無限時間かけて非完備になる非コンパクト山辺フローの具体例

山本 光（筑波大学数理物質系数学域）*

1　山辺フローとは何か？

M を n 次元の多様体とし，境界はないものとする．コンパクトでなくても良い．$\{g_t\}_{t\in[0,T)}$ を M 上のリーマン計量の１パラメーター族とする．これが

$$\frac{\partial}{\partial t}g_t = -\operatorname{scal}(g_t)\cdot g_t \tag{1}$$

という偏微分方程式を満たすとき，$\{g_t\}_{t\in[0,T)}$ のことを山辺フローという．ここで $\operatorname{scal}(g_t)$ は (M, g_t) のスカラー曲率である．より正確には，非正規化山辺フローと呼ぶべきかもしれないが，本稿では短縮し山辺フローと呼んでしまうことにする．ちなみに，(1) の右辺に $\operatorname{scal}(g_t)$ の平均を足した発展方程式を正規化山辺フローと呼ぶが，今の場合，M がコンパクトと仮定していないため，平均が定義できない．そのため本稿では，平均（非局所項）が無い (1) を考える．

2　コンパクトの場合

まず初めに，M がコンパクトの場合に知られている結果を簡単に紹介する．山辺フローは 1989 年に Hamilton の論文 [5] で導入され，同論文の中で，長時間解の存在と一意性は証明されていた．しかし長時間解の時間極限の存在は証明されていなかった．つまり，時間を無限大にした時に山辺フローが何らかの計量に収束するかどうかは定かではなかった．その後，まず Ye が 1994 年に論文 [8] で特定の仮定のもとで長時間解の収束を証明した．そのあとは，徐々に仮定を弱めるかたちで，2003 年に Schwetlich と Struwe [7]，次いで Brendle [1] が解の収束を証明した．収束先はスカラー曲率一定のリーマン計量である．（ただしコンパクトの場合は正規化山辺フローを考えている．）Brendle の結果まで来ると，初期のリーマン多様体に対する仮定は弱く，大胆に言えば，かなり多くのコンパクト多様体について，山辺フローの長時間解の存在と一意性と収束は解決していると言って良い．しかし，次章で述べるように，M が非コンパクトの場合は，山辺フローの短時間存在や一意性や収束性は一般には成り立たず，どのような挙動をする可能性があるのは詳しいことは分かっていない部分が非常に多い．

---

* hyamamoto@math.tsukuba.ac.jp. 本講演は東京工業大学の高橋仁氏との共同研究である．

3　非コンパクトの場合

この章を含め以下では，M は非コンパクトとする．この場合，山辺フロー (1) の挙動はよく分かっていない．コンパクトの場合に成り立っていたことのほとんどは成り立たないと考えて良さそうである．いくつか先行研究を紹介しつつ状況を整理しておく．

3.1　短時間存在について

M が非コンパクトの場合，一般には短時間存在も成り立たない．ここで「一般には成り立たない」というのはやや強く言い過ぎで，少なくとも私の知る限りでは何の条件も無しに短時間存在を証明している論文は見つけられなかったという意味合いで書いている．仮定を付けて良いのであれば短時間存在を保証する結果はある．例えば，Ma と An [6] は 1999 年に，初期状態のリーマン多様体が完備かつ局所共形平坦かつリッチ曲率が下に有界であれば短時間存在が言えるということを証明している．この他にも，短時間存在を保証するような初期条件というのはいろいろ見つかっている．

3.2　一意性について

仮に短時間解が存在したとしても，今度は一意性が言えない（場合がある）．例えば簡単な例として M を２次元の単位開円板 B としてみる．そこに初期計量として標準計量 g をおく．するとまず $g_t := g$ は山辺フローの自明な解であるが，実はこれ以外にも山辺フローの解が存在する．大雑把に説明すると，u_t を ∂B 上の正値関数で，$u_0 = 1$ となるものとすると，これを境界条件として放物型発展方程式 (1) を解くことで山辺フローの解 g_t が得られる．つまり，標準計量 g を初期条件とする山辺フローの解は（だいたい）このような u_t の数だけある．特に非加算無限個ある．

少し話が逸れるが，このような状況で「では１つ良い解を取ってこれるか？」ということを考えた人たちがいる．Giesen と Topping [4] である．彼らは $\dim M = 2$ の場合に，任意の非完備計量 g に対して

$$g_t \text{ は完備 for all } t > 0$$

という性質を満たす山辺フローの解がただ一つ存在することを示した．このような解（の性質）のことを彼らは Instantaneously completeness と呼んだ．直訳すれば即時完備性である．つまり，最初の時刻だけ完備でないがその直後からはずっと完備という状況が起こせるわけである．（さらにそのような解は一意である．）このように，非コンパクト山辺フローにも興味深い現象がまだ潜んでいると思われる．

3.3　長時間解の存在について

もちろん長時間解の存在は一般には期待できない．この場合，Daskalopoulos と King と Sesum の 2013 年の結果 [2] で，（短時間解は持つが）長時間解は持たない非コンパクト山辺フローの具体例が与えられている．

4　主結果の紹介

この研究のモチベーションと主結果を紹介する．

4.1 モチベーション

非コンパクトなリーマン多様体を研究するとき，最初に期待したいのは完備性であろう．従って，研究の初期のころに，“完備性” という観点から山辺フローの結果を調べてみた．そして，起こりうる状況を場合分けした時に，実際にその現象が起こりうるのかどうかを調査した．まず大前提として，ある $T \in (0,\infty]$ が存在して山辺フロー g_t の解が任意の $t \in [0,T)$ に対して完備である状況のみを考えることにする．以下のように分類できる．

(1) $T < \infty$ の場合．この場合 g_T は非完備ということになり，状況はさらに 2 分される．
  - (i) ある時刻 $T' \geq T$ で g_t は爆発する．
  - (ii) g_t は山辺フローの長時間解になる．

(2) $T = \infty$ の場合．この場合 g_t は常に完備な山辺フローの長時間解となり，状況はさらに 2 分される．
  - (i) $\lim_{t\to\infty} g_t$ が存在しない．
  - (ii) $g_\infty := \lim_{t\to\infty} g_t$ が存在し，g_∞ も完備．
  - (iii) $g_\infty := \lim_{t\to\infty} g_t$ が存在し，g_∞ は非完備．

(1)-(i) の例は Daskalopoulos と Sesum [3] により 2008 年に見つかっており，それ以外の状況は（自明な例を持つ (2)-(ii) の場合を除き），本当に起こり得るかは不明であった．今回の我々の研究は，(2)-(iii) の具体例を見つけようというものである．

4.2 主結果

主結果を正確に述べるために具体的な設定をする．$M := \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ とし，$n \geq 3$ とする．また $(n+2)/2 < \lambda < n+2$ を満たすパラメーター λ を 1 つ取って固定する．そして M 上の滑らかな関数 u_0 を

$$u_0(x) := \left(1 + |x|^{-m\lambda}\right)^{\frac{1}{m}}$$

と定義する．ここで

$$m := \frac{n-2}{n+2}$$

であり，$m \in (0,1)$ である．この u_0 を用いて M 上のリーマン計量 g_0 を

$$g_0 := u_0^{\frac{4}{n+2}} g_{\mathbb{R}^n}$$

と定義する．ここで $g_{\mathbb{R}^n}$ は $\mathbb{R}^n$ 上の標準計量である．このとき以下が主結果である．

定理 1 (Tahakashi–Y., 2021)**.** g_0 を初期値とし，各 $t \in [0,\infty)$ で g_t が完備になるような山辺フローの長時間解 $\{g_t\}_{t\in[0,\infty)}$ が存在し，g_0 を初期値とする山辺フローの解はこれ意外に存在しない．また，$t \to \infty$ とすると $g_t \to g_{\mathbb{R}^n}$ に収束するので，この極限は M 上の非完備計量である．

つまり，(2)-(iii) の具体例が存在することを示している．この結果に関する論文内で，この現象を “Infinite-time Incompleteness”（無限時間非完備性）と名付けた．(M, g_0) はリーマン多様体としては 2 つの End を持っており，1 つは漸近的ユークリッドで，もう 1 つは漸近的錐である．時間が経つと漸近的錐の方が縮んできて，最終的には原点に落ちる（ある種の blow down）のような動きをする．

5　証明について

以下のような一般論がある．山辺フローの初期値 g_0 がスカラー平坦計量 $\bar{g}$ に共形的だと仮定する．このとき，g_0 を初期値とする山辺フローの解 g_t を見つけることは，$u_0 := (g_0/\bar{g})^{\frac{n+2}{4}}$ を初期値とする fast diffusion equation

$$\frac{\partial}{\partial t}u = \Delta(u^m)$$

の解 u_t を見つけることと同値である．u_t と g_t の対応は

$$g_t = u_t^{\frac{4}{n+2}}\bar{g}$$

で与えられる．従って，証明自体は完全に偏微分方程式論の範疇であり，上記の fast diffusion equation の解で特定の性質を持つものを見つけることで完了する．

参考文献

[1] S. Brendle, Convergence of the Yamabe flow for arbitrary initial energy, J. Differential Geom. 69 (2005), 217–278.

[2] P. Daskalopoulos, J. King and N. Sesum, Extinction profile of complete non-compact solutions to the Yamabe flow, Comm. Anal. Geom. 27 (2019), no. 8, 1757–1798.

[3] P. Daskalopoulos and N. Sesum, On the extinction profile of solutions to fast diffusion, J. Reine Angew. Math. 622 (2008), 95–119.

[4] G. Giesen and P. Topping, Existence of Ricci flows of incomplete surfaces, Comm. Partial Differential Equations 36 (2011), 1860–1880.

[5] R.S. Hamilton, Lectures on geometric flows, unpublished manuscript, 1989.

[6] L. Ma and Y. An, The maximum principle and the Yamabe flow, Partial differential equations and their applications (Wuhan, 1999), 211–224, World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1999.

[7] H. Schwetlick and M. Struwe, Convergence of the Yamabe flow for “large” energies, J. Reine Angew. Math. 562 (2003), 59–100.

[8] R. Ye, Global existence and convergence of Yamabe flow, J. Differential Geom. 39 (1994), 35–50.