

# コンパクト対称三対の標準形と二重佐武図形

馬場 蔵人（東京理科大学）\*

## 概要

コンパクト対称三対の分類理論において、松木敏彦氏はコンパクト対称三対に対して非自明な同値関係を導入した。幾何学的には、二つのコンパクト対称三対が同値であれば、これらから得られる Hermann 作用は本質的に同じとなる。しかし、それら Hermann 作用の扱いやすさには差が生じるため、同値類の中から‘良い’構造をもった代表元を選ぶことが Hermann 作用の詳しい性質を調べることに役に立つと期待される。本稿ではそのような代表元を‘標準形’とよび、その存在と性質について説明する。また、松木敏彦氏によるコンパクト対称三対の分類の別証明として二重佐武図形の方法について説明する。本研究は井川治氏（京都工芸繊維大学）との共同研究に基づく。

## 1 導入

$G$  を半単純コンパクト連結 Lie 群、 $\theta_1, \theta_2$  を  $G$  上の二つの対合とする。三組  $(G, \theta_1, \theta_2)$  をコンパクト対称三対とよぶ。必ずしも  $\theta_1$  と  $\theta_2$  の可換性は仮定しない。コンパクト対称三対の研究の意義は Hermann 作用の幾何学の研究にある。 $\theta_i$  ( $i = 1, 2$ ) の固定部分群  $G^{\theta_i} = \{g \in G \mid \theta_i(g) = g\}$  の単位連結成分を  $K_i$  で表す。 $G$  の両側不変計量に関して等質空間  $G/K_1$  はコンパクト Riemann 対称空間となり、 $K_2$  は  $G/K_1$  上の等長作用を Hermann 作用とよぶ。この等長作用は超極性とよばれる幾何学的に良い性質をもっている。Kollross ([6]) の分類結果によれば、コンパクト対称空間上の超極作用のほとんどは Hermann 作用であることが知られている。

$G/K_1$  内の  $K_2$  軌道の中で最大次元をもつ  $K_2$  軌道の余次元はコンパクト対称三対の階数とよばれ、 $\text{rank}(G, \theta_1, \theta_2)$  で表す。ここで、 $\theta_1 = \theta_2$  のとき、 $K_1 = K_2$  であり、Hermann 作用はイソトロピー作用にほかならない。

$G$  の自己同型群と内部自己同型群をそれぞれ  $\text{Aut}(G)$  と  $\text{Int}(G)$  で表す。松木敏彦氏はコンパクト対称三対に対して次の同値関係  $\sim$  を導入した。

**定義 1.1** ([7]). 二つのコンパクト対称三対  $(G, \theta_1, \theta_2)$  と  $(G, \theta'_1, \theta'_2)$  に対して  $\varphi \in \text{Aut}(G)$  と  $\tau \in \text{Int}(G)$  で

$$\theta'_1 = \varphi\theta_1\varphi^{-1}, \quad \theta'_2 = \tau\varphi\theta_2\varphi^{-1}\tau^{-1} \quad (1.1)$$

を満たすものが存在するとき、 $(G, \theta_1, \theta_2) \sim (G, \theta'_1, \theta'_2)$  と定める。

\*E-mail: kurando.baba@rs.tus.ac.jp

幾何学的には,  $(G, \theta_1, \theta_2) \sim (G, \theta'_1, \theta'_2)$  であれば, それらが定める Hermann 作用は同型となる. 特に,  $\text{rank}(G, \theta_1, \theta_2) = \text{rank}(G, \theta'_1, \theta'_2)$  が成り立つ. しかし, コンパクト対称三対に付随する量 (例えば,  $\theta_1\theta_2$  の位数) が, 同値な二つのコンパクト対称三対に対して異なることが頻繁に起こる. そのため, それらが定める Hermann 作用の扱いやすさには差が現れ, コンパクト対称三対の同型類の中から扱いやすい代表元を選ぶ必要が出てくる. 本研究ではそのような代表元として標準形を定義する (定義 3.1 を参照). 一方で, コンパクト対称三対の標準形  $(G, \theta_1, \theta_2)$  に対して, 佐武図形概念を拡張した二重佐武図形が導入される (定義 2.2 を参照). 二重佐武図形から標準形の階数や位数などの量を読み取れるだけでなく,  $G$  が単純の場合, コンパクト対称三対の同型類を分類できる.

以上を踏まえて, 本稿では二重佐武図形を用いたコンパクト対称三対の局所的な分類結果および次にコンパクト対称三対の標準形の存在とその性質に関する結果について説明する. 証明などを含めた詳細な議論については [2] を参照のこと.

## 2 二重佐武図形を用いたコンパクト対称三対の分類

この節では定義 1.1 で定めた同値関係  $\sim$  に関するコンパクト対称三対の局所同型類の分類を与える. その方法として二重佐武図形概念を利用する. この方法はコンパクト対称三対を佐武図形を用いて分類した荒木捷朗氏の方法の拡張となる ([1]).

佐武図形の方法ではコンパクト対称三対  $(G, \theta)$  の構造を支持する  $\mathfrak{g}$  の極大可換部分 Lie 環  $\mathfrak{t}$  の構成が重要となる.  $G$  の Lie 環を  $\mathfrak{g}$  とし,  $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{m}$  で  $\mathfrak{g}$  の標準分解を表す. ただし,  $\mathfrak{k} = \mathfrak{g}^\theta, \mathfrak{m} = \mathfrak{g}^{-\theta}$  である. このとき,  $\mathfrak{t} \cap \mathfrak{m}$  が  $\mathfrak{m}$  内の極大可換部分空間となるものを選ぶ必要がある.  $(G, \theta)$  の佐武図形はこのような  $\mathfrak{t}$  に関する  $\mathfrak{g}$  のルート系から得られる Dynkin 図形に対合  $\theta$  の情報を付加することで定義される.

一方, コンパクト対称三対  $(G, \theta_1, \theta_2)$  に対して二重佐武図形を定義するにあたって, コンパクト対称三対の構造を支持する  $\mathfrak{g}$  の極大可換部分 Lie 環は次の基本補題にあるような  $\mathfrak{t}$  が重要である.

**基本補題 2.1** ([2, Proposition 5.4]).  $(G, \theta_1, \theta_2)$  をコンパクト対称三対とする. このとき, コンパクト対称三対  $(G, \tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2) \sim (G, \theta_1, \theta_2)$  と  $\mathfrak{g}$  の極大可換部分 Lie 環  $\mathfrak{t}$  で次の条件を満たすものが存在する:

- (1) 各  $i = 1, 2$  について,  $\mathfrak{t} \cap \tilde{\mathfrak{m}}_i \subset \tilde{\mathfrak{m}}_i$  は極大可換部分空間である. 特に,  $\mathfrak{t}$  は  $\tilde{\theta}_i$  不変である.
- (2)  $\Delta$  を  $\mathfrak{t}$  に関する  $\mathfrak{g}$  のルート系,  $(\Delta, \sigma_1, \sigma_2) = (\Delta, -d\tilde{\theta}_1|_{\mathfrak{t}}, -d\tilde{\theta}_2|_{\mathfrak{t}})$  としたとき,  $\Delta$  の基本系で  $\sigma_1$  基本系かつ  $\sigma_2$  基本系となるものが存在する.

基本補題 2.1, (1) から  $\mathfrak{t} \cap \tilde{\mathfrak{m}}_1$  と  $\mathfrak{t} \cap \tilde{\mathfrak{m}}_2$  が可換であることがわかる.  $\theta_1$  と  $\theta_2$  が非可換のときでは,  $\mathfrak{m}_1$  の極大可換部分空間  $\mathfrak{a}_1$  と  $\mathfrak{m}_2$  の極大可換部分空間  $\mathfrak{a}_2$  が可換であるとは限らない. よって,  $\mathfrak{a}_1$  と  $\mathfrak{a}_2$  が非可換であるときは, それらを含む  $\mathfrak{g}$  の極大可換部分 Lie 環が存在しないことに注意する. 基本補題 2.1, (2) で述べた  $(\Delta, \sigma_1, \sigma_2)$

を  $\mathfrak{t}$  に関する  $(G, \tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2)$  の二重対合ルート系とよぶ. また, 基本補題 2.1, (2) で述べた性質を満たす  $\Delta$  の基本系を  $(\sigma_1, \sigma_2)$  基本系とよぶ.

一方,  $\theta_1$  と  $\theta_2$  が可換のときは, 代表元を選び直さずに  $(G, \theta_1, \theta_2)$  自身に対して基本補題 2.1 の条件を満たす極大可換部分 Lie 環  $\mathfrak{t}$  を与えられる. これは擬リーマン対称対の制限ルート系に関する結果 [8] を可換なコンパクト対称三対の場合に書き換えることでわかる (可換なコンパクト対称対と擬リーマン対称対の間の関係 (一般化された双対性) については [3] で詳細に議論している).

**定義 2.2.** コンパクト対称三対  $(G, \tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2)$  と  $\mathfrak{g}$  の極大可換部分 Lie 環  $\mathfrak{t}$  は基本補題 2.1 で述べた条件を満たすと仮定する.  $\Pi$  を  $\Delta$  の  $(\sigma_1, \sigma_2)$  基本系とし,  $S_i$  ( $i = 1, 2$ ) で  $\Pi$  に付随する  $(G, \tilde{\theta}_i)$  の佐武図形を表す. このとき,  $(S_1, S_2)$  を  $\Pi$  に付随する  $(G, \tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2)$  の二重佐武図形とよぶ.

二重佐武図形の要点は  $(G, \tilde{\theta}_1)$  の佐武図形と  $(G, \tilde{\theta}_2)$  の佐武図形を共通の Dynkin 図形から与えられていることにある. これによって  $\mathfrak{t}$  上の  $\theta_1$  作用と  $\theta_2$  作用を同時に読み取れる.

コンパクト対称三対の同値関係  $\sim$  から二重佐武図形に対して次の同値関係  $\sim$  が自然に導入される.

**定義 2.3.**  $(S_1, S_2)$  と  $(S'_1, S'_2)$  を二重佐武図形とする. Dynkin 図形の間と同型写像  $\psi: \Pi \rightarrow \Pi'$  で, 各  $i = 1, 2$  について佐武図形  $S_i$  と  $S'_i$  の間と同型写像が存在するとき,  $(S_1, S_2) \sim (S'_1, S'_2)$  と定める.

コンパクト対称三対  $(G, \theta_1, \theta_2)$  に対して, 定義 2.2 における二重佐武図形  $(S_1, S_2)$  は同型を除いて  $(G, \tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2)$ ,  $\mathfrak{t}$  および  $\Pi$  の選び方に依らないことが確かめられる. さらに,  $(G, \theta_1, \theta_2)$  の同型類は  $(S_1, S_2)$  の同型類を自然に定めることも示される.

二重佐武図形はコンパクト対称三対の理解について新たな視点を与えていることを次の例を通して説明する.

**例 2.4.**  $G = SO(4m)$  とする.  $SO(4m)$  上の対合  $\theta, \theta'$  を次で定める:

$$\theta(g) = J_{2m} g J_{2m}^{-1}, \quad \theta'(g) = J'_{2m} g J'^{-1}_{2m} \quad (g \in SO(4m)) \quad (2.1)$$

ただし,  $J_{2m}, J'_{2m} \in GL(4m, \mathbb{R})$  は

$$J_{2m} = \begin{pmatrix} O & -E_{2m} \\ E_{2m} & O \end{pmatrix}, \quad J'_{2m} = \begin{pmatrix} E_{4m-1} & O \\ O & -1 \end{pmatrix} J_{2m} \begin{pmatrix} E_{4m-1} & O \\ O & -1 \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

とする. これらの定義より  $G^\theta = U(2m) \cong G^{\theta'} =: U(2m)'$  がわかる.

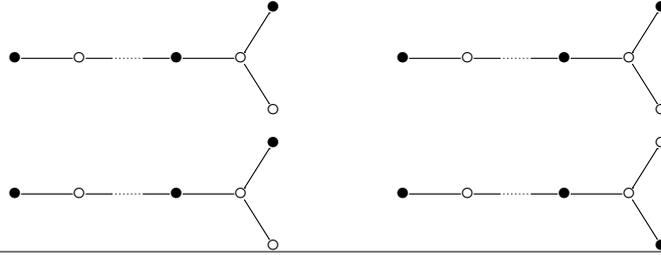
上記の設定のもとで, 二つのコンパクト対称三対  $(SO(4m), \theta, \theta)$  と  $(SO(4m), \theta, \theta')$  が定まる. 特に,  $(SO(4m), \theta, \theta)$  が定める Hermann 作用はイソトロピー作用である. このとき, これらのコンパクト対称三対が  $\sim$  に関して同型でないことが示される. その理由をいくつかの視点から説明したものが表 1 になる. 個々の視点は同値関係  $\sim$  で保たれ, 表 1 が示すように  $(SO(4m), \theta, \theta)$  と  $(SO(4m), \theta, \theta')$  が異なるものを与

えているので、これらのコンパクト対称三対は同型でないことがわかる。さらに、二重佐武図形の視点は他の視点より深くコンパクト対称三対を理解できる。実際、コンパクト対称三対  $(G, \theta_1, \theta_2)$  で  $\theta_i$  ( $i = 1, 2$ ) の固定部分群が  $U(2m)$  となるものは  $(SO(4m), \theta, \theta)$  あるいは  $(SO(4m), \theta, \theta')$  に局所的に同型であることが示される。

表 1:  $U(2m) \curvearrowright SO(4m)/U(2m)$  と  $U(2m)' \curvearrowright M$  の比較

視点	$U(2m) \curvearrowright SO(4m)/U(2m)$	$U(2m)' \curvearrowright SO(4m)/U(2m)$
階数 (余等質性)	$m$	$m - 1$
軌道の性質	austere 軌道は全測地的	全測地的でない austere 軌道が存在
対称三対 $(\tilde{\Sigma}, \Sigma, W)$	$\Sigma \cap W = \emptyset$	$\Sigma \cap W \neq \emptyset$

二重佐武図形



コンパクト対称三対を二重佐武図形を用いて分類するために必要な定理を与える。 $(G, \theta_1, \theta_2)$  と  $(G, \theta'_1, \theta'_2)$  をコンパクト対称三対とする。 $(G, \theta_1, \theta_2)$  と  $(G, \theta'_1, \theta'_2)$  は基本補題 2.1 の条件を満たすとして一般性を失わない。このとき、 $(G, \theta_1, \theta_2)$  と  $(G, \theta'_1, \theta'_2)$  の二重対合ルート系をそれぞれ  $(\Delta, \sigma_1, \sigma_2)$  と  $(\Delta', \sigma'_1, \sigma'_2)$  で表す。また、 $(G, \theta_1, \theta_2)$  と  $(G, \theta'_1, \theta'_2)$  の二重佐武図形をそれぞれ  $(S_1, S_2)$  と  $(S'_1, S'_2)$  で表す。

**定理 2.5** ([2, Theorem 5.11]). 上記の設定のもとで、次は互いに同値である：

- (1)  $(G, \theta_1, \theta_2)$  と  $(G, \theta'_1, \theta'_2)$  は局所的に同型、すなわち、 $\mathfrak{g}$  の自己同型写像  $\varphi$  と内部自己同型写像  $\tau$  で  $d\theta'_1 = \varphi d\theta_1 \varphi^{-1}$  および  $d\theta'_2 = \tau \varphi d\theta_2 \varphi^{-1} \tau^{-1}$  を満たすものが存在する。
- (2)  $(\Delta, \sigma_1, \sigma_2) \equiv (\Delta', \sigma'_1, \sigma'_2)$ 、すなわち、ルート系の同型写像  $\varphi : \Delta \rightarrow \Delta'$  で  $\sigma'_i = \varphi \sigma_i \varphi^{-1}$  ( $i = 1, 2$ ) を満たすものが存在する。
- (3)  $(S_1, S_2) \sim (S'_1, S'_2)$

この定理によってコンパクト対称三対の局所的な分類は二重佐武図形の分類に帰着される。後者の分類はコンパクト対称対の局所同型類の分類 (= 佐武図形の分類) と Dynkin 図形の自己同型群から導びける。表 2 にコンパクト対称三対 (Lie 環表示) の分類表を与える。表 2 に関して次を注意する：

- (1)  $\theta_1$  と  $\theta_2$  が内部自己同型で移り合うとき (これを  $\theta_1 \sim \theta_2$  で表す)、 $(\mathfrak{g}, \theta_1, \theta_2) \sim (\mathfrak{g}, \theta_1, \theta_1)$  となる。これはコンパクト対称対の分類に帰着されるので、表 2 から除外している。

(2) 二つのコンパクト対称三対  $(\mathfrak{g}, \theta_1, \theta_2)$  と  $(\mathfrak{g}, \theta'_1, \theta'_2)$  に対して、次の例外を除いて固定部分 Lie 環  $\mathfrak{g}^{\theta_i}$  と  $\mathfrak{g}^{\theta'_i}$  ( $i = 1, 2$ ) が同型であれば、 $(\mathfrak{g}, \theta_1, \theta_2)$  と  $(\mathfrak{g}, \theta'_1, \theta'_2)$  の二重佐武図形は同型となる。よって、これらはコンパクト対称三対としても同型となる。

(i) 例 2.4 :  $(\mathfrak{so}(4m), \mathfrak{u}(2m), \mathfrak{u}(2m))$  と  $(\mathfrak{so}(4m), \mathfrak{u}(2m), \mathfrak{u}(2m)')$

(ii)  $(\mathfrak{so}(8), \mathfrak{so}(a) \oplus \mathfrak{so}(8-a), \mathfrak{so}(c) \oplus \mathfrak{so}(8-c))$  と  $(\mathfrak{so}(8), \mathfrak{so}(a) \oplus \mathfrak{so}(8-a), \kappa(\mathfrak{so}(c) \oplus \mathfrak{so}(8-c)))$ 。ただし、 $\kappa$  は  $\mathfrak{so}(8)$  の位数 3 の自己同型写像を表す。

(3) 後述のコンパクト対称三対の標準形概念を用いると  $(G, \theta_1, \theta_2)$  の同型類の階数と位数を決定できる。それらの値も表 2 に記載している。

表 2: コンパクト対称三対の分類とそれらの階数と位数 ( $\theta_1 \neq \theta_2$  の場合)

$(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^{\theta_1}, \mathfrak{g}^{\theta_2})$	階数	位数	注意
$(\mathfrak{su}(2m), \mathfrak{so}(2m), \mathfrak{sp}(m))$	$m - 1$	2	
$(\mathfrak{su}(n), \mathfrak{so}(n), \mathfrak{s}(\mathfrak{u}(a) \oplus \mathfrak{u}(b)))$	$a$	2	$n \geq 2a$
$(\mathfrak{su}(2m), \mathfrak{sp}(m), \mathfrak{s}(\mathfrak{u}(a) \oplus \mathfrak{u}(b)))$	$\lfloor \frac{a}{2} \rfloor$	$\begin{cases} 4 & (a: \text{odd}, m > a), \\ 2 & (\text{otherwise}) \end{cases}$	$m \geq a$
$(\mathfrak{su}(n), \mathfrak{s}(\mathfrak{u}(a) \oplus \mathfrak{u}(b)), \mathfrak{s}(\mathfrak{u}(c) \oplus \mathfrak{u}(d)))$	$a$	2	$a < c \leq d < b$
$(\mathfrak{so}(n), \mathfrak{so}(a) \oplus \mathfrak{so}(b), \mathfrak{so}(c) \oplus \mathfrak{so}(d))$	$a$	2	$a < c \leq d < b$
$(\mathfrak{so}(8), \mathfrak{so}(a) \oplus \mathfrak{so}(b), \tilde{\kappa}(\mathfrak{so}(c) \oplus \mathfrak{so}(d)))$	$\begin{cases} 0 & ((a, c) = (1, \{1, 2, 3\})), \\ 1 & ((a, c) = (2, \{2, 3\})), \\ 2 & ((a, c) = (3, 3)) \end{cases}$	$\begin{cases} 2 & ((a, c) = (2, 2)), \\ 3 & ((a, c) = (1, 1), (3, 3)), \\ 4 & ((a, c) = (1, 2), (2, 3)), \\ 6 & ((a, c) = (1, 3)) \end{cases}$	
$(\mathfrak{so}(2m), \mathfrak{so}(a) \oplus \mathfrak{so}(b), \mathfrak{u}(m))$	$\lfloor \frac{a}{2} \rfloor$	$\begin{cases} 4 & (a: \text{odd}, m > a), \\ 2 & (\text{otherwise}) \end{cases}$	$m \geq a$
$(\mathfrak{so}(4m), \mathfrak{u}(2m), \mathfrak{u}(2m)')$	$m - 1$	2	
$(\mathfrak{sp}(n), \mathfrak{u}(n), \mathfrak{sp}(a) \oplus \mathfrak{sp}(b))$	$a$	2	$n \geq 2a$
$(\mathfrak{sp}(n), \mathfrak{sp}(a) \oplus \mathfrak{sp}(b), \mathfrak{sp}(c) \oplus \mathfrak{sp}(d))$	$a$	2	$a < c \leq d < b$
$(\mathfrak{e}_6, \mathfrak{sp}(4), \mathfrak{su}(6) \oplus \mathfrak{su}(2))$	4	2	
$(\mathfrak{e}_6, \mathfrak{sp}(4), \mathfrak{so}(10) \oplus \mathfrak{so}(2))$	2	2	
$(\mathfrak{e}_6, \mathfrak{sp}(4), \mathfrak{f}_4)$	2	2	
$(\mathfrak{e}_6, \mathfrak{su}(6) \oplus \mathfrak{su}(2), \mathfrak{so}(10) \oplus \mathfrak{so}(2))$	2	2	
$(\mathfrak{e}_6, \mathfrak{su}(6) \oplus \mathfrak{su}(2), \mathfrak{f}_4)$	1	2	
$(\mathfrak{e}_6, \mathfrak{so}(10) \oplus \mathfrak{so}(2), \mathfrak{f}_4)$	1	2	
$(\mathfrak{e}_7, \mathfrak{su}(8), \mathfrak{so}(12) \oplus \mathfrak{su}(2))$	4	2	
$(\mathfrak{e}_7, \mathfrak{su}(8), \mathfrak{e}_6 \oplus \mathfrak{so}(2))$	3	2	
$(\mathfrak{e}_7, \mathfrak{so}(12) \oplus \mathfrak{su}(2), \mathfrak{e}_6 \oplus \mathfrak{so}(2))$	2	2	
$(\mathfrak{e}_8, \mathfrak{so}(16), \mathfrak{e}_7 \oplus \mathfrak{su}(2))$	4	2	
$(\mathfrak{f}_4, \mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{sp}(3), \mathfrak{so}(9))$	1	2	

### 3 コンパクト対称三対の標準形

コンパクト対称三対  $(G, \theta_1, \theta_2)$  の同型類を  $[(G, \theta_1, \theta_2)]$  で表す.

**定義 3.1.** コンパクト対称三対  $(G, \tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2)$  が  $[(G, \theta_1, \theta_2)]$  において標準形であるとは、次の条件を満たす  $\mathfrak{g}$  の極大可換部分 Lie 環  $\mathfrak{t}$  が存在するときをいう：

- (1)  $(G, \tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2)$  および  $\mathfrak{t}$  は基本補題 2.1 の条件 (1), (2) を満たす.
- (2)  $\text{ord}(\tilde{\theta}_1\tilde{\theta}_2) = \text{ord}(\tilde{\theta}_1\tilde{\theta}_2|_{\mathfrak{t}}) (= \text{ord}(\sigma_1\sigma_2) < +\infty)$  である.

このとき、 $\mathfrak{t}$  は  $(G, \theta_1, \theta_2)$  に関して標準的であるという.

上記の定義において、条件 (1) は  $(G, \tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2)$  の二重佐武図形が書けるためのものであり、二重佐武図形から  $\tilde{\theta}_i|_{\mathfrak{t}}$  が復元できた. 特に、 $\text{ord}(\tilde{\theta}_1\tilde{\theta}_2|_{\mathfrak{t}})$  の値がわかる. よって、条件 (2) より  $(G, \tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2)$  の位数も求まる.

**定理 3.2** ([2, Theorem 6.6]).  $G$  を単純とする. コンパクト対称三対  $(G, \theta_1, \theta_2)$  の同型類  $[(G, \theta_1, \theta_2)]$  には標準形が存在する.

標準形の一意性が成り立たないことを説明するために  $\sim$  よりも強い次の同値関係  $\equiv$  の定義を復習する.

**定義 3.3.** 二つのコンパクト対称三対  $(G, \theta_1, \theta_2)$  と  $(G, \theta'_1, \theta'_2)$  に対して  $\varphi \in \text{Aut}(G)$  で  $\theta'_i = \varphi\theta_i\varphi^{-1}$  ( $i = 1, 2$ ) を満たすものが存在するとき、 $(G, \theta_1, \theta_2) \equiv (G, \theta'_1, \theta'_2)$  と定める. Lie 環版のコンパクト対称三対に対しても同様に同値関係  $\equiv$  を定義できる. このとき、同値な二つのコンパクト対称三対に対して、 $\mathfrak{k}_1 \cap \mathfrak{k}_2$  と  $\mathfrak{k}'_1 \cap \mathfrak{k}'_2$  は同型となる.

$[(G, \theta_1, \theta_2)]$  における二つの標準形は  $\sim$  に関して同値であるが、必ずしも  $\equiv$  に関して同値でないときがあることに注意する. 次の例で実際にそのようなコンパクト対称三対を与える.

**例 3.4.**  $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(4m)$  とし、二つの可換なコンパクト対称三対  $(\mathfrak{g}, \theta_1, \theta_2)$  と  $(\mathfrak{g}, \theta_1, \theta'_2)$  を次で定める：

$$\theta_1(Z) = \bar{Z}, \quad \theta_2(Z) = E_{2m,2m}ZE_{2m,2m} \quad (Z \in \mathfrak{g}), \quad \theta'_2 = \text{Ad}(g)\theta_2\text{Ad}(g)^{-1}$$

ただし、

$$E_{2m,2m} = \begin{pmatrix} E_{2m} & O \\ O & -E_{2m} \end{pmatrix}, \quad g = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} E_{2m} & \sqrt{-1}E_{2m} \\ \sqrt{-1}E_{2m} & E_{2m} \end{pmatrix} \in SU(4m)$$

$\theta'_2$  の定義から直ちに  $(\mathfrak{g}, \theta_1, \theta_2) \sim (\mathfrak{g}, \theta_1, \theta'_2)$  がわかる. また、これらが標準形であることは可換性から確かめられる. 一方で、 $(\mathfrak{g}, \theta_1, \theta_2) \not\equiv (\mathfrak{g}, \theta_1, \theta'_2)$  であることが、次の部分 Lie 環の計算結果から従う：

$$\mathfrak{k}_1 \cap \mathfrak{k}_2 = \mathfrak{so}(2m) \oplus \mathfrak{so}(2m) \not\cong \mathfrak{u}(2m) = \mathfrak{k}_1 \cap \mathfrak{k}'_2$$

この例のように一意性は一般には成り立たないが、標準形を定義する条件を強めて一意性が成り立つようにできる。しかし、少なくとも  $\theta_1$  と  $\theta_2$  が可換な場合の考察を踏まえるとその必要性は無いと考えている。

コンパクト対称三対の標準形の性質として次の定理が示される。

**定理 3.5** ([2, Theorem 6.11]).  $G$  を単純とする。コンパクト対称三対  $(G, \theta_1, \theta_2)$  はその同型類において標準形とし、 $\mathfrak{g}$  の極大可換部分 Lie 環  $\mathfrak{t}$  は  $(G, \theta_1, \theta_2)$  に関して標準的であるとする。このとき、次が成り立つ：

- (1)  $\mathfrak{t} \cap (\mathfrak{m}_1 \cap \mathfrak{m}_2) =: \mathfrak{a}$  は  $\mathfrak{m}_1 \cap \mathfrak{m}_2$  の極大可換部分空間となる。
- (2)  $(G, \theta_1, \theta_2)$  の位数はその同型類の中で最小値をとる。特に、その値は有限である。

定理 3.5 の証明は位数に関する次の命題とコンパクト対称三対の分類を用いて個別に考察していくとで確かめられる。

**命題 3.6** ([2, Proposition 2.4]). 二つのコンパクト対称三対  $(G, \theta_1, \theta_2) \sim (G, \theta'_1, \theta'_2)$  に対して、 $(\theta_1 \theta_2)^n = \text{id} = (\theta'_1 \theta'_2)^{n+1}$  となる自然数  $n$  が存在したとき、 $\theta_1 \sim \theta_2$  が成り立つ。よって、 $\theta'_1 \sim \theta'_2$  でもある。

定理 3.5, (1) は  $\pi_1(\exp(\mathfrak{a})) \subset G/K_1$  は Hermann 作用  $K_2 \curvearrowright G/K_1$  の切断となることを意味する。ただし、 $\pi_1: G \rightarrow G/K_1$  は自然な射影とする。一方、定理 3.5, (2) を用いてコンパクト対称三対の分類結果から各同型類の可換化可能なコンパクト対称三対の同型類を分類できる。実際、標準形が可換であればその同型類は可換化可能である。さらに、この逆が定理 3.5, (2) によって成り立つ。よって、表 2 の位数の欄を確かめることで可換化可能なコンパクト対称三対の同型類の分類が得られる。特に、 $G$  が例外型の場合、すべての同型類  $[(G, \theta_1, \theta_2)]$  は可換化可能である。

**展望と課題.** 本稿では二重佐武図形を用いた同値関係  $\sim$  に関するコンパクト対称三対の分類と標準形の存在について説明した。また、標準形の性質からコンパクト対称三対の各同型類の可換化可能性について明らかにした。これらの結果は Hermann 作用の幾何学の研究や対称空間論における種々の分類定理の解明に役に立つ。特に、強い同値関係  $\equiv$  に関するコンパクト対称三対の分類については可換な場合は分類が完了している。ここで、 $\equiv$  の幾何学的な意味はコンパクト対称空間内の鏡映部分多様体の研究に見いだせる。また、 $\equiv$  に関する可換なコンパクト対称三対の分類の応用として一般化された双対性を用いた Berger による擬 Riemann 対称対の分類の別証明がある ([4])。歴史的には、Leung によって擬リーマン対称対の分類からコンパクト対称空間内の鏡映部分多様体の分類が得られた。我々の方法はコンパクト対称三対の枠組みで Leung の別証明が与えられることを示している。一方、 $\equiv$  に関する非可換なコンパクト対称三対の分類は現在研究中の課題である。

## 参考文献

- [1] S. Araki, *On root systems and an infinitesimal classification of irreducible symmetric spaces*, J. Math. Osaka City Univ., **13** (1962), 1–34.

- [2] K. Baba, O. Ikawa, *Double Satake diagrams and canonical forms in compact symmetric triads*, arXiv:2205.08410v1.
- [3] K. Baba, O. Ikawa and A. Sasaki, *A duality between non-compact semisimple symmetric pairs and commutative compact semisimple symmetric triads and its general theory*, Diff. Geom. and its Applications **76** (2021), 101751.
- [4] K. Baba, O. Ikawa and A. Sasaki, *An alternative proof for Berger's classification of semisimple pseudo-Riemannian symmetric pairs from the view point of compact symmetric triads*, in preparation.
- [5] O. Ikawa, *The geometry of symmetric triad and orbit spaces of Hermann actions*, J. Math. Soc. Japan, **63**, (2011), 79–136.
- [6] A. Kollross, *A classification of hyperpolar and cohomogeneity one actions*, Trans. Amer. Math. Soc., **354**, (2001), 571–612.
- [7] T. Matsuki, *Classification of two involutions on semisimple compact Lie groups and root systems*, J. Lie Theory, **12** (2002), 41–68.
- [8] T. Oshima and J. Sekiguchi, *The Restricted Root System of a Semisimple Symmetric Pair*, Advanced studies in Pure Mathematics **4** (1984), 433–487.