四元数/超複素-対応

長谷川和志

金沢大学

2022 年 3 月 21 日

Joint work with Vicente Cortés

部分多様体とリー群作用 2021

序

A. Haydys (Hyper-Kähler and quaternionic Kähler manifolds with S^1 -symmetries, J. Geom. Phys. 58 (2008), 293-306) によって，次ような構成が得られている：

- 四元数ケーラー多様体 (QK) $\rightsquigarrow$ $\boxed{\text{超ケーラー多様体 (HK)}}$
- 超ケーラー多様体 (HK) $\rightsquigarrow$ $\boxed{\text{四元数ケーラー多様体 (QK)}}$

(ともに同じ次元)

これらは，それぞれ

QK/HK-対応　や　HK/QK-対応

とよばれている．

- これらの構成は

D. Alekseevsky, V. Cortés, M. Dyckmanns and T. Mohaupt, Quaternionic Kähler metrics associated with special Kähler manifolds, J. Geom. Phys. 92 (2015), 271-287.

と

D. Alekseevsky, V. Cortés, and T. Mohaupt, Conification of Kähler and hyperKähler manifolds, Comm. Math. Phys. 324 (2013), 637-655.

で計量が不定値な場合に一般化されている．

今回の講演では,

「ある種の U(1)-作用をもつ四元数多様体から超複素多様体を構成する」

ことについて報告する.

- この構成は QK/HK-対応を一般したものである.
- この構成を **Q/H-対応**よぶことにする.

• (詳細は後ほど) この Q/H-対応は次の意味で，QK/HK-対応を真に一般化したものである．実際，等質四元数 Hopf 多様体

$$(\mathbb{R}^{>0}/\langle\lambda\rangle) \times \frac{\mathrm{Sp}(n)\mathrm{U}(1)}{\mathrm{Sp}(n-1)\triangle_{\mathrm{U}(1)}}$$

から，Q/H-対応で等質超複素 Hopf 多様体

$$(\mathbb{R}^{>0}/\langle\lambda\rangle) \times \frac{\mathrm{Sp}(n)}{\mathrm{Sp}(n-1)}$$

が得られる．この超複素多様体は

$$(\mathbb{R}^{>0}/\langle\lambda\rangle) \times \frac{\mathrm{Sp}(n)}{\mathrm{Sp}(n-1)} \cong S^1 \times S^{4n-1}.$$

であるので，超ケーラー多様体の構造を持ちえない．

このような例の存在 $\rightsquigarrow$
(単なる一般化ではなく) 四元数多様体や超複素多様体を研究する一つの動機

四元数多様体と超複素多様体

Definition 2.1 (四元数多様体)

(M, Q) : **四元数多様体**

$:\Longleftrightarrow$

(i) Q は階数 3 の $\mathrm{End}(TM)$ の部分束,

(ii) Q は局所的に $\mathrm{Im}\mathbb{H}$-*relations* を満たす局所切断 I_1, I_2, I_3 で張られる,

(iii) $\exists\nabla$: Q を保つ捩じれのないアファイン接続.

- (i) と (ii) を満たすとき, (M, Q) は概四元数多様体とよばれる.
- ∇ は四元数接続とよばれる (q-接続と略記).
- Q に対して, q-接続は一意ではない.
- (I_1, I_2, I_3) を許容枠とよぶ.

以下,

$$\dim M =: 4n$$

とおく.

• $n \geq 2$ のとき，リーマン計量 g が (M, Q) 上の Q-エルミート計量でありその Levi-Civita 接続が q-接続であるとき，(M, Q, g) は**四元数ケーラー多様体**とよばれる．計量であるとき，**四元数ケーラー多様体**とよばれる．

Definition 2.2 (超複素多様体)

$(M, H = (I_1, I_2, I_3))$: **超複素多様体**

$:\Longleftrightarrow$

(i) I_1, I_2, I_3 は M 上の複素構造,

(ii) I_1, I_2, I_3 は $\mathrm{Im}\mathbb{H}$-*relations* を満たす.

• $\nabla I_i = 0$ を満たす捩じれのないアファイン接続が唯一存在する：**小畠接続**．よって，$(M, Q = \langle I_1, I_2, I_3 \rangle)$ は四元数多様体である．• I_1, I_2, I_3 が概複素構造であるとき, M は概超複素多様体とよばれる.

• リーマン計量 g が I_1, I_2, I_3 に関してケーラー的であるとき, $(M, g, H = (I_1, I_2, I_3))$ は**超ケーラー多様体**とよばれる.

今回の構成（Q/H-対応）

$$\text{四元数多様体} \rightsquigarrow \boxed{\text{超複素多様体}}$$

は次のような手順で得られる：

(1) 四元数多様体 M の **Swann 束** $\hat{M}$ とよばれるものを考える，
(2) $\hat{M}$ 上で**超複素運動量写像**を見つける，
(3) **超複素商** $M' = P/\mathrm{U}(1)$ をとる．(P は超運動量写像の Level-set)，

$$\begin{tikzcd}
& P \subset \hat{M} \arrow[dl, "\pi_P"'] \arrow[dr, "\hat{\pi}"] & \\
M' & & M \arrow[ll, dotted, "\text{H/Q-corresp.}"']
\end{tikzcd}$$

Swann 束

(M, Q)：四元数多様体

S：(M, Q) の各点におけるすべての許容枠 (I_1, I_2, I_3) からなる主 $\mathrm{SO}(3)$-束

$S_0 := ((\Lambda^{4n}(T^*M))\backslash\{0\})/\{\pm 1\}$：$(M, Q)$ 上の主 $\mathbb{R}^{>0}$-束

$\hat{M} := \triangle^*(S_0 \times S)$：主束 $S_0 \times S \to M \times M$ の対角線写像 $\triangle : M \to M \times M$ による引き戻し束

$\longrightarrow$
$\hat{M}$ は主 $\mathbb{R}^+ \times \mathrm{SO}(3) \cong \mathbb{H}^*/\{\pm 1\}$-束.

q-接続 ∇ は S と S_0 上にそれぞれ接続形式 θ，θ_0 を誘導し，さらに $\hat{M}$ 上に $\bar{\theta}$ を誘導する.

$\hat{M}$ 上に概超複素構造 $(\hat{I}_1^{\bar{\theta},c}, \hat{I}_2^{\bar{\theta},c}, \hat{I}_3^{\bar{\theta},c})$ を以下のように定める (c は非零の実数).

$e_0 := 1 \in \mathbb{R} = T_1\mathbb{R}$

$e_1, e_2, e_3 \in \mathfrak{so}(3)$ s.t (α, β, γ) の巡回置換に対して $[e_\alpha, e_\beta] = 2e_\gamma$ みたす

$Z_0^c := c\tilde{e}_0$, $Z_\alpha := \tilde{e}_\alpha$ $(\alpha = 1, 2, 3)$ ($\tilde{e}_i$ は基本ベクトル場)

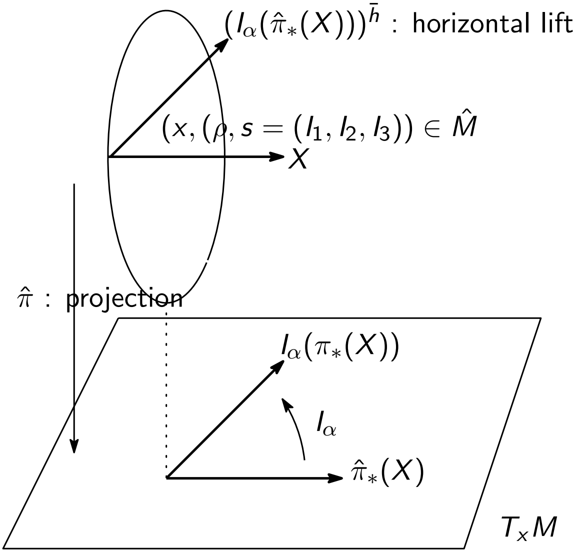
vertical

$$\hat{I}_\alpha^{\bar{\theta},c} Z_0^c = -Z_\alpha, \quad \hat{I}_\alpha^{\bar{\theta},c} Z_\alpha = Z_0^c, \quad \hat{I}_\alpha^{\bar{\theta},c} Z_\beta = Z_\gamma, \quad \hat{I}_\alpha^{\bar{\theta},c} Z_\gamma = -Z_\beta$$

horizontal $(x,(\rho,s)) \in \hat{M}$ におけるすべての水平ベクトル X に対して,

$$(\hat{I}_\alpha^{\bar{\theta},c})_{(x,(\rho,s))}(X) = (I_\alpha(\hat{\pi}_* X))^{\bar{h}}_{(x,(\rho,s))}.$$

ここで $s = (I_1, I_2, I_3)$.



$(I_\alpha(\hat{\pi}_*(X)))^{\bar{h}}$: horizontal lift
$(x, (\rho, s = (I_1, I_2, I_3)) \in \hat{M}$
X
$\hat{\pi}$: projection
$I_\alpha(\pi_*(X))$
I_α
$\hat{\pi}_*(X)$
$T_x M$

- この概超複素構造 $(\hat{I}_1^{\bar{\theta},c}, \hat{I}_2^{\bar{\theta},c}, \hat{I}_3^{\bar{\theta},c})$ は接続形式 $\bar{\theta}$(すなわち q-接続 ∇) と c に依存する.

Proposition 3.1

この概超複素構造が q-接続のとり方によらない $\iff c = -4(n+1)$.

- $c_0 := -4(n+1)$.

Theorem 3.2

(M, Q) : 四元数多様体
∇ : q-接続
$(\hat{I}_1^{\bar{\theta},c}, \hat{I}_2^{\bar{\theta},c}, \hat{I}_3^{\bar{\theta},c})$: 前述の概超複素構造
$n = 1$ のとき，Q は反自己双対と仮定する.
(1) $c = c_0$ のとき, $(\hat{I}_1^{\bar{\theta},c}, \hat{I}_2^{\bar{\theta},c}, \hat{I}_3^{\bar{\theta},c})$ は積分可能,
(2) $c \neq c_0$ のとき, $(\hat{I}_1^{\bar{\theta},c}, \hat{I}_2^{\bar{\theta},c}, \hat{I}_3^{\bar{\theta},c})$ が積分可能であることと $(Ric^{\nabla})^a$ が Q-エルミートであることは同値.

• $c = c_0$ と選んだ超複素多様体 $\hat{M}$ を **Swann 束**という.

• Swann 束は 「H. Pedersen, Y. Poon and A. Swann, Hypercomplex structures associated to quaternionic manifolds, Differential Geom. Appl. 9 (1998), 273-292」で定義されている（今回は異なる定式化で表示/計算）.

• Proposition 3.1 and Theorem 3.2 (1) は上記の論文 [PPS] で証明されている.

• (M, Q, g) がスカラー曲率が**非零**の四元数ケーラー多様体であるとき, $\hat{M}$ は擬超ケーラー計量をもつ (A. Swann, Hyper-Kähler and quaternionic-Kähler geometry, Math. Ann. 289 (1991), 421-450). さらに, S_0 は自明束なので $\hat{M} = S \times \mathbb{R}^{>0}$ となる. $\hat{M}$ は M の超ケーラー錐ともよばれる.

超複素運動量写像

Definition 4.1 (D. Joyce, Math. Ann. 290 (1991), 323-340.)

M : 超複素構造 (I_1, I_2, I_3) をもった超複素多様体
F : コンパクト Lie 群で M に自由にかつ I_i を保つように作用している
($\mathfrak{F} = \mathrm{Lie}\, F$ には F の随伴作用を考える)
X_f : $f \in \mathfrak{F}$ によって誘導される M のベクトル場
F-同変写像 $\mu_i : M \to \mathfrak{F}^*$ の組 $\mu = (\mu_1, \mu_2, \mu_3)$ が

$$d\mu_1 \circ I_1 = d\mu_2 \circ I_2 = d\mu_3 \circ I_3$$

と

すべての非零の $f \in \mathfrak{F}$ に対して, $(d\mu_1 \circ I_1)(X_f)$ が
M の各点で零にならない

を満たすとき, μ を F の超複素運動量写像という.

主結果：Q/H-対応

(M, Q)：四元数多様体

次を仮定する
(1) $n = 1$ のとき Q は反自己双対,
(2) $\mathrm{U}(1)$ は自由に Q を保つように作用する

X：この $\mathrm{U}(1)$-作用を生成するベクトル場

X は次のように $\hat{M}$ に持ち上げることができる：まず，$\hat{\varphi}_t : \hat{M} \to \hat{M}$ を $(x, (\rho, s)) \in \hat{M}$ に対して，

$$\hat{\varphi}_t((x, (\rho, s))) = (\varphi_t(x), (\varphi^*_{-t}\rho, (\varphi^*_{-t}l_1, \varphi^*_{-t}l_2, \varphi^*_{-t}l_3)))$$

で定める．ここで，$\{\varphi_t\}$ は X の 1 パラメータ族であり $s = (l_1, l_2, l_3)$ である．$\{\hat{\varphi}_t\}$ を用いて，$\hat{X}$ を

$$\hat{X}_{(x,(\rho,s))} = \frac{d}{dt}\hat{\varphi}_t((x, (\rho, s)))\Big|_{t=0}$$

と定める．この $\hat{X}$ を X の**自然な持ち上げ**という．

Theorem 5.1

(M, Q) : 四元数多様体
つぎを仮定する.
• $n = 1$ のとき Q は反自己双対と仮定,
• $\mathrm{U}(1)$ は M に自由かつ Q を保つように作用,
• ベクトル場 X はこの $\mathrm{U}(1)$-作用を生成,
• Q は次の条件をみたす q-接続 ∇ を許容するとする : $L_X\nabla = 0$, すべての $Y \in TM$, $I \in \mathcal{Z}$(=M のツイスター空間) に対して,

$$Ric^{\nabla}(X, Y) = Ric^{\nabla}(IX, IY) \tag{1}$$

を満たし

$$(Ric^{\nabla})(X, X) \circ \hat{\pi} + 4(n+2)\sum_{i=1}^{3} \theta_i(\hat{X})^2 \tag{2}$$

が $\hat{M}$ の各点で零にならない.

Theorem 5.1 (continued.)

このとき，次が成立する
- 自然な持ち上げ $\hat{X}$ は自由な U(1)-作用を生成し**超複素運動量写像** μ をもつ，
- その超複素商 $(M' := \hat{M}/\langle \hat{X} \rangle, H' = (I'_1, I'_2, I'_3))$ は I'_1-正則ベクトル場 Z で $L_Z I'_2 = -2I'_3$, $L_Z I'_3 = 2I'_2$, を満たすようなものをもつ**超複素多様体**である，
- さらに，M' には 2-形式 Θ'_α で $L_Z\Theta'_1 = 0$, $L_Z\Theta'_2 = -2\Theta'_3$, $L_Z\Theta'_3 = 2\Theta'_2$. を満たすものが存在する．

- $\dim M' = \dim \hat{M} - 4 = \dim M$.
- 超複素運動量写像 μ は具体的に与えられる（略）．
- 2-形式 Θ'_α は具体的に与えられる（略）．

証明の概略

(0) $c = c_0$.

(1) 仮定より，$\hat{M}$ 上で超複素運動量写像 μ が得られる (explicitly).

(2) $M' := P/\langle \hat{X} \rangle$ は超複素構造 (I_1', I_2', I_3') をもつ (D. Joyce, Math. Ann. 290 (1991), 323-340). ここで

$$P = (\mu^{-1})(1, 0, 0).$$

(3) 基本ベクトル場 $Z_1 = \tilde{e}_1$ は P に接し $[\hat{X}, Z_1] = 0$ を満たすことが分かる.

(4) $Z := \pi_{P*}(Z_1)$ が諸条件を満たすことを示す．ここで，$\pi_P : P \to M'$ は商写像である.

この四元数多様体 (M, Q, ∇, X) から超複素多様体 $(M', H' = (I'_\alpha), (\Theta'_\alpha), Z)$ への対応を

四元数/超複素-対応　(Q/H-*correspondence*)

とよぶ. 以下, Q/H-対応とよぶ.

例 1：QK/HK-対応

Example 6.1 (QK/HK-対応)

(M, Q, g)：スカラー曲率が非零の擬四元数ケーラー多様体,
X：M の光的ではない四元数キリングベクトル場で自由な U(1)-作用を生成する,
$\hat{X}$：$\hat{M}$ 上の擬超ケーラー計量に関して光的でない
$\Longrightarrow$
Theorem 5.1 における 2-形式 Θ'^{c}_{α} は

$$\Theta'_1(\,\cdot\,, I'_1\,\cdot\,) = \Theta'_2(\,\cdot\,, I'_2\,\cdot\,) = \Theta'_3(\,\cdot\,, I'_3\,\cdot\,)(=: g'), \tag{3}$$

を満たし，g' は M' の擬超ケーラー計量となる.

- g の Levi-Civita 接続 ∇ と X は Theorem 5.1 の仮定を満たす．この構成は QK/HK-対応とよばれる.

例 2：回転対称性をもった超複素多様体

$(M, H = (I_1, I_2, I_3))$：超複素多様体,
∇：H の小畠接続,
X：M の自由な U(1)-作用を生成し

$$L_X I_1 = 0, L_X I_2 = -2I_3, L_X I_3 = 2I_2$$

を満たすとする（この条件を**回転対称性をもつ**という）
$\Longrightarrow$
Ric^{∇} は交代的，Q-エルミートかつ $L_X \nabla = 0$ を満たす.

よって，($(M, Q = \langle I_1, I_2, I_3 \rangle)$ を四元数多様体とみて) Theorem 5.1 の仮定をみたすので，Q/H-対応により超複素多様体 M' が得られる.

Proposition 6.2

M は M' の二重被覆空間である.

証明の概略

(1) 超複素構造は S の大域的切断 $s : M \to S$

$$x \mapsto s(x) = (I_1(x), I_2(x), I_3(x)),$$

であり，S は自明な SO(3)-束である．また，U(1)-不変な体積要素が存在するので，それを用いて S_0 を自明束とみる.

(2) $\{\varphi_t\} := \{\exp(tX)\}$.

$$\begin{aligned}\hat{M} &= \{(x, s(x)g, r) \mid x \in M,\ g \in \mathrm{SO}(3),\ r > 0\} \\ &\cong M \times \mathrm{SO}(3) \times \mathbb{R}^{>0} (\supset M \times \mathrm{SO}(3) \times \{1\} \cong M \times \mathrm{SO}(3) = S)\end{aligned}$$

であり，$(\varphi_{-t}^* I_1, \varphi_{-t}^* I_2, \varphi_{-t}^* I_3) = (I_1, I_2, I_3) g_{-t}$, である．ここで,

$$g_t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(2t) & -\sin(2t) \\ 0 & \sin(2t) & \cos(2t) \end{pmatrix} \tag{4}$$

である．よって，$\hat{\varphi}_t(x, (I_1, I_2, I_3), r) = (\varphi_t(x), (I_1, I_2, I_3) g_{-t}, r)$ と書け,

$$\hat{X}_{(x,s(x),1)} = X^h_{(x,s(x),1)} + (\widetilde{e_1})_{(x,s(x),1)} \ \left(\ e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}\ \right)$$

と表せる．

任意の点 $p = (x, s(x)g^{-1}, r) \in \hat{M}$ で, 自然な持ち上げ $\hat{X}$ は

$$\hat{X}_p = (X_x)^h_p + (\widetilde{Ad_g e_1})_p$$

と表せる．ここで $g \in \mathrm{SO}(3)$.

(3) 超運動量写像は具体的に

$$\mu(p) = Ar^{\frac{2}{c_0}} g e_1 g^{-1} \in \mathbb{R}^3 \cong \langle e_1, e_2, e_3 \rangle = \mathfrak{so}(3)$$

と書け ($p = (x, s(x)g^{-1}, r) \in \hat{M}$, $A \in \mathbb{R}$ は非零の定数).

(4) $P := (\mu^{-1})(e_1) = (\mu^{-1})((1,0,0))$ は

$$\{(x, s(x)g^{-1}, r) \in \hat{M} \mid x \in M,\ Ar^{\frac{2}{c_0}} g e_1 g^{-1} = e_1\}.$$

となり,

$$P = \{(x, s(x)g^{-1}, A^{-\frac{c_0}{2}}) \in \hat{M} \mid x \in M,\ g \in \mathrm{U}(1)\} \cong M \times \mathrm{U}(1).$$

と書ける.
(5) $M' = P/\langle \hat{X} \rangle$.

(6) 写像 $k : M \to M'$ を各 $x \in M$ に対して, $k(x) = \pi_P((x, s(x), A^{-\frac{c}{2}}))$ と定める. ここで, $\pi_P : P \to M' = P/\langle \hat{X} \rangle$ は商写像である. $\langle \hat{X} \rangle$ の各軌道は $M \times s(M) \times \{A^{-\frac{c_0}{2}}\} (\subset \hat{M})$ とちょうど 2 回交差する.

例 3：四元数 Hopf 多様体

$\tilde{M} := \mathbb{H}^n \backslash \{0\}$,

$\tilde{H} := (\tilde{I}_1, \tilde{I}_2, \tilde{I}_3)$: $\tilde{M}$ 上の標準的な超複素構造,

$\tilde{Q} = \langle \tilde{I}_1, \tilde{I}_2, \tilde{I}_3 \rangle$,

$\tilde{g}$: $(\tilde{M}, \tilde{H})$ 上の標準的な（平坦）超ケーラー計量,

$\mathcal{A} \in \mathrm{Sp}(n)\mathrm{Sp}(1)$,

$\gamma := \lambda \mathcal{A}$ $(\lambda > 1)$,

$\Gamma := \langle \gamma \rangle$: $\tilde{M}$ に自由で固有不連続に作用する相似変換からなる群

$\Gamma \subset \mathrm{GL}(n, \mathbb{H})\mathrm{Sp}(1)$ なので，$\tilde{M}/\Gamma$ 上に概四元数構造 Q を誘導する．（$\tilde{M}$ 上の四元数構造 $\tilde{Q}$ は $\mathrm{GL}(n, \mathbb{H})\mathrm{Sp}(1)$-不変）

$\tilde{g}$ の Levi-Civita 接続 $\tilde{\nabla}$ は $\tilde{H}$ の小畠接続に一致し，$\tilde{M}$ の相似変換で不変である．

Γ は相似変換として作用するので，$\tilde{\nabla}$ は $\tilde{M}/\Gamma$ 上に Q を保つような捩じれのない接続 ∇ を誘導する．

したがって，Q は $\tilde{M}/\Gamma$ の**四元数構造**である．

- $\gamma = \lambda\mathcal{A}$ の $\mathrm{GL}(n, \mathbb{H})\mathrm{Sp}(1)$ における中心化群 G^Q は $\tilde{M}/\Gamma$ に (Q, ∇) を保つように作用する．

$\mathcal{A} \in \mathrm{Sp}(n)$ のとき, Γ は $\tilde{M}$ 上の超複素構造 $\tilde{H}$ を保つ．したがって，$\tilde{M}/\Gamma$ 上に**超複素構造** H を誘導する（$\tilde{\nabla}$ は H の小畠接続 ∇ を誘導する）．

- $\gamma = \lambda\mathcal{A}$ の $\mathrm{GL}(n, \mathbb{H})$ における中心化群 G^H は $\tilde{M}/\Gamma$ に H を保つように作用する.

Definition 6.3

$(\tilde{M}/\Gamma, Q)$ を**四元数 Hopf 多様体**，$(\tilde{M}/\Gamma, H)$ を**超複素 Hopf 多様体**とそれぞれよぶ.

- 超複素 Hopf 多様体も四元数 Hopf 多様体とよばれることもある.

ここで，$A = R_q$ ととる．ただし，R_q は $q \neq \pm 1$ である大きさ 1 の四元数 q の右からの作用である．また，$G^Q = \mathbb{R}^{>0} \times \mathrm{SL}(n, \mathbb{H})\mathrm{U}(1)$ の部分群 $\mathbb{R}^{>0} \times \mathrm{Sp}(n)\mathrm{U}(1)$ を考える（これは $M = \tilde{M}/\Gamma$ に推移的に作用する）.

等質空間

$$M = (\mathbb{R}^{>0}/\langle\lambda\rangle) \times \frac{\mathrm{Sp}(n)\mathrm{U}(1)}{\mathrm{Sp}(n-1)\triangle_{\mathrm{U}(1)}}$$

上の不変な四元数構造が得られる．ここで,

$$\mathrm{Sp}(n-1)\triangle_{\mathrm{U}(1)} =$$

$$\left\{ \left[\left(\begin{array}{c|ccc} e^{i\theta} & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & A & \\ 0 & & & \end{array} \right), \ e^{i\theta} \right] \ \middle| \ A \in \mathrm{Sp}(n-1), e^{i\theta} \in \mathrm{U}(1) \right\}$$

である.

以下

Example 6.4

$$(\mathbb{R}^{>0}/\langle\lambda\rangle) \times \frac{\mathrm{Sp}(n)\mathrm{U}(1)}{\mathrm{Sp}(n-1)\triangle_{\mathrm{U}(1)}} \overset{\mathrm{Q/H}}{\rightsquigarrow} (\mathbb{R}^{>0}/\langle\lambda\rangle) \times \frac{\mathrm{Sp}(n)}{\mathrm{Sp}(n-1)}.$$

四元数 Hopf　　超複素 Hopf

を示す.

$\tilde{M} = \mathbb{H}^n \backslash \{0\}$ 上で $\mathrm{U}(1)\,(\subset \mathbb{R}^{>0} \times \mathrm{Sp}(n)\mathrm{U}(1) \subset G^Q)$ の元を右から掛ける作用：$z \mapsto z \cdot e^{-it}$ $(z \in \tilde{M})$ を考える．

このとき，この作用を生成するベクトル場 $\tilde{X}$ は

$$L_{\tilde{X}}\tilde{I}_1 = 0, L_{\tilde{X}}\tilde{I}_2 = -2\tilde{I}_3, L_{\tilde{X}}\tilde{I}_3 = 2\tilde{I}_2$$

を満たす．この $\mathrm{U}(1)$-作用は M に $\mathrm{U}(1)$-作用を誘導し，$\tilde{X}$ は M 上のベクトル場 X を誘導する．

$\tilde{M} = \mathbb{H}^n \backslash \{0\}$ と $M = \tilde{M}/\Gamma$ に Q/H-対応が適用できる.

$$
\begin{tikzcd}
 & \tilde{P} \arrow[dl, "\pi_{\tilde{P}}"'] \arrow[d] \arrow[r, "/\Gamma"'] & P \arrow[d] \arrow[dr, "\pi_P"] & \\
\color{red}{\tilde{M}'} & \tilde{M} \arrow[l, "\text{double covering}"] \arrow[r, "/\Gamma"'] & M & \color{red}{M'}
\end{tikzcd}
$$

$\tilde{M}_+ := \tilde{M}/\{\pm 1\}$ とおくと，$\tilde{M}' \cong \tilde{M}_+$ である.

$$
\begin{tikzcd}
 & \tilde{P} \arrow[r, "/\Gamma"'] \arrow[dl, "\pi_{\tilde{P}}"'] \arrow[d] & P \arrow[d] \arrow[dr, "\pi_P"] & \\
\tilde{M}' \arrow[dr, "\exists \tilde{f}"', "\cong"] & \tilde{M} \arrow[l, "\text{double covering}"'] \arrow[r, "/\Gamma"'] \arrow[d] & M & M' \\
 & \tilde{M}_+ & &
\end{tikzcd}
$$

$F = \tilde{f} \circ \pi_{\tilde{P}}$ とする.

Lemma 6.5

すべての $y \in \tilde{P}$ に対して, $F(\gamma \cdot y) = \lambda F(y)$ が成立する.

$$
\begin{tikzcd}
 & \tilde{P} \arrow[r, "/\Gamma"'] \arrow[dl, "\pi_{\tilde{P}}"'] \arrow[d] & P \arrow[d] \arrow[dr, "\pi_P"] & \\
\tilde{M}' \arrow[dr, "\tilde{f}"'] & \tilde{M} \arrow[l, "Q/H"', "\text{double covering}"] \arrow[r, "/\Gamma"'] \arrow[d] & M \arrow[r, "Q/H"] \arrow[d] & M' \arrow[d] \\
 & \tilde{M}_+ \arrow[r, "/\Gamma"'] \arrow[dr, "/\langle\lambda\rangle"'] & M_+ \arrow[r, "Q/H"] & M'_+ \arrow[dl, "\cong"] \\
 & & \tilde{M}_+/\langle\lambda\rangle &
\end{tikzcd}
$$

$\tilde{M}/\langle\lambda\rangle$ は

$$\tilde{M}/\langle\lambda\rangle = (\mathbb{R}^{>0}/\langle\lambda\rangle) \times \frac{\mathrm{Sp}(n)}{\mathrm{Sp}(n-1)}$$

と表せるので,

$$(\mathbb{R}^{>0}/\langle\lambda\rangle) \times \frac{\mathrm{Sp}(n)\mathrm{U}(1)}{\mathrm{Sp}(n-1)\triangle_{\mathrm{U}(1)}} \overset{\mathrm{Q/H}}{\rightsquigarrow} (\mathbb{R}^{>0}/\langle\lambda\rangle) \times \frac{\mathrm{Sp}(n)}{\mathrm{Sp}(n-1)}$$

が得られる．超複素 Hopf 多様体は $S^1 \times S^{4n-1}$ と同相なので**超ケーラー構造を許容しない**．したがって，Q/H-対応は真に QK/HK-対応を一般化したものである．

まとめ

- ある種の U(1)-作用をもつ四元数多様体から超複素多様体を構成する方法を与えた.
- QK/HK-対応を真に一般化したものである. ∃Hopf 多様体の例.
- Q/H-対応は適当な設定のもと関手となる.
- 超複素運動量写像の例も与えた（ともいえる）.
- 逆方向の構成（H/Q-対応）は現在進行中（Hopf 多様体の例や SU(3) の例がある）.

今回の講演は

The quaternionic/hypercomplex-correspondence, Osaka J. Math. 58 (2021), 213-238. (arXiv:1904.06056)

に基づく.

ご清聴ありがとうございました