

非連結コンパクト Lie 群の極地 とコンパクト対称空間の極大対蹠集合

田崎博之
(筑波大学)

田中真紀子さんとの共同研究

部分多様体幾何とリー群作用 2021

2022年3月21日

定義 (Chen-Nagano 1988)

M : コンパクト Riemann 対称空間

s_x : $x \in M$ における点対称

$S \subset M$: 対蹠集合

$\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ 任意の $x, y \in S$ について $s_x(y) = y$

$\#_2 M = \max\{|A| \mid A : \text{対蹠集合} \subset M\}$

A : 大対蹠集合 $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} |A| = \#_2 M$

A : 極大対蹠集合

$\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} A$: 包含関係に関して極大な対蹠集合

大対蹠集合 \Rightarrow 極大対蹠集合

集合 X 、写像 $f : X \rightarrow X$ に対して

$$F(f, X) = \{x \in X \mid f(x) = x\}$$

$o \in M$, $F(s_o, M)$ の各連結成分：極地

一点から成る極地：極

極地：全測地的部分多様体（対称空間）

対称 R 空間の大対蹠集合とトポロジーの関連性
には成果があるが、一般のコンパクト対称空間
の極大対蹠集合には情報があまりなかった

極地：イソトロピー部分群の軌道

極地に関する情報 > 対蹠集合に関する情報

極地を利用して対蹠集合を研究する

対称 R 空間の大対蹠集合の例

$$x \in S^n(r) \quad F(s_x, S^n(r)) = \{\pm x\}$$

$\{\pm x\} : S^n(r)$ の大対蹠集合

$\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}, x \in P^n(\mathbb{K}) : \text{射影空間}$

$$F(s_x, P^n(\mathbb{K})) = \{x\} \cup P^{n-1}(\mathbb{K})$$

$e_1, \dots, e_{n+1} : \mathbb{K}^{n+1}$ の正規直交 \mathbb{K} 基底

$\{\mathbb{K}e_1, \dots, \mathbb{K}e_{n+1}\} : P^n(\mathbb{K})$ の大対蹠集合

一般に対称 R 空間 M の $\#_2 M$ は M の \mathbb{Z}_2 係数の Betti 数の総和に一致する

コンパクト Lie 群の場合

両側不変 Riemann 計量 \rightarrow 対称空間

単位連結成分では

点対称 $s_x(y) = xy^{-1}x$: 代数的記述

単位連結成分以外への作用も拡大可能

コンパクト Lie 群を対称空間として考えることにより、その代数的構造を幾何学的観点から調べることができる。

G : コンパクト Lie 群、 e : 単位元

A : e を含む極大対蹠集合

$\Rightarrow A$: 可換部分群

e 以外の A の各元の位数は 2

可換有限群の基本定理 (巡回群の積) より

$$A \cong \mathbb{Z}_2 \times \cdots \times \mathbb{Z}_2$$

2 を一般の素数 p に変えた部分群の研究

: Borel-Serre 1953

$p = 2$ の場合に限って対称空間に一般化

: Chen-Nagano 1988 対蹠集合の誕生

古典型コンパクト対称空間の

極大対蹠集合の分類の方針

古典型コンパクト Lie 群

分類結果の具体的記述に後で言及

古典型コンパクト Lie 群内に極地

として実現できるもの

古典型コンパクト Lie 群の極大対蹠部分群

の分類を利用して、それらとの共通部分と

して極大対蹠集合を記述

ほとんどの場合に上記の方針を適用できる

極大対蹠集合の分類結果を記述するための記号

Δ_n : 対角線に ± 1 が並ぶ対角行列 $\subset O(n)$.

$$I_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad J_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad K_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$D[4] = \{\pm 1_2, \pm I_1, \pm J_1, \pm K_1\}$: 二面体群

$D[4]$ は対蹠的ではないが $D[4]/\{\pm 1_2\}$ は対蹠的
自然数 n を $n = 2^k \cdot l$ と 2 の冪と奇数 l の積に分解する。

$0 \leq s \leq k$ に対して

$$D(s, n) := \{d_1 \otimes \cdots \otimes d_s \otimes d_0 \mid \\ d_i \in D[4] (1 \leq i \leq s), d_0 \in \Delta_{n/2^s}\}.$$

$D(s, n)$ は対蹠的ではないが $D(s, n)/\{\pm 1_n\}$ は対蹠的

たとえば

$$J_1 \otimes d_0 = \begin{bmatrix} 0 & -d_0 \\ d_0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$I_1 \otimes K_1 \otimes d_0 = \begin{bmatrix} 0 & -d_0 & 0 & 0 \\ -d_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_0 \\ 0 & 0 & d_0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$d \in D(s, n)$ は $d^2 = \pm 1_n$ を満たす。

$$PD(s, n) = \{d \in D(s, n) \mid d^2 = 1_n\},$$

$$ND(s, n) = \{d \in D(s, n) \mid d^2 = -1_n\}$$

ユニタリ群に関連したコンパクト対称空間 の極大対蹠集合の分類結果

定理 $U(n)$ の極大対蹠部分群は Δ_n に共役

μ : 自然数 $\pi_n : U(n) \rightarrow U(n)/\mathbb{Z}_\mu$: 自然な射影

θ : 1 の原始 2μ 乗根

n を $n = 2^k \cdot l$ と 2 の冪と奇数 l の積に分解

定理 $U(n)/\mathbb{Z}_\mu$ の極大対蹠部分群は次のいずれかに共役

(1) n または μ が奇数のとき、 $\pi_n(\{1, \theta\}\Delta_n)$.

(2) n と μ がともに偶数のとき、

$$\pi_n(\{1, \theta\}D(s, n)) \quad (0 \leq s \leq k),$$

ただし、 $(s, n) = (k - 1, 2^k)$ の場合は除外.

G : コンパクト Lie 群

M : G の極地

$\{B_i\}$: G の極大対蹠部分群の分類結果

$\Rightarrow \{M \cap B_i\}$: M の極大対蹠集合
の分類結果の候補

各 $M \cap B_i$ が M の極大対蹠集合か
どうか確認

$$1 \leq k \leq n - 1$$

$G_k(\mathbb{C}^n)$: \mathbb{C}^n 内の k 次元複素部分空間全体

$G_k(\mathbb{C}^n) \ni V \mapsto 1_V - 1_{V^\perp} \in U(n)$: 像は極地

定理 $G_k(\mathbb{C}^n)$ の極大対蹠集合は

$$G_k(\mathbb{C}^n) \cap \Delta_n$$

$$= \{ \langle e_{i_1}, \dots, e_{i_k} \rangle \mid 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n \}$$

に合同.

ただし、 e_1, \dots, e_n は \mathbb{C}^n の標準的ユニタリ基底.

$U(2m)^* = U(2m)/\{\pm 1_{2m}\}$ 内で

$G_m(\mathbb{C}^{2m})^* = G_m(\mathbb{C}^{2m})/\{\pm 1_{2m}\}$ は極地

$U(2m)^*$ の極大対蹠部分群の分類を利用

定理 商空間 $G_m(\mathbb{C}^{2m})^*$ の極大対蹠集合は次のいずれかに $U(2m)^*$ 合同

$$\begin{aligned} & \pi_{2m}(\{d_1 \otimes \cdots \otimes d_s \otimes d_0 \in PD(s, 2m) \mid \\ & \quad \exists d_i (0 \leq i \leq s) \operatorname{Tr} d_i = 0\} \\ & \quad \cup \sqrt{-1}ND(s, 2m)) \quad (0 \leq s \leq k), \end{aligned}$$

ただし、 $(s, 2m) = (k - 1, 2^k)$ の場合は除外、 $m = 2$ のときは $\pi_4(\{d_0 \in PD(0, 4) \mid \operatorname{Tr} d_0 = 0\})$ も除外.

$U(n)$ の対合的自己同型写像 σ_I :

$$\sigma_I(g) = \bar{g} \quad (g \in U(n))$$

$$UI(n) = \{g \in U(n) \mid \sigma_I(g) = g^{-1}\} \cong U(n)/O(n)$$

これは連結コンパクト Lie 群の極地として実現できない
擦れた共役作用 $\rho_{\sigma_I}(g)x = gx\sigma_I(g)^{-1}$ の軌道

$$UI(n) = \rho_{\sigma_I}(U(n))1_n$$

共役軌道ではないので、極大対蹠部分群の共役類の分類
結果を利用しにくい \Rightarrow 半直積を利用する

半直積 $U(n) \rtimes \langle \sigma_I \rangle$: 積 $U(n) \times \langle \sigma_I \rangle$ に

$(g, \sigma_I)(h, x) = (g\sigma_I(h), \sigma_I x)$ を満たす演算を導入

半直積 $U(n) \rtimes \langle \sigma_I \rangle = (U(n), 1) \cup (U(n), \sigma_I)$

: 連結成分への分解

$\hat{e} : U(n) \rtimes \langle \sigma_I \rangle$ の単位元

$$F(s_{\hat{e}}, U(n) \rtimes \langle \sigma_I \rangle) = \bigcup_{0 \leq r \leq n} (G_r(\mathbb{C}^n), 1) \cup (UI(n), \sigma_I)$$

$$(x, \sigma_I)^2 = (x, \sigma_I)(x, \sigma_I) = (x\sigma_I(x), 1) \text{ より}$$

$$(x, \sigma_I) \in F(s_{\hat{e}}, U(n) \rtimes \langle \sigma_I \rangle) \Leftrightarrow \sigma_I(x) = x^{-1}$$

半直積における共役作用には扱われた共役作用が現れる。

$$\begin{aligned} (g, 1)(x, \sigma_I)(g, 1)^{-1} &= (gx, \sigma_I)(g^{-1}, 1) \\ &= (gx\sigma_I(g^{-1}), \sigma_I) = (\rho_{\sigma_I}(g)x, \sigma_I) \end{aligned}$$

定理 $U(n) \rtimes \langle \sigma_I \rangle$ の極大対蹠部分群は $\Delta_n \rtimes \langle \sigma_I \rangle$ に共役

定理 $UI(n)$ の極大対蹠集合は Δ_n に合同

G : コンパクト Lie 群、 G_0 : G の単位連結成分

T_0 : G_0 の極大トーラス $G_0 = \bigcup_{g \in G_0} gT_0g^{-1}$

$\tau \in G$ $I_\tau(g) = \tau g \tau^{-1}$: G の自己同型写像

T_τ : $F(\tau, G_0)$ の極大トーラス

τ を含む連結成分 $G_0\tau = \bigcup_{g \in G_0} g(T_\tau\tau)g^{-1}$

Hermann 作用の応用例

これにより、 G の各連結成分における極地を求められる

簡単な例 : $O(2) = SO(2) \cup \bigcup_{g \in SO(2)} g \begin{bmatrix} 1 & \\ & -1 \end{bmatrix} g^{-1}$

回転と線対称変換

μ : 自然数 $\pi_n : U(n) \rtimes \langle \sigma_I \rangle \rightarrow U(n) \rtimes \langle \sigma_I \rangle / \mathbb{Z}_\mu$

θ : 1 の原始 2μ 乗根

n を $n = 2^k \cdot l$ と 2 の冪と奇数の積に分解

定理 $U(n) \rtimes \langle \sigma_I \rangle / \mathbb{Z}_\mu$ の極大対蹠部分群は次のいずれかに共役

(1) μ が奇数のとき、 $\pi_n(\Delta_n \rtimes \langle \sigma_I \rangle)$.

(2) μ が偶数のとき、 $\pi_n(\{1, \theta\} D(s, n) \rtimes \langle \sigma_I \rangle)$
($0 \leq s \leq k$). ただし、 $(s, n) = (k - 1, 2^k)$ の場合は除外

$(UI(n), \sigma_I) \subset U(n) \rtimes \langle \sigma_I \rangle$ より

$(UI(n)/\mathbb{Z}_\mu, \sigma_I) \subset U(n) \rtimes \langle \sigma_I \rangle / \mathbb{Z}_\mu$ が定まる

これは連結コンパクト Lie 群の極地として実現できない

$U(n) \rtimes \langle \sigma_I \rangle / \mathbb{Z}_\mu$ の極大対蹠部分群の分類を利用して次を得る

定理 $UI(n)/\mathbb{Z}_\mu$ の極大対蹠集合は次のいずれかに合同

(1) μ が奇数の場合、 $\pi_n(\Delta_n)$.

(2) μ が偶数の場合、 $\pi_n(\{1, \theta\}PD(s, n))$. ただし、 $0 \leq s \leq k$ であり、 $(s, n) = (k - 1, 2^k)$ の場合を除く。

$$J_n = J_1 \otimes 1_n \in SO(2n)$$

$U(2n)$ の対合的自己同型写像 σ_{II} :

$$\sigma_{II}(g) = J_n \bar{g} J_n^{-1} \quad (g \in U(2n))$$

$$UII(n) = \{g \in U(2n) \mid \sigma_{II}(g) = g^{-1}\} \cong U(2n)/Sp(n)$$

これは連結コンパクト Lie 群の極地として実現できない

$$\text{半直積 } U(2n) \rtimes \langle \sigma_{II} \rangle = (U(2n), 1) \cup (U(2n), \sigma_{II})$$

: 連結成分への分解

$\hat{e} : U(2n) \rtimes \langle \sigma_{II} \rangle$ の単位元

$$F(s_{\hat{e}}, U(2n) \rtimes \langle \sigma_{II} \rangle)$$

$$= \bigcup_{0 \leq r \leq 2n} (G_r(\mathbb{C}^{2n}), 1) \cup (UII(n), \sigma_{II})$$

定理 $U(2n) \rtimes \langle \sigma_{II} \rangle$ の極大対蹠部分群は $(\Delta_{2n}, 1)$ または $(1_2 \otimes \Delta_n) \rtimes \langle \sigma_{II} \rangle$ に共役

定理 $UII(n)$ の極大対蹠集合は $1_2 \otimes \Delta_n$ に合同

$$E(n) = \left\{ \left[\begin{array}{cc} 0 & d_1 \\ d_2 & 0 \end{array} \right] \middle| d_1, d_2 \in \Delta_n \right\} \subset O(2n).$$

$n = 2^k \cdot l$ $\theta : 1$ の原始 2μ 乗根

定理 $(U(2n) \rtimes \langle \sigma_{II} \rangle) / \mathbb{Z}_\mu$ の極大対蹠部分群は次のいずれかに共役

(1) μ が奇数の場合

$$\pi_{2n}(\Delta_{2n}, 1), \quad \pi_{2n}((1_2 \otimes \Delta_n) \rtimes \langle \sigma_{II} \rangle).$$

(2) μ が偶数の場合

$$\pi_{2n}((\{1, \theta\} \Delta_{2n}, 1) \cup (\{1, \theta\} E(n), \sigma_{II})),$$
$$\pi_{2n}(\{1, \theta\} D(s+1, 2n) \rtimes \langle \sigma_{II} \rangle) \quad (0 \leq s \leq k).$$

ただし、 $(s, n) = (k-1, 2^k)$ の場合を除く。

定理 $U(III)(n)/\mathbb{Z}_\mu$ の極大対蹠集合は次のいずれかに合同

(1) μ が奇数の場合、 $\pi_{2n}(1_2 \otimes \Delta_n)$.

(2) μ が偶数の場合、

$$\pi_{2n}(\{1, \theta\}(1_2 \otimes PD(s, n) \cup \{I_1, J_1, K_1\} \otimes ND(s, n)))$$

ただし、 $0 \leq s \leq k$ であり、 $(s, n) = (k - 1, 2^k)$ の場合を除く。

コンパクト対称空間をコンパクト Lie 群に極地として埋め込む方法で研究を進め、多くのコンパクト対称空間の極大対蹠集合の分類が完了している