2022年3月20日

光錐，共形平坦多様体および等径超曲面

部分多様体幾何とリー群作用2021

工学院大学 学習支援センター

佐藤 雄一郎

共形平坦な等質Riemann多様体 [高木 '75]

Riemann空間形

$$\mathbb{E}^m,\ \mathbb{S}^m(r),\ \mathbb{H}^m(r)$$

Riemann直積多様体

$$\mathbb{S}^k(r) \times \mathbb{H}^{m-k}(r),\ \mathbb{S}^{m-1}(r) \times \mathbb{E}^1,\ \mathbb{H}^{m-1}(r) \times \mathbb{E}^1$$

双曲空間内の等径超曲面 [E. Cartan '38]

ホロ球面，距離超球面，全測地的超曲面とその等距離超曲面

$$\mathbb{E}^m,\ \mathbb{S}^m(r),\ \mathbb{H}^m(r)$$

全測地的部分多様体の管状超曲面

$$\mathbb{S}^k(\sqrt{r^2+1}) \times \mathbb{H}^{m-k}(r),\ \mathbb{S}^{m-1}(\sqrt{r^2+1}) \times \mathbb{E}^1,\ \mathbb{H}^{m-1}(\sqrt{r^2-1}) \times \mathbb{E}^1$$

概要

Ricci 作用素の固有値がすべて定数である共形平坦多様体(内的幾何学)

と

双曲空間内の等径超曲面(外的幾何学)

を

光錐(擬 Riemann 幾何学)を経て結びつける.

内容

1. 準備 (光錐内の超曲面)
2. $\overline{f}$, $f_{\pm}$ について (超曲面は四度楽め)
3. 主結果 (等径超曲面と共形平坦多様体)
4. 応用 (擬球面内の等径超曲面)
5. 課題 (形作用素が対角化不可能な等径超曲面)

1. 準備

指数pのm次元擬Euclid空間を

$$\mathbb{E}^m_p := \left(\mathbb{R}^m, \langle \cdot, \cdot \rangle_p := -\sum_{i=1}^{p} dx_i^2 + \sum_{j=p+1}^{m} dx_j^2 \right)$$

で定める．すなわち，$\mathbb{R}^m$の2つのベクトル$x=(x_1,\ldots,x_m)$, $y=(y_1,\cdots,y_m)$に対し，不定値内積

$$\langle x, y \rangle_p = -x_1y_1 - \cdots - x_py_p + x_{p+1}y_{p+1} + \cdots + x_my_m$$

を導入した空間のことであり，断面曲率は一定で0である(平坦)．

注意

$p=0$のとき，単にEuclid空間$\mathbb{E}^m$に他ならない.
$\langle \cdot, \cdot \rangle_p$を単に$\langle \cdot, \cdot \rangle$と書くこともある．

指数pのm次元擬球面，擬双曲空間をそれぞれ正数$r > 0$に対し，

$$\mathbb{S}^m_p(r) := \left\{x \in \mathbb{E}^{m+1}_p \mid \langle x, x\rangle_p = r^2\right\},$$
$$\mathbb{H}^m_p(r) := \left\{x \in \mathbb{E}^{m+1}_{p+1} \mid \langle x, x\rangle_{p+1} = -r^2\right\}$$

で定義する．それぞれ断面曲率は一定でr^{-2}, $-r^{-2}$となる．

注意

$p = 0$のとき，単にそれぞれ球面$\mathbb{S}^m(r)$，双曲空間$\mathbb{H}^m(r)$に他ならない.

$r = 1$のとき，単にそれぞれ $\mathbb{S}^m_p = \mathbb{S}^m_p(1)$, $\mathbb{H}^m_p = \mathbb{H}^m_p(1)$と表す．

一般に，(M^m, g)を指数pのm次元擬Riemann多様体とするとき，
単に，M^m_pと表すことにもする．

例　M^m_0 : Riemann多様体，　M^m_1 : Lorentz多様体．

$M_p^m = (M^m, g)$: 擬Riemann多様体 ($m \geq 3$).

M_p^m : **共形平坦** $:\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$
$\forall\, x \in M^m$, $\exists\, (U; x_1, \ldots, x_m)$: 座標近傍 at x, $\exists\, \rho \in C^\infty(U)$;

$$g|_U = \rho^2 \left(-dx_1^2 - \cdots - dx_p^2 + dx_{p+1}^2 + \cdots + dx_m^2 \right)$$

が成立することで，次とも同値.

$$\begin{aligned} W(X,Y)Z := R(X,Y)Z - L(Y,Z)X + L(X,Z)Y \\ + g(Y,Z)Q(X) - g(X,Z)Q(Y) = 0 \ (m \geq 4), \end{aligned}$$
$$C(X,Y,Z) := (\nabla_X L)(Y,Z) - (\nabla_Y L)(X,Z) = 0 \ (m = 3).$$

ここで

$$L(X,Y) := \frac{1}{m-2} \left(\mathrm{Ric}(X,Y) - \frac{S}{2(m-1)} g(X,Y) \right).$$

指数 p の m 次元光錐を次で定義する．

$$\Lambda_p^m := \left\{x \in \mathbb{E}_{p+1}^{m+1} \setminus \{0\} \mid \langle x, x\rangle_{p+1} = 0\right\}.$$

光錐 Λ_p^m は，擬 Riemann 空間形 $\mathbb{E}_p^m, \mathbb{S}_p^m(r), \mathbb{H}_p^m(r)$ と密接な関係を持ち，退化した空間形と呼ぶべきものである．

次は，光錐内の超曲面を研究する動機付けとなる結果．

定理1 [Asperti–Dajczer '89]

M_p^m : 単連結擬 Riemann 多様体 $(m \geq 3)$．
M_p^m : 共形平坦 $\Longleftrightarrow \exists\ f : M_p^m \to \Lambda_p^{m+1}$: 等長はめ込み．

"共形平坦な擬 Riemann 多様体の研究"
$\updownarrow$ (局所的には) 等価
"光錐内の超曲面の研究"

光錐内の超曲面に対する基本方程式

$M_p^m = (M^m, g)$：擬 Riemann 多様体 $(m \geq 3)$．
$f : M_p^m \to \Lambda_p^{m+1} \subset \mathbb{E}_{p+1}^{m+2}$：等長はめ込み．
このとき，M^m の法束の切断 $\overline{f} : M \to T^{\perp}M$ が存在して，

$$\langle f, f \rangle = \langle \overline{f}, \overline{f} \rangle = 0,\ \langle f, \overline{f} \rangle = 1$$

が成立する．
また，f の Gauss の公式と Weingarten の公式は

$$D_X Y = \nabla_X Y + h(X,Y)f - g(X,Y)\overline{f} \quad \text{(Gauss)},$$
$$D_X f = X, \quad D_X \overline{f} = -A(X) \quad \text{(Weingarten)}.$$

h：f の第二基本形式，A：f の形作用素．

$H := \dfrac{1}{m}\mathrm{tr}A$：$f$ の平均曲率．

命題1 [本田–塚田 ‘04]

$f : M^m_p \to \Lambda^{m+1}_p \subset \mathbb{E}^{m+2}_{p+1}$: 等長はめ込み．
このとき，次が成立する．

$$R = -h \bigcirc\!\!\!\!\wedge\, g \quad \text{(Gauss eq.)},$$
$$(\nabla_X h)(Y,Z) = (\nabla_Y h)(X,Z) \quad \text{(Codazzi eq.)},$$

ここで，R は M^m_p の $(0,4)$ 型Riemann曲率テンソル場，
$\bigcirc\!\!\!\!\wedge$ はKulkarni–Nomizu積を表す．
すなわち，任意の $X, Y, Z, W \in \Gamma(TM)$ に対し，

$$\begin{aligned}(h \bigcirc\!\!\!\!\wedge\, g)(X,Y,Z,W) &= \begin{vmatrix} h(X,Z) & h(X,W) \\ g(Y,Z) & g(Y,W) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} g(X,Z) & g(X,W) \\ h(Y,Z) & h(Y,W) \end{vmatrix} \\ &= h(X,Z)g(Y,W) - h(Y,Z)g(X,W) \\ &\quad + h(Y,W)g(X,Z) - h(X,W)g(Y,Z).\end{aligned}$$

系1 [本田–塚田 '04]

$$\mathrm{Ric}(X,Y) = -(m-2)h(X,Y) - mHg(X,Y),$$
$$S = -2m(m-1)H.$$

特に，次が成立する．

$$h(X,Y) = g(A(X),Y), \quad A(X) = -L(X).$$

ここで，L は M_p^m の Schouten 作用素である．
すなわち，ベクトル場 $X \in \Gamma(TM)$ に対し，

$$L(X) := \frac{1}{m-2}\left(Q(X) - \frac{S}{2(m-1)}X\right).$$

ここで，Q は M_p^m の Ricci 作用素．

注意

- $m \geq 3$においては，第二基本形式は，内在的であることを意味する．
  $\rightsquigarrow$ 第二基本形式hはM_p^mのSchoutenテンソルそのもの．

- 2次元の場合は状況が特殊である．
断面曲率$=$平均曲率だが，第二基本形式が内在的でない．
  $\rightsquigarrow$ 泉屋(‘09)，Liu–梅原–山田(‘11)の研究．

- Gauss, Codazziの方程式より，定理1の十分性が分かる．
必要性は，擬Euclid空間内の部分多様体論の基本定理を用いる．
  $\rightsquigarrow$ Ricciの方程式は自明に成立している．

- 等長はめ込み$f : M_p^m \to \Lambda_p^{m+1} \subset \mathbb{E}_{p+1}^{m+2}$は剛性を持つ．
  $\rightsquigarrow$ M_p^mの内在的量で基本方程式が記述される為．

- $\exists$ 等長はめ込み$f : M_p^m \to \Lambda_p^{m+1} \Longrightarrow M^m$は向き付け可能．
  $\rightsquigarrow$ M^mの第一Stiefel–Whitney類が消える．

2. $\bar{f}$, $f_{\pm}$について

この節では，特に断らない限り，擬球面内の超曲面を考えることにする．

M^m : 向き付けられたm次元多様体 $(m \geq 3)$.
$f : M^m_p = (M^m, g) \to \mathbb{S}^{m+1}_{p+1}$: 等長はめ込み.
N : M^m上の大域的な時間的単位法ベクトル場.

このとき，一意的に滑らかな写像

$$\overline{f} : M^m \ni x \mapsto N_x \in \mathbb{H}^{m+1}_p$$

が存在して，M^m上で$\langle f, \overline{f} \rangle = 0$を満たす.

補題1

$\overline{f}$: はめ込み $\iff \det A \neq 0.$

ここで，Aは等長はめ込み$f : M^m_p \to \mathbb{S}^{m+1}_{p+1}$の形作用素.

f と $\overline{f}$ を用いて，次を定義する．

$$f_+ : M^m \ni x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}}(f(x) + \overline{f}(x)) \in \Lambda_p^{m+1},$$
$$f_- : M^m \ni x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}}(f(x) - \overline{f}(x)) \in \Lambda_p^{m+1}.$$

更に，M^m 上で $\langle f_+, f_- \rangle = 1$ を満たす．

補題2

$f_\pm$: はめ込み $\iff \det(Id \mp A) \neq 0.$ (複号同順)

ここで，A は等長はめ込み $f : M_p^m \to \mathbb{S}_{p+1}^{m+1}$ の形作用素．

注意

$\overline{f}, f_+, f_-$ の各種ははめ込みであれば，その誘導計量は非退化で指数 p．

3. 主結果

$f : M_p^m \to \mathbb{S}_{p+1}^{m+1}, \mathbb{H}_p^{m+1}$ or Λ_p^{m+1} : 等長はめ込み．
A : f の形作用素 A.

f : **等径** $:\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ A の固有多項式は M^m の点に依らず不変．

注意

普通，Riemann 幾何では等径超曲面の定義として，
主曲率一定超曲面を採用する場合が多い．

一方，擬 Riemann 幾何では形作用素が対角化不可能な場合や
複素数主曲率を持つ場合など主曲率の扱いが困難な場合がある．

注意

外空間が光錐の場合，A は Schouten 作用素に一致していた．
A の固有値がすべて定数 $\Longleftrightarrow$ Q の固有値がすべて定数．

定理2 [Anciaux '11, S.]

$f : M^m_p \to \mathbb{S}^{m+1}_{p+1}$: 等長はめ込み.
$\det A = K \neq 0$のとき,

(1) f : 等径 (in $\mathbb{S}^{m+1}_{p+1}$) $\Longrightarrow \overline{f}$: 等径 (in $\mathbb{H}^{m+1}_p$).
更に，相異なる主曲率の個数も保つ.

また，以下複号同順とし，$\det(Id \mp A) \neq 0$のとき,

(2) f : 等径 (in $\mathbb{S}^{m+1}_{p+1}$) $\Longrightarrow f_\pm$: 等径 (in Λ^{m+1}_p).
更に，相異なる主曲率の個数も保つ.

この結果を用いて,
Ricci作用素の固有値がすべて定数である共形平坦多様体の分類から,
擬球面$\mathbb{S}^{m+1}_{p+1}$内の等径超曲面の分類を与える.

4. 応用

定理3 [本田–塚田 '07]

M_p^m : 共形平坦等質擬Riemann多様体.
Schouten作用素が対角化可能ならば，M_p^mは擬Riemann空間形

$$\mathbb{E}_p^m, \ \mathbb{S}_p^m(r), \ \mathbb{H}_p^m(r)$$

または，擬Riemann直積多様体

$$\mathbb{S}_s^k(r) \times \mathbb{H}_{p-s}^{m-k}(r), \ \mathbb{S}_p^{m-1}(r) \times \mathbb{E}^1, \ \mathbb{H}_p^{m-1}(r) \times \mathbb{E}^1,$$
$$\mathbb{S}_{p-1}^{m-1}(r) \times \mathbb{E}_1^1, \ \mathbb{H}_{p-1}^{m-1}(r) \times \mathbb{E}_1^1$$

のいずれかに局所等長同型である.

注意

Schouten作用素の固有値が全て定数であれば，同様の結果を得る.

命題2 [S.]

$f: M_p^m \to \Lambda_p^{m+1}$: 等径等長はめ込み.
f の形作用素 A が対角化可能ならば，f は次のいずれかと局所的に合同 :

(1) $\mathbb{E}_p^m \to \Lambda_p^{m+1}$; $x \mapsto \left(\langle x, x\rangle_p + \frac{1}{4}, x, \langle x, x\rangle_p - \frac{1}{4}\right)$,

(2) $\mathbb{S}_p^m(r) \to \Lambda_p^{m+1}$; $x \mapsto (r, x)$,

(3) $\mathbb{H}_p^m(r) \to \Lambda_p^{m+1}$; $x \mapsto (x, r)$,

(4) $\mathbb{S}_s^k(r) \times \mathbb{H}_{p-s}^{m-k}(r) \to \Lambda_p^{m+1}$; $(x, y) \mapsto (x, y)$ (inclusion),

(5) $\mathbb{S}_p^{m-1}(r) \times \mathbb{E}^1 \to \Lambda_p^{m+1}$; $(x, t) \mapsto \left(r\cosh\left(\frac{t}{r}\right), x, r\sinh\left(\frac{t}{r}\right)\right)$,

(6) $\mathbb{H}_p^{m-1}(r) \times \mathbb{E}^1 \to \Lambda_p^{m+1}$; $(x, t) \mapsto \left(x, r\cos\left(\frac{t}{r}\right), r\sin\left(\frac{t}{r}\right)\right)$,

(7) $\mathbb{S}_{p-1}^{m-1}(r) \times \mathbb{E}_1^1 \to \Lambda_p^{m+1}$; $(x, t) \mapsto \left(r\cos\left(\frac{t}{r}\right), r\sin\left(\frac{t}{r}\right), x\right)$,

(8) $\mathbb{H}_{p-1}^{m-1}(r) \times \mathbb{E}_1^1 \to \Lambda_p^{m+1}$; $(x, t) \mapsto \left(r\sinh\left(\frac{t}{r}\right), x, r\cosh\left(\frac{t}{r}\right)\right)$.

系2 [安部–小池–山口 '87, S.]

$f : M^m_p \to \mathbb{S}^{m+1}_{p+1}$: 等径等長はめ込み.
f の形作用素 A が対角化可能ならば，f は次のいずれかと局所的に合同 :

(1) $\mathbb{E}^m_p \to \mathbb{S}^{m+1}_{p+1}\ ; x \mapsto \left(\langle x, x\rangle_p - \frac{3}{4}, x, \langle x, x\rangle_p - \frac{5}{4}\right)$,

(2) $\mathbb{S}^m_p(r) \to \mathbb{S}^{m+1}_{p+1}\ ;\ x \mapsto \left(\sqrt{r^2-1}, x\right)$,

(3) $\mathbb{H}^m_p(r) \to \mathbb{S}^{m+1}_{p+1}\ ;\ x \mapsto \left(x, \sqrt{1+r^2}\right)$,

(4) $\mathbb{S}^k_s\left(\sqrt{1+r^2}\right) \times \mathbb{H}^{m-k}_{p-s}(r) \to \mathbb{S}^{m+1}_{p+1}\ ;\ (x, y) \mapsto (x, y)$ (inclusion),

(5) $\mathbb{S}^{m-1}_p\left(\sqrt{1+r^2}\right) \times \mathbb{E}^1 \to \mathbb{S}^{m+1}_{p+1}\ ;\ (x, t) \mapsto \left(r\cosh\left(\frac{t}{r}\right), x, r\sinh\left(\frac{t}{r}\right)\right)$,

(6) $\mathbb{H}^{m-1}_p\left(\sqrt{r^2-1}\right) \times \mathbb{E}^1 \to \mathbb{S}^{m+1}_{p+1}\ ;\ (x, t) \mapsto \left(x, r\cos\left(\frac{t}{r}\right), r\sin\left(\frac{t}{r}\right)\right)$,

(7) $\mathbb{S}^{m-1}_{p-1}\left(\sqrt{1+r^2}\right) \times \mathbb{E}^1_1 \to \mathbb{S}^{m+1}_{p+1}\ ;\ (x, t) \mapsto \left(r\cos\left(\frac{t}{r}\right), r\sin\left(\frac{t}{r}\right), x\right)$,

(8) $\mathbb{H}^{m-1}_{p-1}\left(\sqrt{r^2-1}\right) \times \mathbb{E}^1_1 \to \mathbb{S}^{m+1}_{p+1}\ ;\ (x, t) \mapsto \left(r\sinh\left(\frac{t}{r}\right), x, r\cosh\left(\frac{t}{r}\right)\right)$.

系2の証明の概略

仮定：等長はめ込み $f : M_p^m \to \mathbb{S}_{p+1}^{m+1}$ は等径．

$\rightsquigarrow$ $f_+ : M^m \to \Lambda_p^{m+1}$ による誘導計量で，
共形平坦となり，さらに f_+ は等径である．

$\rightsquigarrow$ 定理5より，f_+ は分類済み．

$\rightsquigarrow$ f_+ から f_- を計算する．

$$f_- = \frac{1}{m}\Delta f_+ - \frac{S}{2m(m-1)} f_+.$$

$\rightsquigarrow$ f_+, f_- の具体的表示から，f を復元する．

以上により，共径平坦擬Riemann多様体の分類から，
擬球面内の等径超曲面の分類が具体的な表示で以ってして得られる．

5. 課題

(A) : 共形平坦等質擬 Riemann 多様体.

v.s

(B) : 擬球面内の等径超曲面.

Schouten 作用素 (A)，形作用素 (B) が対角化不可能な場合，分類は困難.
しかしながら，Lorentz 多様体 ($p = 1$) の場合に研究有.

(A) ⇝ 本田–塚田 '13 (分類未完?). (B) ⇝ Xiao '99 (分類完了).

Lorentz 多様体 M_1^m 上で定まる作用素は,

(Type I), (Type II), (Type III), (Type IV)

$\uparrow$ 対角化可能 $\nwarrow \uparrow \nearrow$ 対角化不可能

に分かれる.

(Case III)

A : (Case III) のSchouten作用素．
このとき，適切な(正規直交ではない)基底を選択すると

$$A \sim \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & & & & & \\ 0 & \lambda & 1 & & & & & \\ 1 & 0 & \lambda & & & & & \\ & & & \ddots & & & & \\ & & & & \lambda & & & \\ & & & & & -\lambda & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & -\lambda \end{bmatrix}$$

と表示可能．ただし，

$$\lambda < 0, \quad \dim T_\lambda \geq \dim T_{-\lambda} + 2.$$

A：(Case III)のSchouten作用素．

$f_\pm$：はめ込み $\Longleftrightarrow \det(Id \mp A) \neq 0 \Longleftrightarrow \lambda \neq -1.$

課題1

$\lambda = -1$である共形平坦等質Lorentz多様体を分類せよ．

課題2

等質でない等径共形平坦Lorentz多様体は存在するか．

(単連結)共径平坦擬Riemann多様体が等径とは，
光錐への等長はめ込みが等径であることをいう．

A : (Case III) のSchouten作用素.

$f_{\pm}$: はめ込み $\Longleftrightarrow \det(Id \mp A) \neq 0 \Longleftrightarrow \lambda \neq -1.$

課題1

$\lambda = -1$ である共形平坦等質Lorentz多様体を分類せよ.

課題2

等質でない等径共形平坦Lorentz多様体は存在するか.

(単連結)共径平坦擬Riemann多様体が等径とは,
光錐への等長はめ込みが等径であることをいう.

Thank you for your attention!!