

Krustの定理の拡張と極小曲面の変形について

赤嶺 新太郎 (日本大学 生物資源科学部)*

1. 序

3次元ユークリッド空間内の極小曲面論において、極小曲面が「埋め込まれている (embedded) か」という性質を調べたり、ある種の埋め込まれた完備極小曲面の特徴付けを行うといった際には、調べたい極小曲面そのものではなく、曲面を何らかの方法で変形したものが埋め込まれているかどうかを調べることがしばしば有効になる。

具体例を挙げると、例えば、Karcher [6] による saddle tower と呼ばれる極小曲面を構成する際には、平面上の領域で定義されたある関数のグラフとなっている極小曲面から始めて、その曲面の共役曲面 (conjugate surface) と呼ばれる等長な曲面を構成し、それを然るべき境界に沿って鏡像の原理によって実解析的に拡張していくという方法がある (図1参照)。そのような構成を行う際に、一般に同伴族と呼ばれる曲面の等長変形族が埋め込まれているかどうかを判定するために次の定理がよく用いられる。

事実 1 (Krust の定理, [6]). 極小曲面が xy -平面上のある凸領域上で定義された関数のグラフとなっているとき、曲面の同伴族も xy -平面上の関数のグラフからなる。

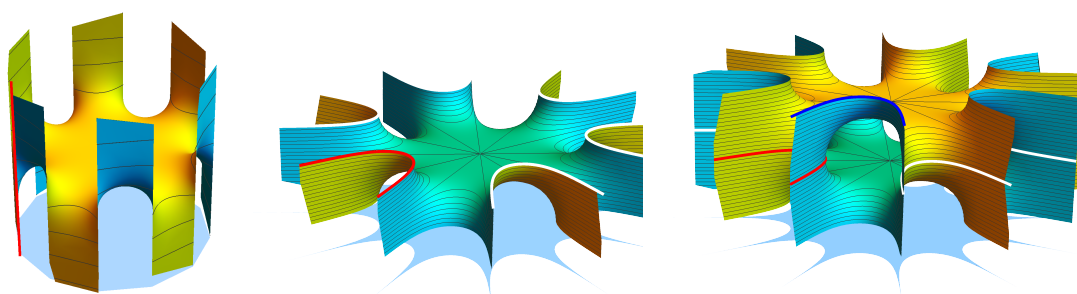


図 1: Jenkins-Serrin[4] によって構成されたグラフ表示された極小曲面 (左), その共役曲面 (中央), 共役曲面の境界が含まれる水平平面に沿って曲面を実解析的に拡張した saddle tower と呼ばれる曲面 (右). 左側の曲面が凸多角形上で定義された関数のグラフとして表示されているので, 事実1から中央の曲面もまたグラフになっている。

ここで、極小曲面の**同伴族 (associated family)**とは曲面の等長変形を与える一径数族であり、前述の共役曲面は同伴族の中に含まれる特別な曲面として定義される。詳しくは第2節を参照。

上記の定理はそのままでも有用である一方で、定義域の凸性は変形後の曲面がグラフになるための必要条件ではない¹ため、グラフの定義域が凸でない場合はどうなっているか、あるいは同伴族以外の曲面の変形に対しては上記の性質は成り立つのか、といった意味で考察や改良の余地があった。本講演では、そのような疑問を解消する形でKrustの

本研究はJSPS 科研費 19K14527 の助成を受けたものである。

*e-mail: akamine.shintaro@nihon-u.ac.jp

¹例えば、図1中央の曲面は非凸領域上で定義された関数のグラフであるが、その共役曲面である左の曲面もグラフになっている。また、Enneperの極小曲面を非凸領域上のグラフとして表示すると (図* 左の曲面)、その同伴族はもとの曲面の単なる回転になり、同伴族の曲面がすべて非凸領域上で定義されたグラフになるという場合もある。

定理を拡張できたことを報告する．講演の内容は主に藤野弘基氏（株式会社クラフト スコーレ）との共同研究 [2] に基づく．

2. 極小曲面の各種変形

次の曲面の変形族を考察する． $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, $\lambda > 0$, $c \in \mathbb{R}$ に対して

$$X_{\theta,\lambda,c}(w) = \operatorname{Re} \int^w \begin{pmatrix} 1 - c\lambda^2 G^2 \\ -i(1 + c\lambda^2 G^2) \\ 2\lambda G \end{pmatrix} \frac{e^{i\theta}}{\lambda} F dw, \quad w \in D \subset \mathbb{C}. \quad (2.1)$$

F は単連結領域 D 上の正則関数, G は D 上の有理型関数で, FG^2 が正則になるものとする．パラメータ (θ, λ, c) を固定する毎に, $X_{\theta,\lambda,c}$ は $\mathbb{R}^3(c) := (\mathbb{R}^3, dx^2 + dy^2 + cdt^2)$ 内の (空間的) 平均曲率零曲面を与えている．とくに, $(\theta, \lambda) = (0, 1)$ とすると, 各 c に対して (2.1) は, 次の曲面に関する Weierstrass-Enneper 型の表現公式を与えている:

- $X_{0,1,1}$: ユークリッド空間 $\mathbb{E}^3 = \mathbb{R}^3(1)$ 内の極小曲面,
- $X_{0,1,-1}$: ミンコフスキー空間 $\mathbb{L}^3 = \mathbb{R}^3(-1)$ 内の極大曲面 (cf. [7]),
- $X_{0,1,0}$: アイソトロピック空間 $\mathbb{I}^3 = \mathbb{R}^3(0)$ 内の平均曲率零曲面 (cf. [12, 13]).

そのため, 関数の組 (F, G) を曲面族 $X_{\theta,\lambda,c}$ のワイエルシュトラス・データと呼ぶことにする．パラメータ θ のみを動かした族 $\{X_{\theta,\lambda,c}\}_\theta$ は**同伴族** (associated family) と呼ばれる第一基本形式を保つ等長変形を与えており, 曲面 $X_{\theta+\pi/2,\lambda,c}$ を $X_{\theta,\lambda,c}$ の**共役曲面** と呼ぶ．また, パラメータ λ のみを動かした族 $\{X_{\theta,\lambda,c}\}_\lambda$ は **López-Ros 変形** (cf. [9]) と呼ばれる第二基本形式と第3成分 (高さ) を保つ変形を $\mathbb{R}^3(c)$ 内で与えている (図2)．

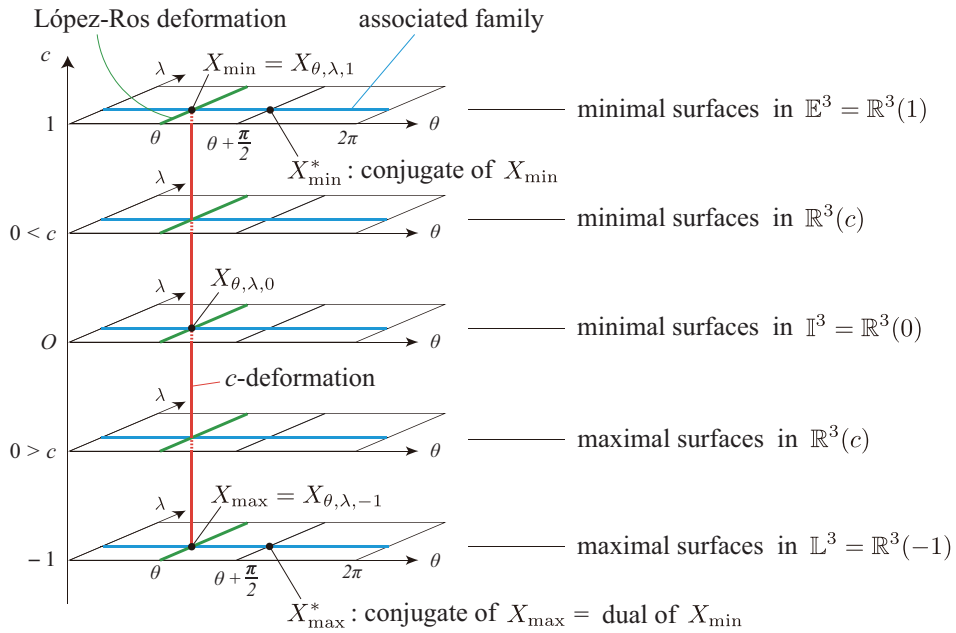


図 2: 変形族 $X_{\theta,\lambda,c}$. [2] より引用.

3. 主結果と証明の概要

極小曲面 $X = (x, y, t)$ が「ある関数 $\varphi = \varphi(x, y)$ のグラフ $t = \varphi(x, y)$ として表示できるか」というグラフ性は、次のようにして複素平面 $\mathbb{C}$ に値を取る調和関数 $f := x + iy$ が単葉 (単射) かどうかで特徴付けられる。

領域 D 上で定義されたワイエルシュトラス・データ (F, G) に対して、次の正則関数を考える。

$$h = \int^w F dw, \quad g = - \int^w G^2 F dw, \quad T = \int^w 2GF dw.$$

このとき、 xy -平面と $\mathbb{C}$ を同一視することで、式 (2.1) は次のように表される。

$$X_{\theta, \lambda, c} = \begin{pmatrix} \frac{e^{i\theta}}{\lambda} h + c\lambda e^{-i\theta} \bar{g} \\ \Re(e^{i\theta} T) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{e^{i\theta}}{\lambda} (h + c\lambda^2 e^{-2i\theta} \bar{g}) \\ t \cos \theta - t^* \sin \theta \end{pmatrix}, \quad (3.1)$$

ここで、 $t = \Re(T)$ であり、 t^* は t の共役調和関数を表す。曲面 $X_{\theta, \lambda, c}$ の xy -座標成分を表す $\mathbb{C}$ 値の調和関数 $f_{\theta, \lambda, c}$ を

$$f_{\theta, \lambda, c} := h + c\lambda^2 e^{-2i\theta} \bar{g}. \quad (3.2)$$

と置く²と、次が成り立つ。

命題 2. 曲面 $S_{\theta, \lambda, c} := X_{\theta, \lambda, c}(D)$ が xy -平面上で定義されたある関数のグラフとして表されることと、 $f_{\theta, \lambda, c}$ が単葉であることは同値である。

したがって、変形した極小曲面のグラフ性を調べるという曲面論の問題は、対応する変形後の調和関数の単葉性を調べるという単葉調和関数論の問題に帰着される。この事実と単葉調和関数論の近年の発展（詳しくは [2] を参照）を巧妙に使うと、第2節の設定の下で、次の2つのタイプの Krust 型定理を示すことができる。

定理 3 ([2, Theorem 4.4]). ワイエルシュトラス・データ (F, G) を持つ曲面族 $X_{\theta, \lambda, c}$ が $|G| < 1$ を満たすとする。もし $|c_0 \lambda_0^2| \leq 1/\|G\|_\infty^2$ を満たす $(\theta_0, \lambda_0, c_0)$ に対して、 $S_{\theta_0, \lambda_0, c_0} := X_{\theta_0, \lambda_0, c_0}(D)$ がある凸領域上のグラフとなるとき、 $|c\lambda^2| \leq |c_0 \lambda_0^2|$ を満たす任意のパラメータ (θ, λ, c) に対しても曲面 $S_{\theta, \lambda, c}$ は、ある close-to-convex 領域上のグラフとなる。

ここで、 $\|G\|_\infty = \sup_{w \in D} \|G(w)\|$ である。領域 $\Omega \subset \mathbb{C}$ が **close-to-convex** であるとは、 $\mathbb{C} \setminus \Omega$ が始点以外において互いに交わらない半直線の和で表せることをいう。Close-to-convex は弱い凸性の概念であり、領域が凸 (convex) であったり、星型 (starlike) であれば、close-to-convex であることもわかる。

さて、定理3において c を固定すると、各空間 $\mathbb{R}^3(c)$ 内で曲面の同伴族や López-Ros 変形に対する Krust の定理が一斉に導かれることがわかる。例えば、 $\theta_0 = 0$, $c_0 = \lambda_0 = 1$ と仮定して $\mathbb{E}^3$ 内の極小曲面 $X_{0,1,1}$ からスタートすると、条件 $|c\lambda^2| \leq |c_0 \lambda_0^2| = 1$ を満たす範囲で Krust 型定理が成立する。とくに、この式は θ に依存しないので、 $c = -1$ を考えると極大曲面の同伴族や López-Ros 変形に対する Krust 型定理が得られる。さらに、得られた極大曲面に対する Krust 型定理はもはや変形を開始する前の極大曲面が凸領域上のグラフであることを必要としないこともわかる (図3を参照)。

² 一般に、 $\mathbb{C}$ 値の調和関数 $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ は、定数差を除いて $f = h + \bar{g}$ の形で正則関数 h と反正則関数 $\bar{g}$ に一意的に分解される。式 (3.2) は、変形族 $\{X_{\theta, \lambda, c}\}$ のすべての変形が調和関数 f の反正則部分の変形 $f_\varepsilon = h + \varepsilon \bar{g}$ という形で書けることを意味している。

例 4. 単位円板 $\mathbb{D}$ 上で定義されたワイエルシュトラス・データ $(F, G) = (\frac{4}{1-w^4}, w)$ に対して, Scherk の極小曲面 (Scherk の二重周期曲面の一部) の変形族

$$X_{\theta, \lambda, c}(w) = \left(\frac{e^{i\theta}}{\lambda} f_{\theta, \lambda, c}(w), 2 \log \left| \frac{1+w^2}{1-w^2} \right| \right), \quad w \in \mathbb{D},$$

を考える. ここで, $f_{\theta, \lambda, c}$ は計算により

$$\begin{aligned} f_{\theta, \lambda, c}(w) = & \log \left(\frac{1+w}{1-w} \right) + i \log \left(\frac{1-iw}{1+iw} \right) \\ & + \frac{c\lambda^2}{e^{i2\theta}} \left\{ \log \left(\frac{1-\bar{w}}{1+\bar{w}} \right) - i \log \left(\frac{1+i\bar{w}}{1-i\bar{w}} \right) \right\} \end{aligned}$$

と書かれることがわかる. Scherk の極小曲面 $X_{0,1,1}$ は正方形という凸領域上で定義されているため, 定理 3 より変形後の曲面 $S_{\theta, \lambda, c} = X_{\theta, \lambda, c}(\mathbb{D})$ も $|c\lambda^2| \leq 1$ を満たす範囲において, close-to-convex 領域上で定義された関数のグラフとなる (図 3 を参照).

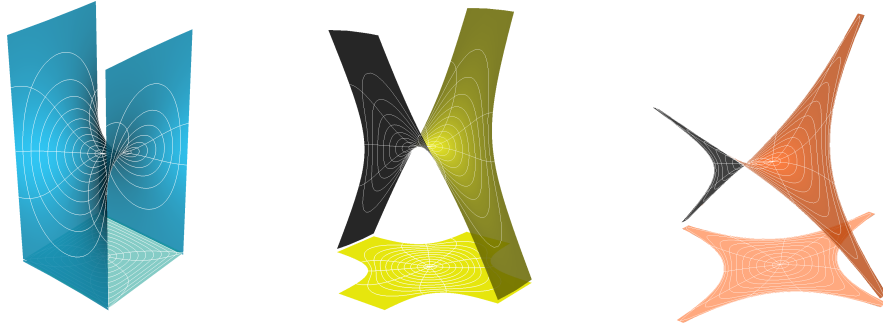


図 3: Scherk の極小曲面のグラフ部分 $X_{0,1,1}$ (左) と変形後の isotropic 極小曲面 $X_{0,1,0}$ (中央) と極大曲面 $X_{0,1,-1}$ (右). 変形後の2つの曲面は凸でない領域上で定義された関数のグラフとなっているが, これらをスタート地点として同伴族による変形や López-Ros 変形を行ってもグラフ性は保存されることが定理 3 よりわかる. [2] より引用.

注意 5. Krust 型定理については, 極小曲面に対するオリジナルの結果 [6] の他に,

- R. López [8] による極大曲面の共役曲面に関する Krust 型定理,
- M. Dorff [3] による極小曲面の López-Ros 変形に関する Krust 型定理³

などの結果がこれまでに知られていた. また近年では Palmer [10] により, 面積汎関数とは限らない非等方的エネルギーの臨界点である非等方的極小曲面に対する Krust 型定理が得られている.

一方で, 単葉調和関数論の結果 [11] を用いることで, 退化した空間であるアイソトロピック空間 $\mathbb{I}^3 = \mathbb{R}^3(0)$ 内の曲面のグラフ性から, $\mathbb{E}^3 = \mathbb{R}^3(1)$ と $\mathbb{L}^3 = \mathbb{R}^3(-1)$ の曲面のグラフ性を次のように復元することもできる (図 4 も参照).

³Dorff の論文 [3] の Corollary 3.5 を参照せよ. [3] ではパラメータ κ を用いた Goursat 変換と呼ばれる変形を扱っているが, $\lambda := 1/\kappa$ と置き直すことでパラメータ λ による極小曲面の López-Ros 変形 $\{X_{0,\lambda,1}\}_\lambda$ に関する主張であることがわかる.

定理 6 ([2, Theorem 5.5]). もし $|G| < 1$ であり, あるパラメータ (θ_0, λ_0) に対して $\mathbb{I}^3$ 内の曲面 $S_{\theta_0, \lambda_0, 0}$ が凸領域上のグラフになっているとする. このとき $|c\lambda^2| \leq 1/\|G\|_\infty^2$ を満たす任意の (θ, λ, c) に対して $S_{\theta, \lambda, c}$ も close-to-convex 領域上のグラフになる. とくに極小曲面 $S_{\theta, 1, 1}$ と極大曲面 $S_{\theta, 1, -1}$ もまたグラフになる.

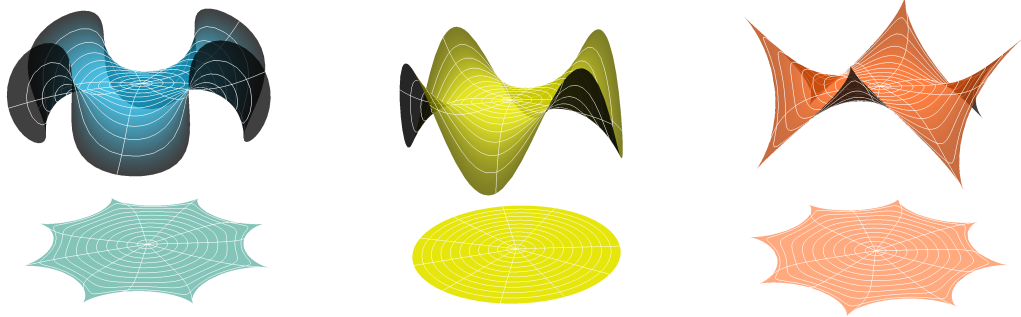


図 4: $(F, G) = (1, w^3)$ ($w \in \mathbb{D}$) から構成される Enneper 型極小曲面 $X_{0,1,1}$ (左) と変形後の極大曲面 $X_{0,1,-1}$ (右), isotropic 極小曲面 $X_{0,1,0}$ (中央). $X_{0,1,0}$ だけが凸領域上のグラフになっている. [2] より引用.

定理 6 も定理 3 と同様に調和関数論の最新の結果からの直接の帰結として証明される. その証明の核となるのは次の調和関数論における結果⁴である.

定理 7 (Partyka-Sakan, [11]). $h, g: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ は, $|h'| > |g'|$ を満たす正則関数であり, $\omega = g'/h'$ は定数ではないとする. もし, $h + \varepsilon_0 g$ が凸になるような $\varepsilon_0 \in \mathbb{C}$ が条件 $|\varepsilon_0| \|\omega\|_\infty \leq 1$ を満たすようにして存在するならば, $|\varepsilon| \|\omega\|_\infty \leq 1$ を満たす任意の $\varepsilon \in \mathbb{C}$ に対して, 調和関数 $f_\varepsilon := h + \varepsilon \bar{g}$ は close-to-convex になる.

また, 定理 6 の評価は最良であることもわかる. 実際, 次の主張が成り立つ.

定理 8. ワイエルシュトラス・データ (F, G) の関数 G が定数ではなく, $|G| < 1$ を満たすとする. このとき $1/\|G\|_\infty^2 < |c\lambda^2| < 1/\inf |G|^2$ を満たす⁵任意の (θ, λ, c) に対して, $S_{\theta, \lambda, c}$ はグラフではない.

最後に筆者らが行っている関連研究について述べておきたい. 本稿においては論文 [2] に基づいて, 各種の空間 $\mathbb{R}^3(c)$ における平均曲率零曲面のグラフ性と調和関数の単葉性の関係について述べた. 同様に曲面が含まれている外空間 $\mathbb{R}^3(c)$ の c を動かすことで, 様々な平均曲率零曲面の性質を調和関数論を介して互いに関連付けることができる. その具体例として, $\mathbb{E}^3 = \mathbb{R}^3(1)$ 内の極小曲面 $X_{0,0,1}$ に対する極小曲面方程式の無限境界値問題と $\mathbb{L}^3 = \mathbb{R}^3(-1)$ 内の極大曲面 $X_{\frac{\pi}{2}, 0, -1}$ に対するある種の光的境界値問題の間には, 解の一対一対応があることなどが [1] において明らかになっている.

謝辞

本稿は研究集会「部分多様体幾何とリー群作用 2022」における講演内容を要約したものとっております. 研究集会における講演の機会, および本稿の執筆の機会を与えてくださった世話人の小池直之先生, 田中真紀子先生, 馬場蔵人先生に心より御礼申し上げます.

⁴ 定理 6 の証明においては, $\varepsilon_0 = 0$ として定理 7 を適用する. 式 (3.2) も参照されたい.

⁵ $\inf |G|^2 = 0$ であれば, $1/\|G\|_\infty^2 < |c\lambda^2| (< +\infty)$.

参考文献

- [1] S. Akamine and H. Fujino, *Duality of boundary value problems for minimal and maximal surfaces*, to appear in Comm. Anal. Geom., arXiv:1909.00975.
- [2] S. Akamine and H. Fujino, *Extension of Krust theorem and deformations of minimal surfaces*, Ann. Mat. Pura Appl. (4), Online First, DOI: 10.1007/s10231-022-01211-z, arXiv:2110.00746.
- [3] M. Dorff, *Minimal graphs in $\mathbb{R}^3$ over convex domains*, Proc. Amer. Math. Soc., **132** (2004), no.2, 491–498.
- [4] H. Jenkins and J. Serrin, *Variational problems of minimal surface type. II. Boundary value problems for the minimal surface equation*, Arch. Rational Mech. Anal. **21** (1966), 321–342.
- [5] D. Kalaj, *Quasiconformal harmonic mappings and close-to-convex domains*, Filomat **24**(1) (2010), 63–68.
- [6] H. Karcher, *Construction of minimal surfaces*, in “Surveys in Geometry”, Univ. of Tokyo, 1989, and Lecture Notes No. 12, SFB 256, Bonn, 1989, pp. 1–96.
- [7] O. Kobayashi, *Maximal surfaces in the 3-dimensional Minkowski space L^3* , Tokyo J. Math., **6** (1983), 297–309.
- [8] R. López, *The Lorentzian version of a theorem of Krust*, Bull. Malays. Math. Sci. Soc. **44** (2021), no. 2, 683–692.
- [9] F.J. López and A. Ros, *On embedded complete minimal surfaces of genus zero*, J. Differential Geom. **33** (1991), no. 1, 293–300.
- [10] B. Palmer, *A version of Krust’s theorem for anisotropic minimal surfaces*, Proc. Amer. Math. Soc. Ser. B **10** (2023), 91–100.
- [11] D. Partyka and K. Sakan, *Injectivity of harmonic mappings with a specified injective holomorphic part*, Ann. Acad. Sci. Fenn. **47**(1) (2022), 573–586.
- [12] Y. Sato, *d-minimal surfaces in three-dimensional singular semi-Euclidean space $\mathbb{R}^{0,2,1}$* , Tamkang J. Math. **52** (2021), no. 1, 37–67.
- [13] K. Strubecker, *Differentialgeometrie des isotropen Raumes. III. Flächentheorie*, Math. Z. **48** (1942), 369–427.