

非コンパクト型エルミート対称空間内の等質ラグランジュ部分 多様体

橋永 貴弘 (佐賀大学)

「部分多様体幾何とリ一群作用 2021」

目次

1. Introduction
2. 非コンパクト型エルミート対称空間 M の可解モデル S
3. 複素双曲空間の S の部分群作用から得られる等質ラグランジュ部分多様体の分類 (梶ヶ谷徹氏 (東京理科大学) との共同研究)
4. $M = \mathrm{Sp}(n, \mathbb{R})/\mathrm{U}(n)$ の S の部分群作用から得られる等質ラグランジュ部分多様体 (栗原大武氏 (山口大学) との共同研究)

Introduction

背景: 対称空間内の良い性質を持つ等質部分多様体の分類問題

- 等質超曲面 (余等質性 1 作用): **Hsiang-Lowson**,,
- 全測地的な等質部分多様体,
- **polar** 作用, **hyperpolar** 作用, など

今日の話:

- 非コンパクト型エルミート対称空間内の等質ラグランジュ部分多様体の例の構成, 分類問題.

Introduction

定義

- (M, ω) : シンプレクティック多様体,
 $L: M$ の部分多様体がラグランジュ部分多様体 $:\iff$
 $\dim L = \frac{1}{2} \dim M$, かつ $\omega|_L = 0$.
- 非コンパクト型エルミート対称空間 M のラグランジュ部分多様体
が等質 $:\iff$
 L は $\text{Aut}(M, g, J)$ の連結一部分群作用 H の軌道として得られる.
- エルミート対称空間内の等質ラグランジュ部分多様体の分類に関して,
次が知られている.
- $M = \mathbb{C}P^n$, H : simple な場合の分類 [Bedulli-Gori, 2008]
- $M = Q_n(\mathbb{C})$ の場合の分類 [Ma-Ohnita, 2009]
- $M = \mathbb{C}H^n$, $H \subset S$ の場合 [H.-Kajigaya, 2017]

Introduction

本講演の内容:

- 非コンパクト型エルミート対称空間 M の可解モデル S の部分群作用から得られるラグランジュ部分多様体に関して、これまでに得られている (下記の) 結果を紹介する。

参考

- 梶ヶ谷徹氏との共同研究:
class of non-compact homogeneous Lagrangian submanifolds in complex hyperbolic spaces, 2017.
- **Construction of noncompact Lagrangian orbits in some Hermitian symmetric spaces of noncompact type, 2019.**
- J.C.Dize-Ramoz 氏, M.Dominguez-Vazquez 氏との共同研究:
Homogeneous Lagrangian foliations on complex space forms, arXiv:2010.11877.
- 栗原大武氏との共同研究: **Construction of homogeneous Lagrangian submanifolds via rooted trees(仮), in preparation.**

2. 非コンパクト型エルミート対称空間の可解モデル

M の幾何構造

$M = G/K$: 非コンパクト型エルミート対称空間とする.

M は G/K に適当な G 不変な幾何構造を入れた空間として実現できる.

- $\mathfrak{g}, \mathfrak{k}$: G, K のリー代数,
- $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$: Cartan 分解, θ : 対応する Cartan 対合とする.
- $T_oM \cong \mathfrak{p}$, \mathfrak{p} 上の $\text{Ad}(K)$ -不変な幾何構造を次で定める:
- 内積: $\langle X, Y \rangle := -kB(\theta X, Y)$ ($k > 0$)
- 複素構造: $J_o := \text{ad}(\zeta)|_{\mathfrak{p}}$ for some $\zeta \in \mathfrak{c}(\mathfrak{k})$
- シンプレクティック形式: $\omega_o(X, Y) := \langle J_o(X), Y \rangle$
- \mathfrak{p} 上の $\text{Ad}(K)$ -不変な幾何構造から G/K 上の G -不変な幾何構造 $\langle, \rangle, J, \omega$ が定まる.
- $M \cong (G/K, \langle, \rangle, J, \omega)$

M の可解モデル

$M = (G/K, g, J, \omega)$ は G の岩澤分解の可解部分 S に適当な左不変な幾何構造を入れた空間 (可解モデル) として実現できる。

- $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$: \mathfrak{p} 内の極大可換部分空間をとり, 固定する.
- $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus_{\lambda \in \Sigma} \mathfrak{g}_\lambda$: (制限) ルート空間分解,
ただし, $\mathfrak{g}_\lambda := \{X \in \mathfrak{g} : \text{ad}(H)X = \lambda(H)X, \forall H \in \mathfrak{a}\}$, $\lambda \in \mathfrak{a}^*$.
- $\mathfrak{n} := \bigoplus_{\lambda \in \Sigma_+} \mathfrak{g}_\lambda$ とするとき,
- $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$: 岩澤分解
- $\mathfrak{s} := \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$: 岩澤分解の可解部分, 対応する連結群を S とする.
- S は自然な左作用により $M = G/K$ に単純推移的に作用する.
特に $\Phi : S \rightarrow M : g \mapsto [g] = g \cdot o$: 微分同相写像
- $(d\Phi)_e : \mathfrak{s} \rightarrow T_oM \cong \mathfrak{p} : X \mapsto X_p = \frac{1}{2}(X - \theta X)$: 線形同型
- この $(d\Phi)_e$ により, \mathfrak{s} 上に幾何構造を入れる.

M の可解モデル

$M = (G/K, g, J, \omega)$ は G の岩澤分解の可解部分 S に適当な左不変な幾何構造を入れた空間 (可解モデル) として実現できる.

- $(d\Phi)_e : \mathfrak{s} \rightarrow T_oM \cong \mathfrak{p} : X \mapsto X_p = \frac{1}{2}(X - \theta X)$: 線形同型
- 内積: $\langle X, Y \rangle_{\mathfrak{s}} := \langle (d\Phi)_e(X), (d\Phi)_e(Y) \rangle = k \langle X_{\mathfrak{a}}, Y_{\mathfrak{a}} \rangle + \frac{k}{2} \langle X_{\mathfrak{n}}, Y_{\mathfrak{n}} \rangle$
- 複素構造: $J_{\mathfrak{s}} := (d\Phi)_e^{-1} \circ J_o \circ (d\Phi)_e$,
- $\omega_{\mathfrak{s}}(\cdot, \cdot) := \langle J_{\mathfrak{s}}\cdot, \cdot \rangle$,
- これらを拡張し S 上に左不変な幾何構造 $(\langle \cdot, \cdot \rangle_S, J_S, \omega_S)$ を定める.
- $M \cong (S, \langle \cdot, \cdot \rangle_S, J_S, \omega_S)$
- この $(S, \langle \cdot, \cdot \rangle_S, J_S, \omega_S)$ を M の可解モデルと呼ぶ.

可解モデルの例: $M = \mathbb{C}H^n$ の場合

- $\mathbb{C}H^n = \mathrm{SU}(1, n) / \mathrm{S}(\mathrm{U}(1) \times \mathrm{U}(n)) =: G/K$,
- $\mathfrak{g} := \mathfrak{su}(1, n)$, $\mathfrak{k} := \mathfrak{s}(\mathfrak{u}(1) \oplus \mathfrak{u}(n))$: G, K のリー代数,
- $\mathfrak{su}(1, n) = \left\{ \left[\begin{array}{c|c} w & \xi \\ \hline t\bar{\xi} & W \end{array} \right] \mid w \in \mathfrak{u}(1), W \in \mathfrak{u}(n), \xi \in \mathbb{C}^n \right\}$
- $\mathfrak{k} = \left\{ X = \left[\begin{array}{c|c} w & \\ \hline & W \end{array} \right] \mid w \in \mathfrak{u}(1), W \in \mathfrak{u}(n) \right\}$
- $\mathfrak{su}(1, n) = \mathfrak{s}(\mathfrak{u}(1) \times \mathfrak{u}(n)) \oplus \mathfrak{p}$: Cartan 分解, ただし

$$\mathfrak{p} = \left\{ \left[\begin{array}{c|c} & \xi \\ \hline t\bar{\xi} & \end{array} \right] \mid \xi \in \mathbb{C}^n \right\}.$$

- $\theta(X) = -{}^t X$: Cartan 対合
- \mathfrak{p} 上の幾何構造を先の方法で定める.
ちなみに $J_o = \mathrm{ad}(\zeta)|_{\mathfrak{p}}$, ただし

$$\zeta = \frac{\sqrt{-1}}{n+1} \left[\begin{array}{c|c} -n & \\ \hline & E_n \end{array} \right]$$

可解モデルの例: $M = \mathbb{C}H^n$ の場合

- $\mathfrak{a} = \text{span}_{\mathbb{R}}\{E_{1,2} + E_{2,1}\} \subset \mathfrak{p}$: \mathfrak{p} 内の極大可換部分空間をとり, 固定する.
- $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{-2\alpha} \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_{\alpha} \oplus \mathfrak{g}_{2\alpha}$: 制限ルート空間分解,
- $\dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{a} = \dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}_{2\alpha} = 1, \dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}_{\alpha} = 2n - 2$ となる.
- $\mathfrak{n} = \mathfrak{g}_{\alpha} \oplus \mathfrak{g}_{2\alpha}$, N は $(2n - 1)$ 次元ハイゼンベルグリー群.
- $\mathfrak{s} := \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha} \oplus \mathfrak{g}_{2\alpha}$: 岩澤分解の可解部分,
- $(d\Phi)_e$ により, \mathfrak{s} 上に幾何構造を入れる.

可解モデルの例: $M = \mathbb{C}H^n$ の場合

- 以下を満たす $\mathfrak{s} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{2\alpha}$ の基底

$$\mathfrak{a} := \text{span}_{\mathbb{R}}\{A\}, \quad \mathfrak{g}_{2\alpha} := \text{span}_{\mathbb{R}}\{Z\},$$

$$\mathfrak{g}_\alpha := \text{span}_{\mathbb{R}}\{X_1, \dots, X_{n-1}, Y_1, \dots, Y_{n-1}\}.$$

がとれる:

- ブラケット積:

$$[A, X_i] = \frac{1}{2}X_i, \quad [A, Y_i] = \frac{1}{2}Y_i, \quad [A, Z] = Z, \quad [X_i, Y_j] = \delta_{ij}Z.$$

- $\langle, \rangle_{\mathfrak{s}}$ に関して正規直交基底,
- 複素構造 $J_{\mathfrak{s}}$: $J_{\mathfrak{s}}A = Z, J_{\mathfrak{s}}X_i = Y_i.$

可解モデルの例: $M = \mathrm{SP}(n, \mathbb{R})/\mathrm{U}(n)$ の場合

- $\dim M = n^2 + n$, $\mathrm{rank} M = n$.
- $G := \mathrm{SP}(n, \mathbb{R})$, $K := \mathrm{U}(n)$,
- $\mathfrak{g}, \mathfrak{k}$: G, K のリー代数とする.
-

$$\mathfrak{g} = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} X_1 & X_2 \\ \hline X_3 & -{}^t X_1 \end{array} \right) \mid X_1 \in M_n(\mathbb{R}), X_2, X_3 \in \mathrm{Sym}_n(\mathbb{R}) \right\},$$

$$\mathfrak{k} = \mathfrak{u}(n) = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} A & -B \\ \hline B & A \end{array} \right) \mid A \in \mathrm{Alt}_n(\mathbb{R}), B \in \mathrm{Sym}_n(\mathbb{R}) \right\},$$

- $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$: Cartan 分解, ただし

$$\mathfrak{p} := \left\{ \left(\begin{array}{c|c} X & Y \\ \hline Y & -X \end{array} \right) \mid X, Y \in \mathrm{Sym}_n(\mathbb{R}) \right\}.$$

- \mathfrak{p} 上の幾何構造を定める. ちなみに $J_o = \mathrm{ad}(\zeta)|_{\mathfrak{p}}$, ただし

$$\zeta = \frac{1}{2} \left[\begin{array}{c|c} 0 & -E_n \\ \hline E_n & 0 \end{array} \right]$$

可解モデルの例: $M = \mathrm{SP}(n, \mathbb{R})/\mathrm{U}(n)$ の場合

- $\mathfrak{a} = \mathrm{span}\{H_i := E_{i,i} - E_{i+n,i+n} \mid i = 1, \dots, n\} \subset \mathfrak{p}$ をとり, 固定する.

- M の制限ルート系は C_n 型:

- $\varepsilon_i \in \mathfrak{a}^*$: $\mathfrak{a} \rightarrow \mathbb{R} : \sum a_j H_j \mapsto a_i$ とすると,

$$\Sigma = \{\pm(\varepsilon_i \pm \varepsilon_j) \mid 1 \leq i < j \leq n\} \cup \{\pm 2\varepsilon_i \mid 1 \leq i \leq n\},$$

$$\Sigma_+ = \{\varepsilon_i \pm \varepsilon_j \mid 1 \leq i < j \leq n\} \cup \{2\varepsilon_i \mid 1 \leq i \leq n\}.$$

- $\mathfrak{s} = \mathfrak{a} \oplus \left(\bigoplus_{i < j} \mathfrak{g}_{\varepsilon_i - \varepsilon_j} \right) \oplus \left(\bigoplus_{i < j} \mathfrak{g}_{\varepsilon_i + \varepsilon_j} \right) \oplus \left(\bigoplus_i \mathfrak{g}_{2\varepsilon_i} \right).$

- $\dim \mathfrak{g}_{\varepsilon_i - \varepsilon_j} = \dim \mathfrak{g}_{\varepsilon_i + \varepsilon_j} = \dim \mathfrak{g}_{2\varepsilon_i} = 1$

- $J_{\mathfrak{s}}(H_i) \in \mathfrak{g}_{2\varepsilon_i}$, $J_{\mathfrak{s}}(\mathfrak{g}_{\varepsilon_i - \varepsilon_j}) = \mathfrak{g}_{\varepsilon_i + \varepsilon_j}$

可解モデルの例: $M = \mathrm{SP}(n, \mathbb{R})/\mathrm{U}(n)$ の場合

- 以下を満たす

$$\mathfrak{s} = \mathfrak{a} \oplus \left(\bigoplus_{i < j} \mathfrak{g}_{\varepsilon_i - \varepsilon_j} \right) \oplus \left(\bigoplus_{i < j} \mathfrak{g}_{\varepsilon_i + \varepsilon_j} \right) \oplus \left(\bigoplus_i \mathfrak{g}_{2\varepsilon_i} \right) \text{ の基底}$$

$$\mathfrak{a} := \mathrm{span}_{\mathbb{R}} \{A_1, \dots, A_n\}, \quad \mathfrak{g}_{2\varepsilon_i} := \mathrm{span}_{\mathbb{R}} \{Z_i\},$$

$$\mathfrak{g}_{\varepsilon_i - \varepsilon_j} := \mathrm{span}_{\mathbb{R}} \{X_{ij}\}, \quad \mathfrak{g}_{\varepsilon_i + \varepsilon_j} := \mathrm{span}_{\mathbb{R}} \{Y_{ij}\}.$$

が存在する:

- ブラケット積:

$$[A_k, X_{ij}] = \delta_{ki} X_{ij} - \delta_{kj} X_{ij}, \quad [A_k, Y_{ij}] = \delta_{ki} Y_{ij} + \delta_{kj} Y_{ij},$$

$$[A_i, Z_i] = 2Z_i, \quad [X_{ij}, X_{jk}] = \sqrt{2} X_{ik},$$

$$[X_{ij}, Y_{jk}] = \sqrt{2} Y_{ik}, \quad [X_{ij}, Y_{kj}] = \begin{cases} \sqrt{2} Y_{ik} & (i < k) \\ \sqrt{2} Y_{ki} & (k < i) \end{cases}$$

$$[X_{ij}, Y_{ij}] = 2Z_i, \quad [X_{ij}, Z_j] = 2Y_{ij}.$$

- $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathfrak{s}}$ に関して正規直交基底,
- 複素構造: $J_{\mathfrak{s}} A_i = Z_i, J_{\mathfrak{s}} X_{ij} = Y_{ij}.$

3. 複素双曲空間の可解モデル S の部分群作用から得られる 等質ラグランジュ部分多様体の分類

- $\mathbb{C}H^n = \mathrm{SU}(1, n)/\mathrm{S}(\mathrm{U}(1) \times \mathrm{U}(n))$: 複素双曲空間,
- $(S, \langle, \rangle, J_S, \omega_S)$: M の可解モデルとする.
- S' : S の連結リー部分群作用で等質ラグランジュ部分多様体を許容する, とする. i.e. $\exists p \in M$ s.t. $S'.p$: **Lag. submfd.**
- (適当に共役をとることにより,) 原点を通る軌道が等質ラグランジュ部分多様体であると仮定して良い: $S'.p \cong (pS'p^{-1}).p \cong (pS').o$.
- S' の分類は以下を満たす部分リー代数 $\mathfrak{l} \subset \mathfrak{s}$ の分類問題に帰着される:
 - (1) $\dim \mathfrak{l} = \frac{1}{2} \dim \mathfrak{s}$,
 - (2) $\langle \mathfrak{s}, J_{\mathfrak{s}}(\mathfrak{s}) \rangle_{\mathfrak{s}} = 0$.
- 以下この \mathfrak{l} を **ラグランジュ部分代数** と呼ぶ.

- $\mathfrak{s} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{2\alpha} = \text{span}_{\mathbb{R}}\{A, X_1, \dots, X_{n-1}, Y_1, \dots, Y_{n-1}, Z\}$,
- $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{g}_{2\alpha}, \mathfrak{g}_\alpha$: 複素部分空間であった.

命題 (H.-Kajigaya, 2017)

$\mathfrak{l}_1 \subset \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{g}_{2\alpha}, \mathfrak{l}_2 \subset \mathfrak{g}_\alpha$: ラグランジュ部分空間のとき, $\mathfrak{l} := \mathfrak{l}_1 \oplus \mathfrak{l}_2$ は \mathfrak{s} のラグランジュ部分代数.

逆に, $\mathfrak{s}' \subset \mathfrak{s}$ のラグランジュ部分代数のとき, $\mathfrak{s}' = \mathfrak{l}_1 \oplus \mathfrak{l}_2$ とかける. ただし $\mathfrak{l}_1 \subset \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{g}_{2\alpha}, \mathfrak{l}_2 \subset \mathfrak{g}_\alpha$ はラグランジュ部分空間.

- $\mathfrak{l}_\theta := \text{span}_{\mathbb{R}}\{\cos \theta A + \sin \theta Z\} \oplus \{X_1, \dots, X_{n-1}\}$ ($\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$) とする.

命題 (H.-Kajigaya, 2017)

任意の $\mathfrak{l} = \mathfrak{l}_1 \oplus \mathfrak{l}_2$: ラグランジュ部分代数に対して, $\exists \theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ s.t. $\mathfrak{l} \cong \mathfrak{l}_\theta$.

- L_θ : \mathfrak{l}_θ に対応する連結リ一部分群とする.
- $L_\theta.o$ の平均曲率ベクトルは $H = \frac{n+1}{2} \sin \theta (\sin \theta A - \cos \theta Z)$,
よって, $\theta \neq \theta'$ のとき, $L_\theta.o$ と $L_{\theta'}.o$ は等長的ではない.

定理 (H.-Kajigaya, 2017)

S の連結部分リ一群の作用として得られる等質ラグランジュ部分多様体の合同類は $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ でパラメトライズされる.

さらに等質ラグランジュ部分多様体を許与する S の連結リ一部分群作用の軌道同値類を決定した:

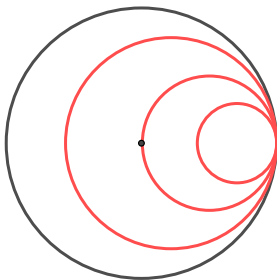
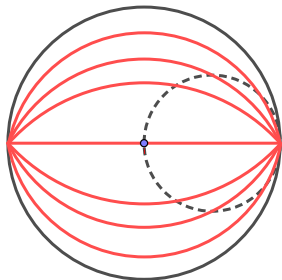
定理 (H.-Kajigaya, 2017)

S' : S の連結部分リ一群で等質ラグランジュ部分多様体を許容するとする. このとき, S' は L_0 または $L_{\frac{\pi}{2}}$ のいずれかに軌道同値である. さらに

- L_0 -作用は等質ラグランジュ部分多様体の 1 変数族を持つ.
 $L_0.o (\cong \mathbb{R}H^n)$ は唯一の極小軌道.
- $L_{\frac{\pi}{2}}$ -作用はすべての軌道が等質ラグランジュ部分多様体であり, かつすべて合同である.

S' : S の連結部分リー群で等質ラグランジュ部分多様体を許容するとする. このとき, S' は L_0 または $L_{\frac{\pi}{2}}$ のいずれかに軌道同値である. さらに

- L_0 -作用は等質ラグランジュ部分多様体の 1 変数族を持つ.
 $L_0 \cdot o (\cong \mathbb{R}H^n)$ は唯一の極小軌道.
- $L_{\frac{\pi}{2}}$ -作用はすべての軌道が等質ラグランジュ部分多様体であり, かつすべて合同である.



定理 (J.C.Diaz Ramoz-M. Dominguez Vazquez-H. preprint)

$H \subset G = \mathrm{SU}(1, n)$, すべての軌道がラグランジュ部分多様体 (in $\mathbb{C}\mathrm{H}^n$) のとき, $H \cong L_{\frac{\pi}{2}}$.

証明の方針: 既知の事実, および簡単な考察により次が分かる.

補題

もし複素双曲空間内の H -軌道が全て等質ラグランジュ部分多様体ならば, H は可換群.

- 条件 (H :可換, $H.o$:Lag. submfd. 等) から候補を絞る.
- $L_{\frac{\pi}{2}}$ 以外は特異軌道を持つことを示す

4. $\mathrm{Sp}(n, \mathbb{R})/\mathrm{U}(n)$ の可解モデル S の部分群作用から得られる等質 ラグランジュ部分多様体

[考察]: $M = \mathbb{C}H^n$ の場合

- $\mathfrak{s} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{2\alpha} = \text{span}_{\mathbb{R}}\{A, X_1, \dots, X_{n-1}, Y_1, \dots, Y_{n-1}, Z\}$,
- $\mathfrak{l}_1 \subset \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{g}_{2\alpha}$, $\mathfrak{l}_2 \subset \mathfrak{g}_\alpha$ がラグランジュ部分空間ならば $\mathfrak{l} = \mathfrak{l}_1 \oplus \mathfrak{l}_2$ はラグランジュ部分代数.
- $\mathfrak{l} \cong \mathfrak{l}_\theta = \text{span}_{\mathbb{R}}\{\cos \theta A + \sin \theta Z\} \oplus \{X_1, \dots, X_{n-1}\}$.
- $L_\theta \cong L_0$ or $L_{\frac{\pi}{2}}$

一般の非コンパクト型エルミート対称空間の場合に同様の構成を考える:

- $M = \text{Sp}(n, \mathbb{R})/\text{U}(n)$ のとき,

$$\begin{aligned}\mathfrak{s} &= \left(\mathfrak{a} \oplus \left(\bigoplus_i \mathfrak{g}_{2\varepsilon_i} \right) \right) \oplus \left(\left(\bigoplus_{i < j} \mathfrak{g}_{\varepsilon_i - \varepsilon_j} \right) \oplus \left(\bigoplus_{i < j} \mathfrak{g}_{\varepsilon_i + \varepsilon_j} \right) \right) \\ &= \text{span}\{A_1, \dots, A_n, Z_1, \dots, Z_n\} \oplus \bigoplus_{i < j} \text{span}\{X_{ij}, Y_{ij}\},\end{aligned}$$

- $J_{\mathfrak{s}}(A_i) = Z_i$, $J_{\mathfrak{s}}(X_{ij}) = Y_{ij}$
- 各 $\text{span}\{A_i, Z_i\}$, $\text{span}\{X_{ij}, Y_{ij}\}$ は複素部分空間,

- $T_i := \cos \varphi_i A_i + \sin \varphi_i Z_i$, $V_{ij} := \cos \psi_{ij} X_{ij} + \sin \psi_{ij} Y_{ji}$,
- $\mathfrak{s}' := \text{span}\{T_i | i = 1, \dots, n\} \oplus \text{span}\{V_{ij} | 1 \leq i < j \leq n\}$ とする。
このとき
- $\dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{s}' = \frac{1}{2} \dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{s}$,
- $\langle J_{\mathfrak{s}}(\mathfrak{s}'), \mathfrak{s}' \rangle_{\mathfrak{s}} = 0$ だが,
- 一般に \mathfrak{s}' は \mathfrak{s} の部分リー代数ではない。

補題 (H.,2019)

$[T_j, V_{ij}] \in \mathfrak{s}'$ のとき次が成り立つ:

- $\varphi_j = \frac{\pi}{2}$ ならば $\psi_{ij} = \frac{\pi}{2}$,
- $\varphi_j = 0$ ならば $\psi_{ij} \in \{0, \frac{\pi}{2}\}$,
- $\varphi_j \in (0, \frac{\pi}{2})$ ならば $\psi_{ij} \in \{\varphi_j, \frac{\pi}{2}\}$

命題 (H., 2019)

\mathfrak{s}' : ラグランジュ部分代数とする. このとき,
 $\exists \bar{\mathfrak{s}}' := \text{span}\{\bar{T}_i | i = 1, \dots, n\} \oplus \text{span}\{\bar{V}_{ij} | 1 \leq i < j \leq n\}$
ただし $\bar{T}_i := A_i$ or Z_i , $\bar{V}_{ij} := X_{ij}$ or Y_{ji}
s.t. $\bar{\mathfrak{s}}'$ は \mathfrak{s} の部分リー代数, \mathfrak{s} は \mathfrak{s}' と共役.

- 一般に $\bar{\mathfrak{s}}'$ も \mathfrak{s} の部分リー代数ではない.
- ラグランジュ部分代数 $\bar{\mathfrak{s}}'$ のグラフを用いた構成法を紹介する.

(step 1)

任意の $\mathfrak{s}' = \{T_k, V_{ij} | k = 1, \dots, n, 1 \leq i < j \leq n\}$ に対して, 以下の手順に従って $(n + 1)$ 個のラベル $(1, 2, \dots, n, \infty)$ の付いた頂点からなるグラフを構成する:

- $T_i = Z_i$ のとき, 頂点 i を黒く, $T_i = A_i$ のとき, 頂点 i を白く塗る.
- $V_{ij} = X_{ij}$ または $j = \infty$ のとき, 頂点 i, j を辺で結ぶ.

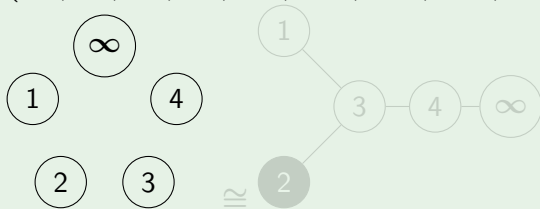
(step 2)

以下の手順に従って **step 1** で構成したグラフから “**increasing** な葉が 2 色で塗り分けられた根つき木” を構成する:

- 任意の頂点 $i < j < k$ に対して, 辺 $(i, j), (j, k), (i, k) \in E$ のとき, 辺 (i, k) を消す.

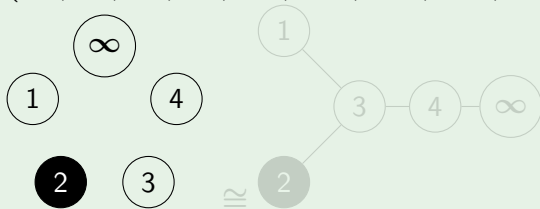
Example

$(A_1, Z_2, A_3, A_4, Y_{12}, X_{13}, X_{14}, X_{23}, X_{24}, X_{34})$



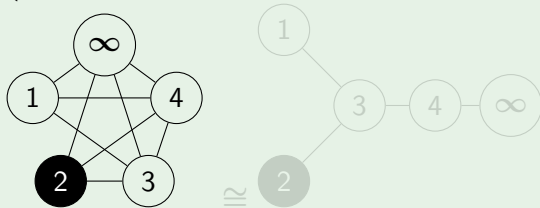
Example

$(A_1, Z_2, A_3, A_4, Y_{12}, X_{13}, X_{14}, X_{23}, X_{24}, X_{34})$



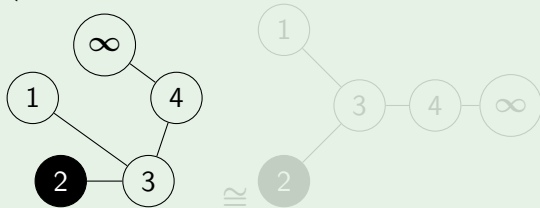
Example

$(A_1, Z_2, A_3, A_4, Y_{12}, X_{13}, X_{14}, X_{23}, X_{24}, X_{34})$



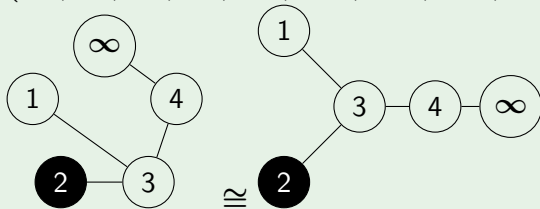
Example

$(A_1, Z_2, A_3, A_4, Y_{12}, X_{13}, X_{14}, X_{23}, X_{24}, X_{34})$



Example

$(A_1, Z_2, A_3, A_4, Y_{12}, X_{13}, X_{14}, X_{23}, X_{24}, X_{34})$



用語の確認:

以下の用語を使う:

- **グラフ**とはループと多重辺を持たない無向グラフ,
- $T = (V, E)$ が **木** : $\iff T$ は連結, サイクルを持たない.
- $\#V = n$ とする. T が **ラベル付き木** : \iff 各頂点に 1 から n までのラベルがついている.
- ラベル付き木 T が **根 (∞) を持つ** : \iff 各頂点に 1 から n と ∞ のラベルがついている.
- 任意の隣接 2 頂点に対して, 根に近い方を**親**, 遠いほうを**子**という
- 頂点 x が **葉** : $\iff x$ は子を持たない.
- 根つき木 T が **increasing** : \iff 任意の隣接 2 頂点に対して, 根に近いほうがラベルが大きい.
- T が **2-colored leaves** : \iff 葉が白または黒で塗られ, 葉以外の頂点は白で塗られたもの.

以下 **increasing rooted tree with 2-colored leaves** (2色葉を持つ増加ラベル付き根付き木) を単に**根付き木 (色付き)** と呼ぶ.

定理 (H.-Kurihara)

$l' \in \{\overline{s'}\}$ がラグランジュ部分代数のとき, 上記の方法で得られるグラフは根付き木 (色付き) である. また根付き木 (色付き) から上記の構成法の逆をたどるとラグランジュ部分代数が構成できる.

例 ($m = 3$)

例

$$\mathfrak{s}'(m) = \text{span}_{\mathbb{R}}\{Z_1, A_2, A_3, X_{12}, X_{13}, X_{23}\}: \circ.$$

例

$$\mathfrak{s}'(m) = \text{span}_{\mathbb{R}}\{Z_1, A_2, A_3, X_{12}, Y_{13}, X_{23}\}: \times.$$

$$\because [X_{12}, X_{23}] = X_{13} \notin \mathfrak{s}'(m)$$

例

$$\mathfrak{s}'(m) = \text{span}_{\mathbb{R}}\{A_1, Z_2, A_3, X_{12}, X_{13}, X_{23}\}: \times.$$

$$\because [X_{12}, Z_2] = Y_{12} \notin \mathfrak{s}'(m)$$

命題 (Kurihara)

ラグランジアン部分代数 \mathcal{V} に対応する根付き木 (色付き) の数は

$$\sum_{k=0}^{n-1} 2^{k+1} A(n, k) = \sum_{k=0}^{n-1} 2^{k+1} \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{n+1}{j} (k+1-j)^n$$

ただし, $A(n, k) = \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{n+1}{j} (k+1-j)^m$

Example

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|----|-----|------|------|-------|---------|-----|
| n | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | ... |
| $\#\mathcal{T}_n$ | 2 | 6 | 26 | 150 | 1082 | 9366 | 94586 | 1091670 | ... |

(OEIS: A000629 Number of necklaces of partitions of $n+1$ labeled beads.)

- 我々の設定において、グラフが同型ならば対応するリー代数も同型になる。
- $\{(n + 1)$ 個の頂点からなる根つき木 (色つき) $\}$ の同型類 (頂点のラベルの違いを無視したもの) の個数を調べると

| n | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | ... |
|------------------------------|---|---|----|-----|------|------|-------|---------|-----|
| $\#\overline{\mathcal{T}}_n$ | 2 | 6 | 26 | 150 | 1082 | 9366 | 94586 | 1091670 | ... |
| $\#[\mathcal{T}_n]$ | 2 | 5 | 13 | 37 | 108 | 332 | 1042 | 3360 | ... |

まとめ

$M = \mathbb{C}H^n$ のとき

- $\mathfrak{l}_1 \subset \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{g}_{2\alpha}$, $\mathfrak{l}_2 \subset \mathfrak{g}_\alpha$: ラグランジュ部分空間のとき, $\mathfrak{l} := \mathfrak{l}_1 \oplus \mathfrak{l}_2$ は \mathfrak{s} のラグランジュ部分代数.
- 逆も成り立つ: $\mathfrak{s}' \subset \mathfrak{s}$ のラグランジュ部分代数のとき, $\mathfrak{s}' = \mathfrak{l}_1 \oplus \mathfrak{l}_2$.
- $L \subset S$: $L.o$: **Lag. submfd.** は L_0 , または $L_{\frac{\pi}{2}}$ に軌道同値.

一般の非コンパクト型エルミート対称空間に対して,

- 上記を参考にラグランジュ部分代数の部分的な構成法を高階の場合に考察,
- $M = \mathrm{Sp}(n, \mathbb{R})/\mathrm{U}(n)$ の場合, グラフを用いた $\{\overline{\mathfrak{s}'}\}$ の中のラグランジュ部分代数の構成法を与えた.

ご清聴ありがとうございました