Hermann 作用から誘導される path 群作用の軌道の幾何学

森本 真弘

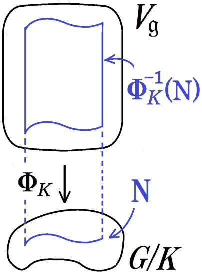
大阪市立大学数学研究所

2022 年 3 月 20 日– 21 日
部分多様体幾何とリー群作用 2021

イントロダクション

G/K: コンパクト対称空間, N: 部分多様体 in G/K.

$N \subset G/K$ を研究する一つの手法として
あるヒルベルト空間への「持ち上げ」がある.



- $V_\mathfrak{g} := L^2([0,1], \mathfrak{g})$:
  L^2-path $[0,1] \to \mathfrak{g}$ 全体の成すヒルベルト空間.
  ($\mathfrak{g}$ は G のリー代数を表す.)
- $\Phi_K := \pi \circ \Phi : V_\mathfrak{g} \xrightarrow{\Phi} G \xrightarrow{\pi} G/K$:
  平行移動写像（: リーマン沈め込み)
  (Terng-Thorbergsson 1995)
- $\Phi_K^{-1}(N)$: N の Φ_K による逆像
  $\Rightarrow$ $V_\mathfrak{g}$ の固有フレドホルム (PF) 部分多様体 (Terng 1989)
  $\Rightarrow$ ユークリッド空間内の手法がヒルベルト空間 $V_\mathfrak{g}$ にも応用できる.

私の目標：$N \subset G/K$ の問題を $\Phi_K^{-1}(N) \subset V_\mathfrak{g}$ を経由して解決する.

現在：N と $\Phi_K^{-1}(N)$ の幾何学的関係について研究中（今回の講演).

Contents

Sec. 1 - 平行移動写像 $\Phi : V_{\mathfrak{g}} \to G$ (1/4)

設定

G: 連結コンパクト・リー群 with 両側不変計量, $\mathfrak{g}$: G のリー代数.

Path 群と Path 空間

- $\mathcal{G} := H^1([0,1], G)$: Sobolev H^1-path $[0,1] \to G$ 全体.
  $\Rightarrow \mathcal{G}$：ヒルベルト・リー群 (i.e. ヒルベルト多様体 with 可微分な群構造)
- $V_{\mathfrak{g}} := L^2([0,1], \mathfrak{g})$: L^2-path $[0,1] \to \mathfrak{g}$ 全体の成すヒルベルト空間

定義 (Terng 1995)

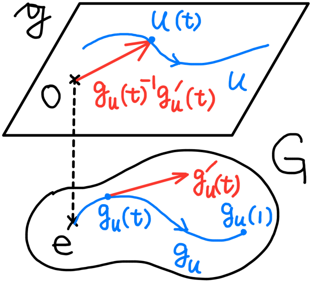
G 上の平行移動写像は次で定義される：

$$\begin{array}{ccccc} \Phi & : & V_{\mathfrak{g}} & \to & G \\ & & \cup & & \cup \\ & & u & \mapsto & \Phi(u) \overset{\text{def}}{:=} g_u(1). \end{array}$$

ここで $g_u \in \mathcal{G}$ は次の ODE の解：

$$g_u^{-1} g_u' = u,\ g_u(0) = e.$$

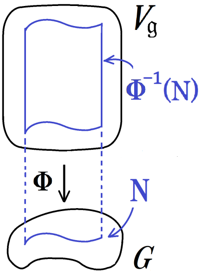
(g_u' は g_u の弱微分 w.r.t. $t \in [0,1]$ を表す.
$g_u^{-1} : [0,1] \to G$ は $t \mapsto g_u(t)^{-1}$ で定義.)



Sec. 1 - 平行移動写像 $\Phi : V_{\mathfrak{g}} \to G$ (2/4)

定理 (Terng-Thorbergsson 1995)

(1) Φ はリーマン沈め込み.
(2) N：G の閉部分多様体.
$\Rightarrow$ $\Phi^{-1}(N)$：$V_{\mathfrak{g}}$ の固有フレドホルム部分多様体.

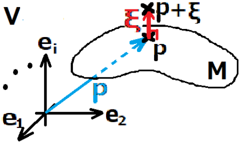


Recall (Terng 1989)

V: ヒルベルト空間, M: V の部分多様体.
M は 固有フレドホルム (PF)
$\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$
- $M \subset V$ は余次元有限.
- 終点写像 $Y : T^{\perp}M \to V$, $(p, \xi) \mapsto p + \xi$ は固有フレドホルム条件 (cf. [Terng]) を満たす.

$\Rightarrow$ M の 第二基本形式 α, 形作用素 A_{ξ}, 法接続 $\nabla^{\perp}$ が定義される.
$\Rightarrow$ 更に, A_{ξ} は 自己共役なコンパクト作用素
次のような実固有値をもつ (M の ξ 方向の主曲率):

$$\underbrace{\mu_1 < \mu_2 < \cdots}_{\text{重複度有限}} < 0 < \underbrace{\cdots < \lambda_2 < \lambda_1}_{\text{重複度有限}}$$



Sec. 1 - 平行移動写像 $\Phi : V_{\mathfrak{g}} \to G$ (3/4)

U を $G \times G$ の閉部分群とする.

定義

- U の G への等長作用を次で定義：
$$(b,c)\cdot a := bac^{-1}, \qquad \text{where } (b,c) \in U, \ a \in G.$$
- $P(G,U) := \Psi^{-1}(U)$ の $V_{\mathfrak{g}} = L^2([0,1],\mathfrak{g})$ への等長作用をゲージ変換で定義：
$$g * u := gug^{-1} - g'g^{-1}, \qquad \text{where } g \in P(G,U), \ u \in V_{\mathfrak{g}}.$$

命題 (Terng 1995)

次の図式は可換 (ただし Ψ は $\Psi(g) = (g(0), g(1))$ で定義):

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathcal{G} & \supset & P(G,U) & \curvearrowright & V_{\mathfrak{g}} & \supset & \Phi^{-1}(N) = P(G,U) * \hat{w} \\
\Psi\downarrow & & \Psi\downarrow & & \Phi\downarrow & & \Phi\downarrow \\
G \times G & \supset & U & \curvearrowright & G & \supset & N = U \cdot \exp w
\end{array}$$

命題 (Terng 1995)

軌道 $N := U \cdot \exp w$ $(w \in \mathfrak{g})$ に対して $\Phi^{-1}(N) = P(G,U) * \hat{w}$. ($\hat{w}$: const path)

Sec. 1 - 平行移動写像 $\Phi : V_{\mathfrak{g}} \to G$ (4/4)

定理 (Terng 1995, Gorodski-Thorbergsson 2002)

次の条件は同値：
(1) 作用 $U \curvearrowright G$ は 超極.
(2) 作用 $P(G,U) \curvearrowright V_{\mathfrak{g}}$ は 超極.

$$
\begin{array}{ccccccc}
\mathcal{G} & \supset & P(G,U) & \curvearrowright & V_{\mathfrak{g}} & \supset & \hat{\mathfrak{t}} \ : \text{a section} \\
\Psi\downarrow & & \Psi\downarrow & & \Phi\downarrow & & \Phi\downarrow \\
G\times G & \supset & U & \curvearrowright & G & \supset & \exp\mathfrak{t} : \ \text{a section}
\end{array}
$$

ここで $\hat{\mathfrak{t}}$ は $\mathfrak{t}$ に値を持つ定道全体.（$\mathfrak{t}$ は $\mathfrak{g}$ の可換部分代数.）

Recall (Heintze-Palais-Terng-Thorbergsson 1995)

A: コンパクト・リー群, X: リーマン多様体. A は X に等長に作用すると仮定.

A-作用 on X は 超極
$\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ $\exists\Sigma$: 全測地的な閉部分多様体 in X s.t.
(1) Σ は 各 A-軌道と直交する,
(2) Σ は誘導計量に関して平坦.

このような Σ は A-作用のセクションという.

Sec. 2 - 平行移動写像 $\Phi_K : V_{\mathfrak{g}} \to G \to G/K$ (1/3)

設定

G/K: コンパクト対称空間,
$\pi : G \to G/K$: 自然な射影（リーマン沈め込み）

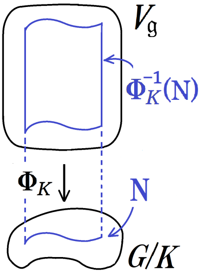
定義 (Terng-Thorbergsson 1995)

G/K 上の平行移動写像 Φ_K は次で定義される

$$\Phi_K := \pi \circ \Phi : V_{\mathfrak{g}} \xrightarrow{\Phi} G \xrightarrow{\pi} G/K$$

命題

(1) Φ_K はリーマン沈め込み.
(2) N：閉部分多様体 in G/K
$\Rightarrow \Phi_K^{-1}(N)$：PF 部分多様体 in $V_{\mathfrak{g}}$.



Sec. 2 - 平行移動写像 $\Phi_K : V_{\mathfrak{g}} \to G \to G/K$ (2/3)

命題

H: 閉部分群 of G. 等長作用 $H \curvearrowright G/K$ を次で定義：

$$b \cdot aK := (ba)K, \qquad b \in H,\ aK \in G/K.$$

(1) 次の図式は可換：

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathcal{G} & \supset & P(G, H \times K) & \curvearrowright & V_{\mathfrak{g}} & \supset & \Phi_K^{-1}(N) = P(G, H \times K) * \hat{w} \\
\Psi \downarrow & & \Psi \downarrow & & \Phi \downarrow & & \Phi \downarrow \\
G \times G & \supset & H \times K & \curvearrowright & G & \supset & \pi^{-1}(N) = (H \times K) \cdot \exp w \\
p_1 \downarrow & & p_1 \downarrow & & \pi \downarrow & & \pi \downarrow \\
G & \supset & H & \curvearrowright & G/K & \supset & N = H \cdot (\exp w)K
\end{array}$$

(2) $N = H \cdot (\exp w)K$：H-軌道 through $(\exp w)K$ $(w \in \mathfrak{g})$.
$\Rightarrow \pi^{-1}(N) = (H \times K) \cdot \exp w$ および $\Phi_K^{-1}(N) = P(G, H \times K) * \hat{w}$ が成立. ($\hat{w} \in V_{\mathfrak{g}}$: the constant path with value w.)

Sec. 2 - 平行移動写像 $\Phi_K : V_{\mathfrak{g}} \to G \to G/K$ (3/3)

定理 (Terng1995, Heintze-Palais-Terng-Thorbergsson1995, Gorodski-Thorbergsson2002)

次の条件は同値：

(1) 作用 $H \curvearrowright G/K$ は 超極,

(2) 作用 $H \times K \curvearrowright G$ は 超極,

(3) 作用 $P(G, H \times K) \curvearrowright V_{\mathfrak{g}}$ は 超極.

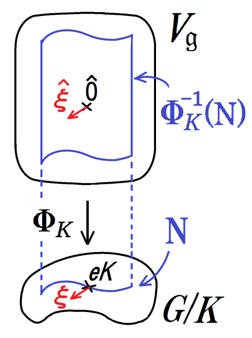
$$
\begin{array}{ccccccc}
\mathcal{G} & \supset & P(G, H \times K) & \curvearrowright & V_{\mathfrak{g}} & \supset & \hat{\mathfrak{t}} : \text{ a section} \\
\Psi \downarrow & & \Psi \downarrow & & \Phi \downarrow & & \Phi \downarrow \\
G \times G & \supset & H \times K & \curvearrowright & G & \supset & \exp \mathfrak{t} : \text{ a section} \\
p_1 \downarrow & & p_1 \downarrow & & \pi \downarrow & & \pi \downarrow \\
G & \supset & H & \curvearrowright & G/K & \supset & \operatorname{Exp} \mathfrak{t} : \text{ a section}
\end{array}
$$

Sec. 3 - 平行移動写像の部分多様体幾何学 (1/4)

問題

G/K：コンパクト対称空間, $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{m}$：標準分解.

- N：閉部分多様体 in G/K. $eK \in G/K$ を通ると仮定.
- 法ベクトル $\xi \in T^{\perp}_{eK}N$ を固定. 水平リフト $\hat{\xi} \in T^{\perp}_{\hat{0}}\Phi^{-1}_{G/K}(N)$.



$$\rightsquigarrow \left\{ \begin{array}{ccc} \alpha^{\Phi_K^{-1}(N)} & : & \text{第二基本形式} \\ A_{\hat{\xi}}^{\Phi_K^{-1}(N)} & : & \text{形作用素} \\ \{\mu = \mu(\xi)\} & : & \text{主曲率} \end{array} \right.$$

$$\rightsquigarrow \left\{ \begin{array}{ccc} \alpha^{N} & : & \text{第二基本形式} \\ A_{\xi}^{N} & : & \text{形作用素} \\ \{\lambda = \lambda(\xi)\} & : & \text{主曲率} \end{array} \right.$$

関係？

Sec. 3 - 平行移動写像の部分多様体幾何学 (2/4)

定理 (M. 2019)：第二基本形式

$\forall X, Y \in T_{\hat{0}} \Phi_K^{-1}(N)$,

$$\alpha^{\Phi_K^{-1}(N)}(X,Y) = \alpha^N \left(\int_0^1 X(t)_{\mathfrak{m}} dt, \int_0^1 Y(t)_{\mathfrak{m}} dt \right) + \frac{1}{2} \left[\int_0^1 X(t)_{\mathfrak{k}} dt, \int_0^1 Y(t)_{\mathfrak{m}} dt \right]^{\perp} - \frac{1}{2} \left[\int_0^1 X(t)_{\mathfrak{m}} dt, \int_0^1 Y(t)_{\mathfrak{m}} dt \right]^{\perp} + \frac{1}{2} \left[\int_0^1 X(t) dt, \int_0^1 Y(t) dt \right]^{\perp} - \left(\int_0^1 \left[\int_0^t X(s) ds, Y(t) \right] dt \right)^{\perp}.$$

定理 (M. 2019)：形作用素

$\forall X \in T_{\hat{0}} \Phi_K^{-1}(N)$, $\hat{\xi} \in T_{\hat{0}}^{\perp} \Phi_K^{-1}(N)$,

$$A_{\hat{\xi}}^{\Phi_K^{-1}(N)}(X) = A_{\xi}^N \left(\int_0^1 X(t)_{\mathfrak{m}} dt \right) - \frac{1}{2} \left[\int_0^1 X(t)_{\mathfrak{m}} dt, \xi \right]_{\mathfrak{k}} + \frac{1}{2} \left[\int_0^1 X(t)_{\mathfrak{k}} dt, \xi \right]^{\top} - \frac{1}{2} \left[\int_0^1 X(t) dt, \xi \right]^{\top} + \left[\int_0^t X(s) ds, \xi \right] - \left[\int_0^1 \int_0^t X(s) ds dt, \xi \right]^{\perp}.$$

Sec. 3 - 平行移動写像の部分多様体幾何学 (3/4)

Consider

$$\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_0 + \sum_{\nu>0} \mathfrak{m}_\nu, \qquad T_{eK}N = \sum_{\lambda} S_\lambda,$$

$$\mathfrak{m}_\nu = \{x \in \mathfrak{m} \mid \mathrm{ad}(\xi)^2 x = -\nu^2 x\}, \quad S_\lambda = \{v \in T_{eK}N \mid A^N_\xi(v) = \lambda v\}.$$

仮定

N は curvature-adapted 部分多様体 in G/K.

$\Longrightarrow$ $\mathrm{ad}(\xi)^2 : \mathfrak{m} \to \mathfrak{m}$ は $T_{eK}N$ を保ち A^N_ξ と可換.

$$\Longrightarrow T_{eK}N = \sum_{\lambda}(\mathfrak{m}_0 \cap S_\lambda) + \sum_{\nu>0}\sum_{\lambda}(\mathfrak{m}_\nu \cap S_\lambda),$$

$$T^\perp_{eK}N = \mathfrak{m}_0 \cap T^\perp_{eK}N + \sum_{\nu>0}(\mathfrak{m}_\nu \cap T^\perp_{eK}N).$$

定理 (Koike 2002, M. 2020)：主曲率

N：curvature-adapted 部分多様体 in G/K.

$\Rightarrow$ $\Phi_K^{-1}(N)$ の $\hat{\xi}$ 方向主曲率は

$$\{0\} \cup \{\lambda\} \cup \left\{\frac{\nu}{n\pi}\right\}_{\nu>0,\ n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \cup \left\{\frac{\nu}{\arctan\frac{\nu}{\lambda} + m\pi}\right\}_{\nu>0,\ \lambda,\ m\in\mathbb{Z}}.$$

固有関数，重複度は次の表で与えられる（次頁）.

Sec. 3 - 平行移動写像の部分多様体幾何学 (4/4)

定理 (Koike 2002, M. 2020)：主曲率

固有値	固有関数基底	重複度
0	$\{x_i^0 \sin n\pi t, y_j^{(0,\lambda)} \cos n\pi t, y_l^{(0,\perp)} \cos n\pi t\}_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 1},\, \lambda,\, i,\, j,\, l}$	∞
λ	$\{y_j^{(0,\lambda)}\}_j$	$\dim(\mathfrak{m}_0 \cap S_\lambda)$
$\dfrac{\nu}{n\pi}$	$\{x_r^{(\nu,\perp)} \sin n\pi t - y_r^{(\nu,\perp)} \cos n\pi t\}_r$	$\dim(\mathfrak{m}_\nu \cap T^\perp_{eK} N)$
$\dfrac{\nu}{\arctan \frac{\nu}{\lambda} + m\pi}$	$\left\{\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{\nu}{n\pi\mu+\nu}(x_k^{(\nu,\lambda)} \sin n\pi t + y_k^{(\nu,\lambda)} \cos n\pi t)\right\}_k$	$\dim(\mathfrak{m}_\nu \cap S_\lambda)$

系

Φ_K のファイバー $\Phi_K^{-1}(eK)$ の主曲率は $\{0\} \cup \left\{\frac{\nu}{n\pi}\right\}_{\nu>0,\ n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}$.
重複度は順に ∞，$\dim(T^\perp_{eK} N \cap \mathfrak{g}_\nu)$.

Sec. 4 - 平行移動写像のオースティア性 (1/4)

定義 (Harvey-Lawson 1982)

M: リーマン多様体．N: 部分多様体 in M.
N は オースティア
$\underset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$ $\forall p \in N$, $\forall \xi \in T_p^{\perp} N$, 主曲率全体 ($A_\xi^N$ の固有値全体) は
重複度込みで (-1) 倍不変.

命題

オースティア部分多様体は極小部分多様体

注意

ヒルベルト空間の PF 部分多様体に対しても，オースティア性を定義できる．(オースティア PF 部分多様体)

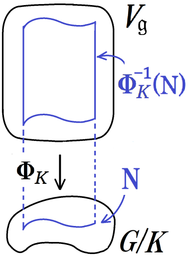
Sec. 4 - 平行移動写像のオースティア性 (2/4)

定理 (King-Terng 1993, Heintze-Liu-Olmos 2006)

次の条件は同値：

(1) N は G/K の極小部分多様体,

(2) $\Phi_K^{-1}(N)$ は $V_{\mathfrak{g}}$ の極小 PF 部分多様体 in $V_{\mathfrak{g}}$.



問題

以下の 2 条件の関係？

(A) N は G/K のオースティア部分多様体,

(B) $\Phi_K^{-1}(N)$ は $V_{\mathfrak{g}}$ のオースティア PF 部分多様体.

難点

- N が curvature-adapted でなければ主曲率を計算できない.
- N が curvature-adapted であったとしても, $\Phi_K^{-1}(N)$ の主曲率は複雑.

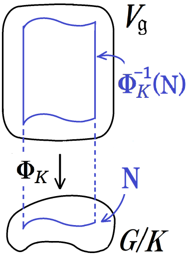
Sec. 4 - 平行移動写像のオースティア性 (3/4)

定理 (M. 2020)

G/K が球面であると仮定.
このとき以下の 2 条件は同値：

(A) N は G/K のオースティア部分多様体,

(B) $\Phi_K^{-1}(N)$ は $V_{\mathfrak{g}}$ のオースティア PF 部分多様体.



例

U/L: コンパクト対称対. L: 連結と仮定
$\mathfrak{u} = \mathfrak{l} + \mathfrak{p}$: 標準分解, $\mathrm{Ad} : L \to SO(\mathfrak{p})$: イソトロピー表現.
$x \in \mathfrak{p}$ に対して，軌道 $N(x) := \mathrm{Ad}(L) \cdot x \subset S(\|x\|) \subset \mathfrak{p}$ を考える
軌道 $N(x)$ が 球面 $S(\|x\|)(= G/K)$ のオースティア部分多様体と仮定.
(そのような $N(x)$ は 井川-酒井-田崎 2009 により分類済み).
$\Rightarrow$ 上の定理より $\Phi_K^{-1}(N(x))$ は $V_{\mathfrak{g}}$ の オースティア PF 部分多様体.

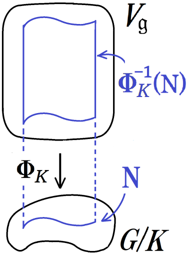
Sec. 4 - 平行移動写像のオースティア性 (4/4)

定理 (M. 2020)

G/K が球面であると仮定.
このとき以下の 2 条件は同値：

(A) N は G/K のオースティア部分多様体,

(B) $\Phi_K^{-1}(N)$ は $V_{\mathfrak{g}}$ のオースティア PF 部分多様体.



問題

G/K が球面以外の場合は？

難点

- N は curvature-adapted でなければ主曲率を計算できない．
- N が curvature-adapted であったとしても，$\Phi_K^{-1}(N)$ の主曲率は複雑．

$\Rightarrow$ N が Hermann 作用の軌道の場合を考えよう (: next section)

Sec. 5 - Hermann 作用の軌道の幾何学 (1/5)

定義 (Hermann 1960)

G/K：コンパクト型対称空間, H: G の対称部分群
i.e. $\exists\tau : G \to G$: 対合的自己同型であって $G_0^\tau \subset H \subset G^\tau$ を満たす.
$\Rightarrow$ 作用 $H \curvearrowright G/K$ は Hermann 作用と呼ばれる.

命題 (Hermann 1962, Heintze-Palais-Terng-Thorbergsson 1995)

Hermann 作用は超極.

実際，標準分解

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{m} \quad \text{and} \quad \mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{p},$$

を考え，$\mathfrak{m} \cap \mathfrak{p}$ の極大可換部分空間 $\mathfrak{t}$ をとる.
$\Longrightarrow \Sigma := \pi(\exp \mathfrak{t})$ は Hermann 作用のセクションとなる.

命題 (Goertsches-Thorbergsson 2007)

Hermann 作用の全ての軌道は curvature-adapted 部分多様体である.

Sec. 5 - Hermann 作用の軌道の幾何学 (2/5)

分解 (1/2): ルート空間分解

$\mathfrak{m} \cap \mathfrak{p}$ $(\subset \mathfrak{m})$ の極大可換部分空間 $\mathfrak{t}$ を固定 $\rightsquigarrow$ Δ: $\mathfrak{t}$ のルート系

$$\mathfrak{k} = \mathfrak{k}_0 + \sum_{\alpha \in \Delta^+} \mathfrak{k}_\alpha, \qquad \mathfrak{m} = \mathfrak{m}_0 + \sum_{\alpha \in \Delta^+} \mathfrak{m}_\alpha,$$

$$\mathfrak{k}_\alpha = \{x \in \mathfrak{k} \mid \forall \eta \in \mathfrak{t},\ \mathrm{ad}(\eta)^2 x = -\langle \alpha, \eta \rangle^2 x\}.$$

$$\mathfrak{m}_\alpha = \{y \in \mathfrak{m} \mid \forall \eta \in \mathfrak{t},\ \mathrm{ad}(\eta)^2 y = -\langle \alpha, \eta \rangle^2 y\}.$$

分解 (2/2): 固有空間分解 $\sigma \circ \tau : \mathfrak{g}^{\mathbb{C}} \to \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$

$\sigma : G \to G$: 対合的自己同型であって $G_0^\sigma \subset K \subset G^\sigma$ を満たす
$\tau : G \to G$: 対合的自己同型であって $G_0^\tau \subset H \subset G^\tau$ を満たす.

$$\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} = \sum_{\epsilon \in U(1)} \mathfrak{g}(\epsilon),$$

$$\mathfrak{g}(\epsilon) = \{z \in \mathfrak{g}^{\mathbb{C}} \mid (\sigma \circ \tau)(z) = \epsilon z\}.$$

Sec. 5 - Hermann 作用の軌道の幾何学 (3/5)

命題 (Ohno 2021)

$w \in \mathfrak{t}$ をとる．軌道 $N := H \cdot (\exp w)K$ を考える．このとき

$$T_{(\exp w)K}N = dL_{\exp w}\Big(\sum_{\substack{\epsilon \in U(1)_{\geq 0} \\ \epsilon \neq 1}} \mathfrak{m}_{0,\epsilon} + \sum_{\alpha \in \Delta^+} \sum_{\substack{\epsilon \in U(1) \\ \langle \alpha, w \rangle + \frac{1}{2}\arg \epsilon \notin \pi\mathbb{Z}}} \mathfrak{m}_{\alpha,\epsilon} \Big),$$

$$T^{\perp}_{(\exp w)K}N = dL_{\exp w}\Big(\mathfrak{t} + \sum_{\alpha \in \Delta^+} \sum_{\substack{\epsilon \in U(1) \\ \langle \alpha, w \rangle + \frac{1}{2}\arg \epsilon \in \pi\mathbb{Z}}} \mathfrak{m}_{\alpha,\epsilon} \Big),$$

と表せる．ここで $\mathfrak{m}_{\alpha,\epsilon} := (\mathfrak{g}(\alpha) \cap \mathfrak{g}(\epsilon) + \mathfrak{g}(-\alpha) \cap \mathfrak{g}(\epsilon^{-1})) \cap \mathfrak{m}$ $(\subset \mathfrak{m}_\alpha)$．更に，1 つ目の分解は，形作用素の族 $\{A^N_{dL_{\exp w}(\xi)}\}_{\xi \in \mathfrak{t}}$ に関する同時固有空間分解である：

$dL_{\exp w}(\mathfrak{m}_{0,\epsilon})$: 固有値 0 の固有空間,

$dL_{\exp w}(\mathfrak{m}_{\alpha,\epsilon})$: 固有値 $-\langle \alpha, \xi \rangle \cot(\langle \alpha, w \rangle + \frac{1}{2}\arg \epsilon)$ の固有空間.

ここで，$\mathfrak{g}(\alpha) := \{z \in \mathfrak{g}^{\mathbb{C}} \mid \forall \eta \in \mathfrak{t},\ \mathrm{ad}(\eta)(z) = \sqrt{-1}\langle \alpha, \eta \rangle z\}$ とおいた．

$$\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{g}(0) + \sum_{\alpha \in \Delta} \mathfrak{g}(\alpha)$$

Sec. 5 - Hermann 作用の軌道の幾何学 (4/5)

系 (Goertsches-Thorbergsson 2007)

対合が可換（$\sigma \circ \tau = \tau \circ \sigma$）と仮定．このとき

$$T_{(\exp w)K}N = dL_{\exp w}\Big(\mathfrak{m}_0 \cap \mathfrak{h} + \sum_{\substack{\alpha\in\Delta^+ \\ \langle\alpha,w\rangle\notin\pi\mathbb{Z}}} \mathfrak{m}_\alpha \cap \mathfrak{p} + \sum_{\substack{\alpha\in\Delta^+ \\ \langle\alpha,w\rangle+\pi/2\notin\pi\mathbb{Z}}} \mathfrak{m}_\alpha \cap \mathfrak{h} \Big),$$

$$T^\perp_{(\exp w)K}N = dL_{\exp w}\Big(\mathfrak{t} + \sum_{\substack{\alpha\in\Delta^+ \\ \langle\alpha,w\rangle\in\pi\mathbb{Z}}} \mathfrak{m}_\alpha \cap \mathfrak{p} + \sum_{\substack{\alpha\in\Delta^+ \\ \langle\alpha,w\rangle+\pi/2\in\pi\mathbb{Z}}} \mathfrak{m}_\alpha \cap \mathfrak{h} \Big),$$

$dL_{(\exp w)}(\mathfrak{m}_0 \cap \mathfrak{h})$: 固有値 0 の固有空間,

$dL_{(\exp w)}(\mathfrak{m}_\alpha \cap \mathfrak{p})$: 固有値 $-\langle\alpha,\xi\rangle\cot\langle\alpha,w\rangle$ の固有空間,

$dL_{(\exp w)}(\mathfrak{m}_\alpha \cap \mathfrak{h})$: 固有値 $\langle\alpha,\xi\rangle\tan\langle\alpha,w\rangle$ の固有空間.

Sec. 5 - Hermann 作用の軌道の幾何学 (5/5)

系

対合が一致する（$\sigma = \tau$）と仮定．このとき

$$T_{(\exp w)K} N = dL_{\exp w}\Big(\sum_{\substack{\alpha \in \Delta^+ \\ \langle \alpha, w \rangle \notin \pi \mathbb{Z}}} \mathfrak{m}_\alpha \Big),$$

$$T^{\perp}_{(\exp w)K} N = dL_{\exp w}\Big(\mathfrak{t} + \sum_{\substack{\alpha \in \Delta^+ \\ \langle \alpha, w \rangle \in \pi \mathbb{Z}}} \mathfrak{m}_\alpha \Big),$$

$dL_{\exp w}(\mathfrak{m}_\alpha)$ ： 固有値 $-\langle \alpha, \xi \rangle \cot \langle \alpha, w \rangle$ の固有空間.

Sec. 6 - 主結果 (1/6)

設定

G/K: コンパクト型対称空間, H: G の対称部分群.
$\mathfrak{m} \cap \mathfrak{p}$ の極大可換部分空間 $\mathfrak{t}$ を固定. $w \in \mathfrak{t}$ をとる.

$$
\begin{array}{ccccccccc}
\mathcal{G} & \supset & P(G, H \times K) & \curvearrowright & V_{\mathfrak{g}} & \supset & \Phi_K^{-1}(N) = P(G, H \times K) * \hat{w} \\
\Psi \downarrow & & \Psi \downarrow & & \Phi \downarrow & & \Phi \downarrow \\
G \times G & \supset & H \times K & \curvearrowright & G & \supset & \pi^{-1}(N) = (H \times K) \cdot \exp w \\
p_1 \downarrow & & p_1 \downarrow & & \pi \downarrow & & \pi \downarrow \\
G & \supset & H & \curvearrowright & G/K & \supset & N = H \cdot (\exp w) K
\end{array}
$$

Hermann 作用 $H \curvearrowright G/K$ は超極 with セクション $\mathrm{Exp}\, \mathfrak{t}$.
$\Leftrightarrow$ 等長作用 $H \times K \curvearrowright G$ は 超極 with セクション $\exp \mathfrak{t}$,
$\Leftrightarrow$ 等長作用 $P(G, H \times K) \curvearrowright V_{\mathfrak{g}}$ は超極 超極 with セクション $\hat{\mathfrak{t}}$.

Sec. 6 - 主結果 (2/6)

定理 (M. 2021): $P(G, H \times K)$-軌道の主曲率

軌道 $P(G, H \times K) * \hat{w}$ の $\hat{\xi} \in \hat{\mathfrak{t}}$ 方向主曲率は

$$\{0\} \cup \left\{ \frac{\langle \alpha, \xi \rangle}{-\langle \alpha, w \rangle - \frac{1}{2} \arg \epsilon + m\pi} \;\middle|\; \begin{array}{l} \alpha \in \Delta^+, \ \epsilon \in U(1), \\ \langle \alpha, w \rangle + \frac{1}{2} \arg \epsilon \notin \pi\mathbb{Z}, \ m \in \mathbb{Z} \end{array} \right\}$$
$$\cup \left\{ \frac{\langle \alpha, \xi \rangle}{n\pi} \;\middle|\; \begin{array}{l} \alpha \in \Delta^+, \ n \in \mathbb{Z} \backslash \{0\}, \\ \exists \epsilon \in U(1) \text{ s.t. } \langle \alpha, w \rangle + \frac{1}{2} \arg \epsilon \in \pi\mathbb{Z} \end{array} \right\}$$

重複度は順番に

$$\infty, \quad \dim \mathfrak{m}_{\alpha,\epsilon}, \quad \sum_{\alpha} \dim \mathfrak{m}_{\alpha,\epsilon}$$

Sec. 6 - 主結果 (3/6)

系

対合が可換（$\sigma \circ \tau = \tau \circ \sigma$）と仮定.
このとき軌道 $P(G, H \times K) * \hat{w}$ の $\hat{\xi} \in \hat{\mathfrak{t}}$ 方向の主曲率は

$$\{0\} \cup \left\{ \frac{\langle \alpha, \xi \rangle}{-\langle \alpha, w \rangle + m\pi} \;\middle|\; \alpha \in \Delta^+,\ \langle \alpha, w \rangle \notin \pi\mathbb{Z},\ m \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$\cup \left\{ \frac{\langle \alpha, \xi \rangle}{-\langle \alpha, w \rangle - \frac{1}{2}\pi + m\pi} \;\middle|\; \alpha \in \Delta^+,\ \langle \alpha, w \rangle + \frac{\pi}{2} \notin \pi\mathbb{Z},\ m \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$\cup \left\{ \frac{\langle \alpha, \xi \rangle}{n\pi} \;\middle|\; \alpha \in \Delta^+,\ \langle \alpha, w \rangle \in \pi\mathbb{Z},\ n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\} \right.$$

$$\left. \text{or}\quad \alpha \in \Delta^+,\ \langle \alpha, w \rangle + \frac{\pi}{2} \in \pi\mathbb{Z},\ n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\} \right\}.$$

重複度は順番に

$$\infty, \quad \dim(\mathfrak{m}_\alpha \cap \mathfrak{p}), \quad \dim(\mathfrak{m}_\alpha \cap \mathfrak{h}), \quad \dim(\mathfrak{m}_\alpha \cap \mathfrak{p}) + \dim(\mathfrak{m}_\alpha \cap \mathfrak{h})$$

Sec. 6 - 主結果 (4/6)

系 (Pinkall-Thorbergsson 1990)

対合が一致する（$\sigma = \tau$）と仮定.
このとき軌道 $P(G, K \times K) * \hat{w}$ の $\hat{\xi} \in \hat{\mathfrak{t}}$ 方向の主曲率は

$$\{0\} \cup \left\{ \frac{\langle \alpha, \xi \rangle}{-\langle \alpha, w \rangle + m\pi} \;\middle|\; \alpha \in \Delta^+,\ \langle \alpha, w \rangle \notin \pi\mathbb{Z},\ m \in \mathbb{Z} \right\}$$
$$\cup \left\{ \frac{\langle \alpha, \xi \rangle}{n\pi} \;\middle|\; \alpha \in \Delta^+,\ \langle \alpha, w \rangle \in \pi\mathbb{Z},\ n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\} \right\}.$$

重複度は順番に

$$\infty, \quad \dim \mathfrak{m}_\alpha, \quad \dim \mathfrak{m}_\alpha$$

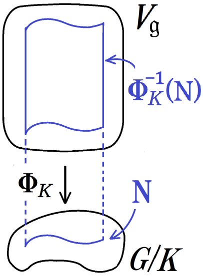
Sec. 6 - 主結果 (5/6)

問題

以下の 2 条件の関係？

(A) 軌道 $N = H \cdot (\exp w)K$ は
G/K のオースティア部分多様体,

(B) 軌道 $\Phi_K^{-1}(N) = P(G, H \times K) * \hat{w}$ は
$V_{\mathfrak{g}}$ のオースティア PF 部分多様体.



定理 I (M. 2021)

ルート系 $\Delta = \Delta(\sigma, \tau)$ が reduced と仮定． このとき (A) と (B) は同値.

定理 II (M. 2021)

(1) $\sigma = \tau$ と仮定. このとき (A) と (B) は同値.
(2) $\sigma \circ \tau = \tau \circ \sigma$ と仮定．このとき (A) ならば (B).
(3) G が単純と仮定． このとき (A) ならば (B).

Sec. 6 - 主結果 (6/6)

(2) と (3) の逆に対する反例 (M. 2021)

三対

$$(G, K, H) = (SU(p+q), S(U(p) \times U(q)), SO(p+q))$$

を考える．(ルート系 $\Delta = \{e_i, 2e_i\}_i \cup \{e_i \pm e_j\}_{i<j}$ は BC 型.)

$$w := \frac{\pi}{8}(e_1 + \cdots + e_q)$$

とおく．このとき $N = H \cdot (\exp w)K$ はオースティアでない．

しかし，$\Phi_K^{-1}(N) = P(G, H \times K) * \hat{w}$ はオースティアとなる．

例

- Hermann 作用のオースティア軌道は，井川氏，大野氏により分類済み (主に G が単純な場合．)
- 彼らの結果を上記定理に適応することで，$P(G, H \times K)$-作用のオースティア軌道の例を多数得る．
- これより，無限次元ヒルベルト空間内には，等質な無限次元オースティア部分多様体が多数存在することがわかる．

Sec. 7 - シグマ作用の場合への定式化 (1/11)

定義 (Conlon 1964)

G：連結コンパクト半単純リー群 with 両側不変計量，σ：G の自己同型．

$$G(\sigma) := \{(b, \sigma(b)) \mid b \in G\} \subset G \times G$$

等長作用 $G(\sigma) \curvearrowright G$, $(b, \sigma(b)) \cdot a := ba\sigma(b)^{-1}$ をシグマ作用という．

注意

シグマ作用は，Hermann 作用の特殊な場合と見做せる：

$$\begin{array}{ccccccc}
G(\sigma) & & \xrightarrow{\mathrm{id}} & & G(\sigma) & & \\
 & \curvearrowright & & & & \curvearrowright & \\
 & & G & \xrightarrow{\rho} & & & (G \times G)/\Delta G \\
 & & \rotatebox{90}{$\in$} & & & & \rotatebox{90}{$\in$} \\
 & & ab^{-1} & \longleftarrow\!\shortmid & & & (a, b)\Delta G
\end{array}$$

ここで，$G(\sigma)$ は $G \times G$ の対称部分群 with 対合 $(b, c) \mapsto (\sigma^{-1}(c), \sigma(b))$．
よって，シグマ作用 $G(\sigma) \curvearrowright G$ は超極である．

Sec. 7 - シグマ作用の場合への定式化 (2/11)

シグマ作用（超極）$G(\sigma) \curvearrowright G$ に対して，
超極作用 $P(G, G(\sigma)) \curvearrowright V_{\mathfrak{g}}$ がゲージ変換により定義される（Sec. 1）：

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{G} & \supset & P(G,G(\sigma)) & \curvearrowright & V_{\mathfrak{g}} & \supset & \Phi^{-1}(N) = P(G,G(\sigma)) * \hat{w} \\ \Psi \downarrow & & \Psi \downarrow & & \Phi \downarrow & & \Phi \downarrow \\ G \times G & \supset & G(\sigma) & \curvearrowright & G & \supset & N \ = \ G(\sigma) \cdot \exp w \end{array}$$

問題

(1) $P(G, G(\sigma))$ 軌道の主曲率？
(2) 次の 2 条件の関係？
- 軌道 $N = G(\sigma) \cdot \exp w$ は G のオースティア部分多様体，
- 軌道 $P(G, G(\sigma)) * \hat{w}$ は $V_{\mathfrak{g}}$ のオースティア部分多様体．

注意

- $G(\sigma)$-作用は，Hermann 作用の特殊な場合と見做せる（先述）．
- しかし，$P(G, G(\sigma))$-作用が $P(G, H \times K)$-作用の特殊な場合であることは自明でない（別紙）．

Sec. 7 - シグマ作用の場合への定式化 (3/11)

定義 (M. 2022)

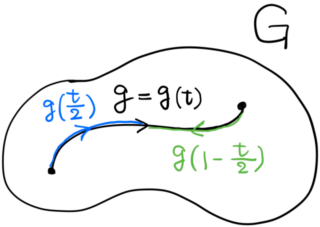
写像 $\Omega : \mathcal{G} = H^1([0,1], G) \to H^1([0,1], G \times G)$ を

$$\Omega(g) = (g(t/2), g(1-t/2)),$$

で定義．更に，写像 $\Upsilon : V_{\mathfrak{g}} \to V_{\mathfrak{g}\oplus\mathfrak{g}}$ を

$$\Upsilon(u) = \left(\tfrac{1}{2}u(t/2),\ -\tfrac{1}{2}u(1-t/2) \right).$$

で定義．Υ を $V_{\mathfrak{g}}$ から $V_{\mathfrak{g}\oplus\mathfrak{g}}$ への標準同型と呼ぶ.



命題 (M. 2022)

Υ は Ω を通して同変かつ，次の図式は可換：

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G} & \xrightarrow{\Omega} & H^1([0,1], G \times G) \\ {\scriptstyle \Psi^G}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p^{G\times G}\circ\Psi^{G\times G}} \\ G \times G & \xrightarrow{\mathrm{id}} & G \times G \end{array} \quad \text{and} \quad \begin{array}{ccc} V_{\mathfrak{g}} & \xrightarrow{\Upsilon} & V_{\mathfrak{g}\oplus\mathfrak{g}} \\ {\scriptstyle \Phi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \Phi_{\Delta G}} \\ G & \xrightarrow{\rho} & (G \times G)/\Delta G. \end{array}$$

$\Rightarrow$ 平行移動写像 Φ と $\Phi_{\Delta G}$ を同一視可能.

更に，作用 $P(G, U) \curvearrowright V_{\mathfrak{g}}$ と $P(G \times G, U \times \Delta G) \curvearrowright V_{\mathfrak{g}\oplus\mathfrak{g}}$ を同一視可能.

Sec. 7 - シグマ作用の場合への定式化 (4/11)

定理 (M. 2022)

G：連結コンパクト半単純リー群 with 両側不変計量．
N：G の curvature-adapted 部分多様体，$e \in G$ を通ると仮定．Fix $\xi \in T_e^\perp N$．

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 + \sum_{\nu>0} \mathfrak{g}_\nu, \qquad T_{eK}N = \sum_{\lambda} S_\lambda,$$

$$\mathfrak{g}_\nu = \{x \in \mathfrak{g} \mid \mathrm{ad}(\xi)^2 x = -\nu^2 x\}, \qquad S_\lambda = \{v \in T_{eK}N \mid A_\xi^N(v) = \lambda v\}.$$

このとき，$\Phi^{-1}(N)$ の $\hat{\xi}$ 方向主曲率は

$$\{0\} \cup \{\lambda\} \cup \left\{\frac{\nu}{2n\pi}\right\}_{\nu>0,\ n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \cup \left\{\frac{\nu}{2\arctan\frac{\nu}{2\lambda} + 2m\pi}\right\}_{\nu>0,\ \lambda,\ m\in\mathbb{Z}}.$$

と表せる．重複度は順に ∞，$\dim(\mathfrak{g}_0 \cap S_\lambda)$，$\dim(\mathfrak{g}_\nu \cap T_e^\perp N)$，$\dim(\mathfrak{g}_\nu \cap T_e N)$

系 (King-Terng 1993)

Φ のファイバー $\Phi^{-1}(e)$ の $\xi \in \mathfrak{g}$ 方向主曲率は

$$\{0\} \cup \left\{\frac{\nu}{2n\pi}\right\}_{\nu>0,\ n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}$$

で与えられる．重複度は順に ∞，$\dim \mathfrak{g}_\nu$．

Sec. 7 - シグマ作用の場合への定式化 (5/11)

$\mathfrak{g}^\sigma = \{x \in \mathfrak{g} \mid \sigma(x)\}$ の固定部分代数 $\mathfrak{t}$ を固定.
$\rightsquigarrow$ ルート系 $\Delta = \Delta(\sigma)$ が決まる. $\exp \mathfrak{t}$ は $G(\sigma)$ 作用のセクションとなる.

命題：シグマ作用の軌道の接空間・法空間・主曲率

$w \in \mathfrak{t}$ をとる. 軌道 $N := G(\sigma) \cdot \exp w$ の接空間, 法空間は

$$T_{\exp w} N = dl_{\exp w}\Big(\sum_{\substack{\epsilon \in U(1)_{\geq 0} \\ \epsilon \neq 1}} \mathfrak{g}_{0,\epsilon} + \sum_{\alpha \in \Delta^+} \sum_{\substack{\epsilon \in U(1) \\ \langle \alpha, w\rangle + \arg \epsilon \notin 2\pi\mathbb{Z}}} \mathfrak{g}_{\alpha,\epsilon} \Big),$$

$$T^\perp_{\exp w} N = dl_{\exp w}\Big(\mathfrak{t} + \sum_{\alpha \in \Delta^+} \sum_{\substack{\epsilon \in U(1) \\ \langle \alpha, w\rangle + \arg \epsilon \in 2\pi\mathbb{Z}}} \mathfrak{g}_{\alpha,\epsilon} \Big),$$

と表せる. ここで $\mathfrak{g}_{\alpha,\epsilon} := (\mathfrak{g}(\alpha) \cap \mathfrak{g}(\epsilon) + \mathfrak{g}(-\alpha) \cap \mathfrak{g}(\epsilon^{-1})) \cap \mathfrak{g}\ (\subset \mathfrak{g}_\alpha)$. 更に, 1 つ目の分解は, 形作用素の族 $\{A^N_{dL_{\exp w}(\xi)}\}_{\xi \in \mathfrak{t}}$ に関する同時固有空間分解である：

$$dl_{\exp w}(\mathfrak{m}_{0,\epsilon}) : \text{固有値 } 0 \text{ の固有空間},$$

$$dl_{\exp w}(\mathfrak{m}_{\alpha,\epsilon}) : \text{固有値 } -\langle \alpha, \xi\rangle \cot(\langle \alpha, w\rangle + \tfrac{1}{2}\arg \epsilon) \text{ の固有空間}.$$

ここで, $\mathfrak{g}(\alpha) := \{z \in \mathfrak{g}^{\mathbb{C}} \mid \forall \eta \in \mathfrak{t},\ \mathrm{ad}(\eta)(z) = \sqrt{-1}\langle \alpha, \eta\rangle z\}$ とおいた.

$$\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{g}(0) + \sum_{\alpha \in \Delta} \mathfrak{g}(\alpha)$$

Sec. 7 - シグマ作用の場合への定式化 (6/11)

定理 (M. 2022): $P(G, G(\sigma))$-軌道の主曲率

軌道 $P(G, G(\sigma)) * \hat{w}$ の $\hat{\xi} \in \hat{\mathfrak{t}}$ 方向主曲率は

$$\{0\} \cup \left\{ \frac{\langle \alpha, \xi \rangle}{-\langle \alpha, w \rangle - \arg \epsilon + 2m\pi} \;\middle|\; \begin{array}{l} \alpha \in \Delta^+,\ \epsilon \in U(1), \\ \langle \alpha, w \rangle + \arg \epsilon \notin 2\pi\mathbb{Z},\ m \in \mathbb{Z} \end{array} \right\}$$
$$\cup \left\{ \frac{\langle \alpha, \xi \rangle}{2n\pi} \;\middle|\; \begin{array}{l} \alpha \in \Delta^+,\ n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}, \\ \exists \epsilon \in U(1) \text{ s.t. } \langle \alpha, w \rangle + \arg \epsilon \in 2\pi\mathbb{Z} \end{array} \right\}$$

重複度は順番に

$$\infty, \quad \dim \mathfrak{g}_{\alpha,\epsilon}, \quad \sum_{\alpha} \dim \mathfrak{g}_{\alpha,\epsilon}$$

Sec. 7 - シグマ作用の場合への定式化 (7/11)

系

$\sigma^2 = \mathrm{id}$ と仮定．$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^+ \oplus \mathfrak{g}^-$：$\sigma$ の固有値 ± 1 による固有空間分解，
このとき軌道 $P(G, G(\sigma)) * \hat{w}$ の $\hat{\xi} \in \hat{\mathfrak{t}}$ 方向の主曲率は

$$\{0\} \cup \left\{ \frac{\langle \alpha, \xi \rangle}{-\langle \alpha, w \rangle + 2m\pi} \;\middle|\; \alpha \in \Delta^+,\ \langle \alpha, w \rangle \notin 2\pi\mathbb{Z},\ m \in \mathbb{Z} \right\}$$
$$\cup \left\{ \frac{\langle \alpha, \xi \rangle}{-\langle \alpha, w \rangle - \pi + 2m\pi} \;\middle|\; \alpha \in \Delta^+,\ \langle \alpha, w \rangle + \pi \notin 2\pi\mathbb{Z},\ m \in \mathbb{Z} \right\}$$
$$\cup \left\{ \frac{\langle \alpha, \xi \rangle}{2n\pi} \;\middle|\; \alpha \in \Delta^+,\ \langle \alpha, w \rangle \in 2\pi\mathbb{Z},\ n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\} \right.$$
$$\left. \text{or}\quad \alpha \in \Delta^+,\ \langle \alpha, w \rangle + \pi \in 2\pi\mathbb{Z},\ n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\} \right\}.$$

重複度は順番に

$$\infty, \quad \dim(\mathfrak{g}_\alpha \cap \mathfrak{g}^+), \quad \dim(\mathfrak{g}_\alpha \cap \mathfrak{g}^-), \quad \dim(\mathfrak{g}_\alpha \cap \mathfrak{g}^+) + \dim(\mathfrak{g}_\alpha \cap \mathfrak{g}^-)$$

Sec. 7 - シグマ作用の場合への定式化 (8/11)

系 (Terng 1989)

$\sigma = \mathrm{id}$ と仮定．このとき軌道 $P(G, \Delta G) * \hat{w}$ の $\hat{\xi} \in \hat{\mathfrak{t}}$ 方向の主曲率は

$$\{0\} \cup \left\{ \frac{\langle \alpha, \xi \rangle}{-\langle \alpha, w \rangle + 2m\pi} \;\middle|\; \alpha \in \Delta^+,\ \langle \alpha, w \rangle \notin 2\pi\mathbb{Z},\ m \in \mathbb{Z} \right\}$$
$$\cup \left\{ \frac{\langle \alpha, \xi \rangle}{2n\pi} \;\middle|\; \alpha \in \Delta^+,\ \langle \alpha, w \rangle \in 2\pi\mathbb{Z},\ n \in \mathbb{Z} \backslash \{0\} \right\}.$$

重複度は順番に

$$\infty, \quad \dim \mathfrak{g}_\alpha, \quad \dim \mathfrak{g}_\alpha$$

Sec. 7 - シグマ作用の場合への定式化 (9/11)

系（まとめ）

Path 空間の標準同型を通して，PF 部分多様体の主曲率に関する既存の結果を統一理解できる．

Φ_K のファイバー (M. 2020)	$\rightsquigarrow$	Φ のファイバー (King-Terng 1993)
$\Uparrow$		$\Uparrow$
PF 部分多様体 $\Phi_K^{-1}(N)$ (Koike 2002, M. 2020, 2021)	$\rightsquigarrow$	PF 部分多様体 $\Phi^{-1}(N)$ (M. 2022)
$\Downarrow$		$\Downarrow$
$P(G, H \times K)$-軌道 (Koike 2011, M. 2021)	$\rightsquigarrow$	$P(G, G(\sigma))$-軌道 (M. 2022)
$\Downarrow$		$\Downarrow$
$P(G, K \times K)$-軌道 (Pinkall-Thorbergsson 1990)	$\rightsquigarrow$	$P(G, \Delta G)$-軌道 (Terng 1989)

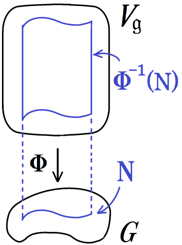
Sec. 7 - シグマ作用の場合への定式化 (10/11)

問題

以下の 2 条件の関係？

(a) $N = G(\sigma) \cdot \exp w$ は G のオースティア部分多様体，

(b) $\Phi^{-1}(N) = P(G, G(\sigma)) * \hat{w}$ は $V_{\mathfrak{g}}$ のオースティア PF 部分多様体．



定理 I' (M. 2022)

ルート系 $\Delta = \Delta(\sigma)$ が reduced と仮定． このとき (a) と (b) は同値．

定理 II'' (M. 2022)

(1) $\sigma = \mathrm{id}$ と仮定．このとき (a) と (b) は同値．
(2) $\sigma^2 = \mathrm{id}$ と仮定．このとき (a) ならば (b)． (Q. 逆は？)
(3) G が単純と仮定． このとき (a) ならば (b)． (Q. 逆は？)

- (3) は Hermann 作用の結果が直接適応できないので別途議論が必要．
- (2) と (3) において逆が成り立つかどうかは，自明でない（次頁）．

Sec. 7 - シグマ作用の場合への定式化 (11/11)

(2) と (3) の逆に対する反例 (M. 2022)

$(G, \sigma) = (SU(2m+1), \text{複素共役})$ とする．
$\Rightarrow$ ルート系 $\Delta = \{e_i, 2e_i\}_i \cup \{e_i \pm e_j\}_{i<j}$ は BC 型.
$w := \frac{\pi}{4}(e_1 + \cdots + e_m)$ とおく．
このとき $N = G(\sigma) \cdot (\exp w)K$ はオースティアでない．
しかし，$\Phi^{-1}(N) = P(G, G(\sigma)) * \hat{w}$ はオースティアである．
（この反例は，Hermann 作用の場合のものとは異なる．）

例

- シグマ作用のオースティア軌道は，$\sigma^2 = \mathrm{id}$ のとき，井川氏により分類済み．
- Cartan 埋め込み（$\Leftrightarrow$ $e \in G$ を通る $G(\sigma)$ 軌道）であってオースティア部分多様体となるものは木村氏-間下氏らにより分類済み．
- これらの結果を上記定理に適応することで，$P(G, G(\sigma))$-作用のオースティア軌道の例を多数得る．
- これより，無限次元ヒルベルト空間内には，等質な無限次元オースティア部分多様体が更に多く存在することがわかる．

Reference I

[1] C. Gorodski, G. Thorbergsson, *Variationally complete actions on compact symmetric spaces* J. Differential Geom. **62** (2002), no. 1, 39-48.

[2] O. Goertsches, G. Thorbergsson, *On the geometry of the orbits of Hermann actions*, Geom. Dedicata 129 (2007), 101–118.

[3] I. S. Gradshteyn, I. M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series, and Products*, Translated from the Russian. Translation edited and with a preface by Alan Jeffrey and Daniel Zwillinger. Seventh edition. Elsevier/Academic Press, Amsterdam, 2007.

[4] R. Harvey and H. B. Lawson, Jr., *Calibrated geometries*, Acta Math., **148** (1982), 47-157.

Reference II

[5] E. Heintze, R. Palais, C.-L. Terng, G. Thorbergsson, *Hyperpolar actions on symmetric spaces*, Geometry, topology, & physics, 214-245, Conf. Proc. Lecture Notes Geom. Topology, IV, Int. Press, Cambridge, MA, 1995.

[6] S. Helgason, *Differential Geometry, Lie groups, and Symmetric Spaces*, Corrected reprint of the 1978 original. Graduate Studies in Mathematics, **34**. American Mathematical Society, Providence, RI, 2001.

[7] O. Ikawa, T. Sakai, H. Tasaki, *Weakly reflective submanifolds and austere submanifolds*. J. Math. Soc. Japan **61** (2009), no. 2, 437-481.

[8] O. Ikawa, *The geometry of symmetric triad and orbit spaces of Hermann actions*, J. Math. Soc. Japan **63** (2011), no. 1, 79-136.

Reference III

[9] C. King, C.-L. Terng, *Minimal submanifolds in path space*, Global analysis in modern mathematics, 253-281, Publish or Perish, Houston, TX, 1993.

[10] N. Koike, *On proper Fredholm submanifolds in a Hilbert space arising from submanifolds in a symmetric space*, Japan. J. Math. (N.S.) **28** (2002), no. 1, 61-80.

[11] A. Kollross, *A classification of hyperpolar and cohomogeneity one actions*, Trans. Amer. Math. Soc. **354** (2002), no. 2, 571-612.

[12] O. Loos, *Symmetric Spaces. II: Compact Spaces and Classification*. W. A. Benjamin, Inc., New York-Amsterdam 1969.

[13] M. Morimoto, *On weakly reflective PF submanifolds in Hilbert spaces*, Tokyo J. Math. **44** (2021), no. 1, 103-124.

Reference IV

[14] M. Morimoto, *Austere and arid properties for PF submanifolds in Hilbert spaces*, Differential Geom. Appl., **69** (2020) 101613.

[15] M. Morimoto, *On weakly reflective submanifolds in compact isotropy irreducible Riemannian homogeneous spaces*, Tokyo J. Math. **44** (2021), no. 2, 467-476.

[16] M. Morimoto, *Curvatures and austere property of orbits of path group actions induced by Hermann actions*, arXiv:2105.12533

[17] M. Morimoto, *On the geometry of orbits of path group actions induced by sigma-actions*, arXiv:2201.01662.

[18] S. Ohno, *A sufficient condition for orbits of Hermann actions to be weakly reflective*, Tokyo J. Math. **39** (2016), no. 2, 537-564.

[19] R. S. Palais, *Morse theory on Hilbert manifolds*, Topology **2** (1963), 299-340.

Reference V

[20] R. S. Palais, C.-L. Terng, *Critical Point Theory and Submanifold Geometry*, Lecture Notes in Math., vol 1353, Springer-Verlag, Berlin and New York, 1988.

[21] U. Pinkall, G. Thorbergsson, *Examples of infinite dimensional isoparametric submanifolds*, Math. Z. **205** (1990), no. 2, 279-286.

[22] H. Tasaki, *Certain minimal or homologically volume minimizing submanifolds in compact symmetric spaces* Tsukuba J. Math. 9 (1985), no. 1, 117-131.

[23] C.-L. Terng, *Proper Fredholm submanifolds of Hilbert space.* J. Differential Geom. **29** (1989), no. 1, 9-47.

[24] C.-L. Terng, *Polar actions on Hilbert space*. J. Geom. Anal. **5** (1995), no. 1, 129-150.

Reference VI

[25] C.-L. Terng, G. Thorbergsson, *Submanifold geometry in symmetric spaces.* J. Differential Geom. **42** (1995), no. 3, 665-718.

Thank you very much for your attention !