i = 0\} \\
&\qquad \cup \sqrt{-1} ND(s, 2m)) \qquad (0 \leq s \leq k),
\end{aligned}$$

ただし、$(s, 2m) = (k-1, 2^k)$ の場合は除外、$m = 2$ のときは $\pi_4(\{d_0 \in PD(0, 4) \mid \mathrm{Tr} d_0 = 0\})$ も除外する。

9　半直積の極地の極大対蹠集合の分類

前節ではユニタリ群 $U(n)$ またはその商群 $U(n)/\mathbb{Z}_\mu$ の極地として実現されるコンパクト対称空間の極大対蹠集合を分類した。この節では、これら連結コンパクト Lie 群の極地として実現できないが、$U(n)$ または $U(n)/\mathbb{Z}_\mu$ を単位連結成分に持つ非連結コンパクト Lie 群の極地として実現できる $UI(n)$, $UII(n)$ およびこれらの商空間の極大対蹠集合を分類する。

$U(n)$ の対合的自己同型写像 σ_I を

$$\sigma_I(g) = \bar{g} \qquad (g \in U(n))$$

によって定める。さらに、

$$UI(n) = \{g \in U(n) \mid \sigma_I(g) = g^{-1}\} \cong U(n)/O(n)$$

によって$UI(n)$を定める。$UI(n)$は$U(n)$の計量から誘導される計量に関して対称空間になる。$UI(n)$は連結コンパクト Lie 群の極地として実現できないことが知られている。$UI(n)$は**捩れた共役作用** $\rho_{\sigma_I}(g)x = gx\sigma_I(g)^{-1}$ の軌道

$$UI(n) = \rho_{\sigma_I}(U(n))1_n$$

になることがわかる。これは共役軌道ではないので、極大対蹠部分群の共役類の分類結果を利用しにくい。σ_I の生成する$U(n)$の自己同型群の部分群 $\langle\sigma_I\rangle = \{1, \sigma_I\}$ と$U(n)$との半直積$U(n) \rtimes \langle\sigma_I\rangle$ においては、$UI(n)$を共役作用の軌道として実現できることを後で示す。半直積とは積集合$U(n) \times \langle\sigma_I\rangle$ に積演算

$$(g, \sigma_I)(h, x) = (g\sigma_I(h), \sigma_I x) \quad (g, h \in G,\ \sigma_I, x \in \langle\sigma_I\rangle)$$

を定めたものである。$U(n) \rtimes \langle\sigma_I\rangle$ は$U(n) \rtimes \langle\sigma_I\rangle = (U(n), 1) \cup (U(n), \sigma_I)$ と二つの連結成分に分解される。$U(n) \rtimes \langle\sigma_I\rangle$ の単位元を $\hat{e} = (1_n, 1)$ で表す。

$$(x, \sigma_I)^2 = (x, \sigma_I)(x, \sigma_I) = (x\sigma_I(x), 1)$$

となり、

$$(x, \sigma_I) \in F(s_{\hat{e}}, U(n) \rtimes \langle\sigma_I\rangle) \Leftrightarrow \sigma_I(x) = x^{-1}$$

が成り立つ。したがって、

$$F(s_{\hat{e}}, U(n) \rtimes \langle\sigma_I\rangle) = \bigcup_{0 \le r \le n} (G_r(\mathbb{C}^n), 1) \cup (UI(n), \sigma_I)$$

となり、$UI(n)$は半直積$U(n) \rtimes \langle\sigma_I\rangle$ の単位連結成分ではない方の連結成分に極地として実現できる。

$$(g, 1)(x, \sigma_I)(g, 1)^{-1} = (gx, \sigma_I)(g^{-1}, 1) = (gx\sigma_I(g^{-1}), \sigma_I) = (\rho_{\sigma_I}(g)x, \sigma_I)$$

となることから、σ_I による半直積における共役作用にはσ_I による捩れた共役作用が現れる。

定理 9.1 ([6]). $U(n) \rtimes \langle\sigma_I\rangle$ の極大対蹠部分群は $\Delta_n \rtimes \langle\sigma_I\rangle$ に共役になる。

この定理より次の定理を得る。

定理 9.2 ([6]). $UI(n)$の極大対蹠集合は Δ_n に合同になる。

ここで、コンパクト Lie 群の単位連結成分以外の連結成分の元の標準形に関する結果について述べておく。Gをコンパクト Lie 群とし、その単位連結成分をG_0で表す。T_0をG_0の極大トーラスとすると、

$$G_0 = \bigcup_{g \in G_0} gT_0g^{-1}$$

が成り立つ。これは連結コンパクト Lie 群の基本事項である。G の元 τ に対して $I_\tau(g) = \tau g \tau^{-1}$ により G の自己同型写像 I_τ を定める。I_τ は G_0 を不変にするので、$F(\tau, G_0)$ を考えることができる。T_τ を $F(\tau, G_0)$ の極大トーラスとする。τ を含む G の連結成分は $G_0\tau$ になり、

$$G_0\tau = \bigcup_{g \in G_0} g(T_\tau \tau)g^{-1}$$

が成り立つことが、Hermann 作用の性質を応用することにより得られる。この標準形を使うことにより、G の各連結成分における極地を求めることが可能になる。上記の非連結コンパクト Lie 群の元の標準形の議論を 2 次直交群 $O(2)$ に適用すると次の表示を得る。もっとも、この表示は行列の計算からも得られる。

$$O(2) = SO(2) \cup \bigcup_{g \in SO(2)} g \begin{bmatrix} 1 & \\ & -1 \end{bmatrix} g^{-1}.$$

幾何学的には、$O(2)$ は回転と線対称変換からなっていることを上の記述は表している。

非連結コンパクト Lie 群の極地に関する詳細は [5] を参照。

$UI(n)$ の商空間の極大対蹠集合の分類について考える。そのために、まず $U(n) \rtimes \langle \sigma_I \rangle$ の商群の極大対蹠部分群を分類する。μ を自然数とし、$\pi_n : U(n) \rtimes \langle \sigma_I \rangle \to U(n) \rtimes \langle \sigma_I \rangle / \mathbb{Z}_\mu$ を自然な射影とする。θ を 1 の原始 2μ 乗根とする。

定理 9.3 ([6]). $U(n) \rtimes \langle \sigma_I \rangle / \mathbb{Z}_\mu$ の極大対蹠部分群は次のいずれかに共役になる。

(1) μ が奇数のとき、$\pi_n(\Delta_n \rtimes \langle \sigma_I \rangle)$.

(2) μ が偶数のとき、$\pi_n(\{1, \theta\} D(s, n) \rtimes \langle \sigma_I \rangle)$ $(0 \leq s \leq k)$. ただし、$(s, n) = (k-1, 2^k)$ の場合は除外する。

$(UI(n), \sigma_I) \subset U(n) \rtimes \langle \sigma_I \rangle$ より $(UI(n)/\mathbb{Z}_\mu, \sigma_I) \subset U(n) \rtimes \langle \sigma_I \rangle / \mathbb{Z}_\mu$ が定まり、これは $U(n) \rtimes \langle \sigma_I \rangle / \mathbb{Z}_\mu$ の極地になる。他方、これは連結コンパクト Lie 群の極地としては実現できない。$U(n) \rtimes \langle \sigma_I \rangle / \mathbb{Z}_\mu$ の極大対蹠部分群の分類を利用して次を得る。

定理 9.4 ([6]). $UI(n)/\mathbb{Z}_\mu$ の極大対蹠集合は次のいずれかに合同になる。

(1) μ が奇数の場合、$\pi_n(\Delta_n)$.

(2) μ が偶数の場合、$\pi_n(\{1, \theta\} PD(s, n))$. ただし、$0 \leq s \leq k$ であり、$(s, n) = (k-1, 2^k)$ の場合を除く。

$J_n = J_1 \otimes 1_n \in SO(2n)$ によって J_n を定め、$U(2n)$ の対合的自己同型写像 σ_{II} を

$$\sigma_{II}(g) = J_n \bar{g} J_n^{-1} \qquad (g \in U(2n))$$

によって定める。さらに、

$$UII(n) = \{g \in U(2n) \mid \sigma_{II}(g) = g^{-1}\} \cong U(2n)/Sp(n)$$

によって $UII(n)$ を定める。$UII(n)$ は $U(2n)$ の計量から誘導される計量に関して対称空間になる。$UII(n)$ は連結コンパクト Lie 群の極地として実現できないことが知られている。$UII(n)$ は**捩れた共役作用** $\rho_{\sigma_{II}}(g)x = gx\sigma_{II}(g)^{-1}$ の軌道

$$UII(n) = \rho_{\sigma_{II}}(U(2n))1_{2n}$$

になることがわかる。これは $UI(n)$ の場合と同様に共役軌道ではないので、極大対蹠部分群の共役類の分類結果を利用しにくい。$\langle\sigma_{II}\rangle$ と $U(2n)$ の半直積 $U(2n) \rtimes \langle\sigma_{II}\rangle$ においては、$UII(n)$ を共役作用の軌道として実現できることがわかる。$U(2n) \rtimes \langle\sigma_{II}\rangle$ は $U(2n) \rtimes \langle\sigma_{II}\rangle = (U(2n), 1) \cup (U(2n), \sigma_{II})$ と二つの連結成分に分解される。$U(2n) \rtimes \langle\sigma_{II}\rangle$ の単位元を $\hat{e}$ で表すと、$U(n) \rtimes \langle\sigma_I\rangle$ の場合と同様に

$$F(s_{\hat{e}}, U(2n) \rtimes \langle\sigma_{II}\rangle) = \bigcup_{0 \le r \le 2n} (G_r(\mathbb{C}^{2n}), 1) \cup (UII(n), \sigma_{II})$$

となり、$UII(n)$ は半直積 $U(2n) \rtimes \langle\sigma_{II}\rangle$ の単位連結成分ではない方の連結成分に極地として実現できる。σ_I の場合と同様に σ_{II} の場合も、半直積における共役作用には捩れた共役作用が現れる。

定理 9.5 ([6]). $U(2n) \rtimes \langle\sigma_{II}\rangle$ の極大対蹠部分群は $(\Delta_{2n}, 1)$ または $(1_2 \otimes \Delta_n) \rtimes \langle\sigma_{II}\rangle$ に共役になる。

定理 9.6 ([6]). $UII(n)$ の極大対蹠集合は $1_2 \otimes \Delta_n$ に合同になる。

$U(2n) \rtimes \langle\sigma_{II}\rangle$ の商群の極大対蹠部分群の分類結果を記述するために、次の記号を定めておく。

$$E(n) = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & d_1 \\ d_2 & 0 \end{bmatrix} \middle| d_1, d_2 \in \Delta_n \right\} \subset O(2n).$$

定理 9.7 ([6]). $n = 2^k \cdot l$ とし、θ を 1 の原始 2μ 乗根とする。このとき、$(U(2n) \rtimes \langle\sigma_{II}\rangle)/\mathbb{Z}_\mu$ の極大対蹠部分群は次のいずれかに共役になる。

(1) μ が奇数の場合

$$\pi_{2n}(\Delta_{2n}, 1), \quad \pi_{2n}((1_2 \otimes \Delta_n) \rtimes \langle\sigma_{II}\rangle).$$

(2) μ が偶数の場合

$$\pi_{2n}((\{1, \theta\}\Delta_{2n}, 1) \cup (\{1, \theta\}E(n), \sigma_{II})),$$
$$\pi_{2n}(\{1, \theta\}D(s+1, 2n) \rtimes \langle\sigma_{II}\rangle) \quad (0 \le s \le k).$$

ただし、$(s, n) = (k-1, 2^k)$ の場合を除く。

定理 9.8 ([6]). $UII(n)/\mathbb{Z}_\mu$ の極大対蹠集合は次のいずれかに合同になる。

(1) μ が奇数の場合、$\pi_{2n}(1_2 \otimes \Delta_n)$.

(2) μ が偶数の場合、

$$\pi_{2n}(\{1,\theta\}(1_2 \otimes PD(s,n) \cup \{I_1, J_1, K_1\} \otimes ND(s,n)))$$

ただし、$0 \leq s \leq k$ であり、$(s,n) = (k-1, 2^k)$ の場合を除く。

コンパクト対称空間をコンパクト Lie 群に極地として埋め込む方法で研究を進め、多くのコンパクト対称空間の極大対蹠集合の分類が完了している。これらについては一部は [4] で発表し、残りは [6] で発表する予定である。

参考文献

[1] A. Borel et J.-P. Serre, Sur certains sous-groupes des groupes de Lie compacts, Comm. Math. Helv. 27 (1953), 128–139.

[2] B.-Y. Chen and T. Nagano, A Riemannian geometric invariant and its applications to a problem of Borel and Serre, Trans. Amer. Math. Soc., 308 (1988), 273–297.

[3] M. S. Tanaka and H. Tasaki, Maximal antipodal subgroups of compact Lie groups, Journal of Lie Theory, 27 (2017), No. 3, 801–829.

[4] M. S. Tanaka and H. Tasaki, Maximal antipodal sets of compact classical symmetric spaces and their cardinalities I, Differential Geometry and its Applications 73 (2020) 101682.

[5] M. S. Tanaka and H. Tasaki, Polars of disconnected compact Lie groups, Contemporary Mathematics 777 (2022), 211–225.

[6] M. S. Tanaka and H. Tasaki, Maximal antipodal sets of compact classical symmetric spaces and their cardinalities II, in preparation.