3 次元 Heisenberg 群の時間的曲面の極小性の特徴付け

清原　悠貴　(北海道大学)

1　序論

3 次元ハイゼンベルグ群は Thurston 幾何のモデル空間の一つとして知られるリー群であり,（両側不変でない）左不変リーマン計量を持つ．コンパクトリー群の両側不変計量に関するリー群への調和写像が可積分系を定める ([16]) のに対して, 一般に（両側不変とは限らない）左不変リーマン計量を備えたリー群の曲面では, 調和写像は可積分系の方程式を定めないと考えられている．ところが井ノ口 ([10]), B. Daniel ([8]) によって, 3 次元ハイゼンベルグ群の極小曲面（すなわち調和はめ込み）の場合には, その正規 Gauss 写像が双曲面への（非等角）調和写像を定めることが示された．よく知られているように, 双曲面は対称空間であり, 対称空間への調和写像は可積分系を定めるため, 3 次元ハイゼンベルグ群の極小曲面からは自然に可積分系が得られる．また Dorfmeister-井ノ口-小林 ([9]) は双曲面への調和写像から 3 次元ハイゼンベルグ群の極小曲面の表現を与え, ループ群の分解定理を用いた, 対称空間への調和写像の Weierstrass 型表現として知られる DPW method を用いて, 極小曲面の Weierstrass 型表現を与えた.

一方 3 次元ハイゼンベルグ群の左不変ローレンツ計量は等長的に 3 種類に分類されることが, S. Rahmani ([15]) によって示されている．本稿では小林真平氏（北海道大学）との共同研究 ([12]) に基づいて, ある左不変ローレンツ計量に関する 3 次元ハイゼンベルグ群の時間的極小曲面から対称空間への（非等角）ローレンツ調和写像, さらには可積分系が自然に得られることを, 曲面のスピノル表現とディラック方程式を通して解説する．また, 時間的極小曲面（または対称空間への（非等角）ローレンツ調和写像）から得られる可積分系を通して, 時間的極小曲面の表現が得られることを解説する．さらに以上の話題の延長として, 不定値特有の曲面の特徴付けを与えたので, 合わせて紹介する.

2　準備

3 **次元ハイゼンベルグ群** Nil_3 は以下で表される線型リー群である.

$$\mathrm{Nil}_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_3 + \frac{1}{2}x_1x_2 \\ 0 & 1 & x_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \middle|\ x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

Nil_3 はしばしば $(\mathbb{R}^3, \cdot)$ として考えられる．ここで群演算 $\cdot$ は

$$(x_1, x_2, x_3) \cdot (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3) = (x_1 + \tilde{x}_1, x_2 + \tilde{x}_2, x_3 + \tilde{x}_3 + \frac{1}{2}(x_1\tilde{x}_2 - x_2\tilde{x}_1))$$

部分多様体幾何とリー群作用 2022 講演記録．本研究は JST 次世代研究者挑戦的研究プログラム JPMJSP2119 の支援を受けたものである.

である．$\mathrm{Nil}_3 = (\mathbb{R}^3, \cdot)$ には次の**非平坦左不変ローレンツ計量** $g_\pm$ が存在する．

$$g_\pm = \mp dx_1 \otimes dx_1 + dx_2 \otimes dx_2 \pm \omega \otimes \omega, \quad \omega = dx_3 + \frac{1}{2}(x_2 dx_1 - x_1 dx_2).$$

これらの計量に関する等長群の次元は 4 であり, 恒等写像を含む連結成分は左移動と第 3 軸周りの回転またはブーストと呼ばれるローレンツ変換で構成される．本稿では g_+ を採用する．

Nil_3 の時間的曲面は, 局所的にはローレンツ面から Nil_3 への等角はめ込みとして考えられる．ローレンツ面とは向きづけ可能な 2 次元多様体で, その上のローレンツ計量の共形同値類が定める構造をもったものである．ローレンツ面に関する詳細は T. Weinstein ([17]) がまとめているので参照されたい．本稿では簡単のために, 時間的曲面 f はパラ複素平面 $\mathbb{C}'$ の単連結領域 $\mathbb{D}$ 上で定義されたものとし, z を $\mathbb{D}$ 上定義された等角座標とする．ここで**パラ複素平面** $\mathbb{C}'$ とは, 次の性質を満たす単位 1 とパラ虚数単位 i' で張られる実代数である．

$$i'^2 = 1, \quad 1 \cdot i' = i' \cdot 1 = i'.$$

パラ複素数には逆数や平方根を持たない元が存在し, 体ではないことに注意が必要である．

3　時間的曲面のスピノル表現と非線形ディラック方程式

接ベクトル場 f_z を複素化したリー環に左移動させたものを $f^{-1}f_z$ と表す．このときはめ込みの等角性から次の曲面のスピノル表示を得る．

命題 1. 時間的曲面 $f : \mathbb{D} \to \mathrm{Nil}_3$ に対して, 以下を満たすパラ複素数 $\epsilon \in \{\pm 1, \pm i'\}$ とパラ複素関数 $\psi_i : \mathbb{D} \to \mathbb{C}'$ $(i = 1, 2)$ が存在する．

$$f^{-1}f_z = \epsilon \left(\overline{\psi_2}^2 + {\psi_1}^2\right) e_1 + \epsilon i' \left(\overline{\psi_2}^2 - {\psi_1}^2\right) e_2 + 2\psi_1 \overline{\psi_2} e_3.$$

注意 2. 組 $(\psi_1, \overline{\psi_2})$ は符号とパラ虚数単位倍を除いて一意であるが, 一般性を失わずに $\psi_2\overline{\psi_2} + \psi_1\overline{\psi_1}$ を正にとれる．このときの ψ_i $(i = 1, 2)$ を時間的曲面 f の**生成スピノル**という．

生成スピノルは曲面の微分の情報をもち, 曲面の計量, 法ベクトル場等を生成スピノルで表すことができる．また, 曲面の構造方程式（Maurer-Cartan 方程式, テンション場と平均曲率場の関係式）を生成スピノルで表して整理することにより, 曲面から次の微分方程式が得られる．

命題 3. 時間的曲面の生成スピノルは次の**非線形ディラック方程式**を満たす (cf.[4])．

$$\left(\begin{pmatrix} 0 & \partial \\ -\overline{\partial} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathcal{U} & 0 \\ 0 & \mathcal{U} \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

ここで $\mathcal{U} = \mathcal{V} = -He^{u/2}/2 + i'h/4$ は**ディラックポテンシャル**と呼ばれるパラ複素関数で, 平均曲率 H, 第 1 基本形式 $e^u dz d\bar{z}$, 支持関数 $h = -e^{u/2} g(f^{-1}N, e_3)$ によって決まる．

注意 4. 非線形ディラック方程式は過剰決定系であり, 関数 H, u, h から曲面 f を再現するには方程式の解 (ψ_1, ψ_2) が次の関係式を満たす必要がある.

$$e^{u/2} = 2(\psi_2\overline{\psi_2} + \psi_1\overline{\psi_1}), \quad h = 2(\psi_2\overline{\psi_2} - \psi_1\overline{\psi_1}).$$

支持関数 h が恒等的に消える曲面は第 3 軸方向からの自然な射影による平面曲線の逆像に限られる. また, 極小曲面の各点において, 支持関数が消えないこととディラックポテンシャルが逆数をもつことが同値になる. ディラックポテンシャルが至る所で逆数をもつ時間的曲面のみ考えることにすると, ディラックポテンシャルはパラ複素の指数関数で表すことができる.

4 正規 Gauss 写像

リー環 $\mathfrak{nil}_3$ と 3 次元ミンコフスキー空間 $\mathbb{L}^3_{(+,-,+)}$ のド・ジッター球面を次で表す.

$$\widetilde{\mathbb{S}}^2_1 = \left\{x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 \in \mathfrak{nil}_3 \mid -x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\right\},$$
$$\mathbb{S}^2_1 = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{L}^3 \mid x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 = 1\right\}.$$

またこれらのド・ジッター球面に対して, 次の立体射影を導入する.

$$\pi_{\mathfrak{nil}}^{\cdot}\mathfrak{nil}_3 \supset \widetilde{\mathbb{S}}^2_1 \ni x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 \mapsto \left(\frac{x_1}{1-x_3}, \frac{x_2}{1-x_3}, 0\right) = \frac{x_1}{1-x_3} + i'\frac{x_2}{1-x_3} \in \mathbb{C}',$$

$$\pi_{\mathbb{L}^3}^{\cdot}\mathbb{L}^3_{(+,-,+)} \supset \mathbb{S}^2_1 \ni (x_1, x_2, x_3) \mapsto \left(\frac{x_1}{1+x_3}, \frac{x_2}{1+x_3}, 0\right) = \frac{x_1}{1+x_3} + i'\frac{x_2}{1+x_3} \in \mathbb{C}'.$$

簡単のために $\epsilon = i'$ とし, h は正の値をとるとすると, 時間的曲面 f の単位法ベクトル場 N は写像の合成 ${\pi_{\mathbb{L}^3}}^{-1} \circ \pi_{\mathfrak{nil}} \circ f^{-1}N$ により, ミンコフスキー空間のド・ジッター球面 $\mathbb{S}^2_1$ への写像を定める. これを時間的曲面 f の**正規 Gauss 写像**という. 一方, ハイゼンベルグ群の曲面と同様にして, ミンコフスキー空間の時間的曲面に対してもスピノル表現や非線形ディラック方程式が得られる. この事実を利用すると, Nil_3 の時間的極小曲面の生成スピノルを用いて, 極小曲面の正規 Gauss 写像を Gauss 写像に持つようなミンコフスキー空間の時間的平均曲率 1/2 一定曲面を表すことができる. したがってハイゼンベルグ群の時間的極小曲面の正規 Gauss 写像はミンコフスキー空間のド・ジッター球面の計量に関してローレンツ調和写像を定めることがわかる.

5 曲面のラックス表示と Sym-Bobenko の公式

パラ複素版指数 $(1,1)$ 特殊ユニタリ群 $\mathrm{SU}'_{1,1}$ のリー環 $\mathfrak{su}'_{1,1}$ は 3 次元ミンコフスキー空間 $\mathbb{L}^3_{(+,-,+)}$ と自然に同一視される. このとき時間的曲面の正規 Gauss 写像は曲面の生成スピノルのみで表されるある行列値写像 F を用いて $\frac{i'}{2}\,\mathrm{Ad}(F)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ と書き換えることができる. ところで, U. Abresch と H. Rosenberg は 4 次元の等長群をもつ Thurston

幾何のモデル空間の曲面に **Abresch-Rosenberg 微分**と呼ばれる 2 次微分を導入した ([2]). この 2 次微分は平均曲率一定の曲面上では正則になり, Hopf 微分のアナロジーとして知られている. Abresch-Rosenberg の研究はリーマン計量の下で行われているが, ローレンツ計量の場合も同様に定義できる. Abresch-Rosenberg 微分を導入すると時間的曲面の非線形ディラック方程式は次の行列値微分方程式と同値であることがわかる. 特に正規 Gauss 写像を記述する写像 F はこの微分方程式の解である.

$$F_z = FU, \quad F_{\bar{z}} = FV,$$

$$U = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}w_z + \frac{1}{2}H_z\tilde{\epsilon}e^{-w/2}e^{u/2} & -\tilde{\epsilon}e^{w/2} \\ Q\tilde{\epsilon}e^{-w/2} & -\frac{1}{4}w_z \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4}w_{\bar{z}} & -\bar{Q}\tilde{\epsilon}e^{-w/2} \\ \tilde{\epsilon}e^{w/2} & \frac{1}{4}w_{\bar{z}} + \frac{1}{2}H_{\bar{z}}\tilde{\epsilon}e^{-w/2}e^{u/2} \end{pmatrix}.$$

ただし, H は平均曲率, u は第 1 基本形式 $e^u dzd\bar{z}$ を定める関数であり, 関数 w, Q はディラックポテンシャルの指数関数表示に現れる関数 w と Abresch-Rosemberg 微分の係数関数 Q である. 上記の微分方程式は構造方程式を書き換えたものであるから, 時間的曲面上の 1 次微分形式 $\alpha = Udz + Vd\bar{z}$ をとれば, α は Maurer-Cartan 方程式を満たす. そこで次のように分解する.

$$\alpha = \alpha_d + \alpha_o = \alpha_d + \alpha_{o+} + \alpha_{o-}.$$

ここで α_d は α の対角成分, α_{o+} と α_{o-} はそれぞれ α の非対角成分 α_o の $(1,0)$ 成分と $(0,1)$ 成分を表す. このとき曲面の極小性（すなわち正規 Gauss 写像の調和性）は次のように書き換えられる.

$$d(*\alpha_o) + [\alpha_d \wedge *\alpha_o] = 0.$$

ここで $*$ は Hodge star 作用素 $*dz = i'dz, *d\bar{z} = -i'd\bar{z}$ を表す. また, α を双曲線の点 $\mu = e^{i't} \in \mathbb{C}'\,(t \in \mathbb{R})$ によって以下のようにパラメータづける.

$$\alpha^\mu = U^\mu dz + V^\mu d\bar{z} = \alpha_d + \mu\alpha_{o+} + \mu^{-1}\alpha_{o-}.$$

Pohlmeyer による可積分系の観点からの調和写像の研究をローレンツ調和写像に対して行うと, 時間的曲面の極小性が次の方程式と同値であることがわかる.

$$d\alpha^\mu + \frac{1}{2}[\alpha^\mu \wedge \alpha^\mu] = 0.$$

以上をまとめると次のようになる.

定理 5. 時間的曲面 f について, 次は同値である.

1. 極小である.
2. ディラックポテンシャルが純パラ虚数に値をもつ.
3. $d + \alpha^\mu$ が自明束 $\mathbb{D} \times \mathrm{SU}'_{1,1}$ 上の平坦接続の族を定める.
4. 正規 Gauss 写像 $f^{-1}N$ はミンコフスキー空間のド・ジッター球面への（非等角）ローレンツ調和写像である.

時間的極小曲面に対して α^μ を Maurer-Cartan 形式にもつ, 初期値 $F^\mu|_{\mu=1}=F$ を満たす写像 F^μ を極小曲面の**拡張動標構**という. 拡張動標構の概念は元々リーマン対称空間への調和写像に対して定義されたものであり, 空間形の平均曲率一定曲面等に対しても同様に導入される. ミンコフスキー空間の時間的平均曲率 1/2 一定曲面との関係から, Nil_3 の極小曲面の拡張動標構はミンコフスキー空間の時間的平均曲率 1/2 一定曲面の拡張動標構でもある. 空間形の平均曲率一定曲面の表現として知られる Sym-Bobenko の公式をミンコフスキー空間の時間的曲面に適切に導入することで, $\mathfrak{nil}_3$ と $\mathfrak{su}'_{1,1}$ のベクトル空間としての自然な同一視の下, Nil_3 の時間的極小曲面の表現を得る.

定理 6. パラ複素平面の単連結領域上定義された時間的極小曲面の拡張動標構を F^μ とする. 写像 $f_{\mathbb{L}^3}, f^\mu$ を次で定める.

$$f_{\mathbb{L}^3}=-i'\mu(\partial_\mu F^\mu)(F^\mu)^{-1}-\frac{i'}{2}\mathrm{Ad}(F^\mu)\sigma_3,\quad N_{\mathbb{L}^3}=\frac{i'}{2}\mathrm{Ad}(F^\mu)\sigma_3$$

$$f^\mu=\exp\circ\left((f_{\mathbb{L}^3})^o-\frac{i'}{2}\mu(\partial_\mu f_{\mathbb{L}^3})^d\right)$$

ただし右肩の d,o はそれぞれ $\mathfrak{su}'_{1,1}$ の元として見たときの対角成分, 非対角成分を表す. このとき各 μ に対して f^μ は Nil_3 の（特異点付き）時間的極小曲面であり, その正規 Gauss 写像は $N_{\mathbb{L}^3}$ である. さらに $f_{\mathbb{L}^3}$ はミンコフスキー空間の時間的平均曲率 1/2 一定曲面であり, その Gauss 写像は $N_{\mathbb{L}^3}$ である.

6 大きさ 0 の Abresch-Rosenberg 微分をもつ時間的極小曲面

時間的曲面の構造方程式を書き換えた微分方程式の可積分条件は次で与えられる.

$$\frac{1}{2}w_{z\bar z}+e^w-Q\overline{Q}e^{-w}+\frac{1}{2}\left(H_{z\bar z}+H_z\left(-\frac{w}{2}+\frac{u}{2}\right)_{\bar z}\right)\widetilde{\epsilon}e^{-w/2+u/2}=0,$$

$$\overline{Q}_z\widetilde{\epsilon}=-\frac{1}{2}\overline{Q}H_ze^{-w/2+u/2}-\frac{1}{2}H_{\bar z}e^{w/2+u/2},$$

$$Q_{\bar z}\widetilde{\epsilon}=-\frac{1}{2}QH_{\bar z}e^{-w/2+u/2}-\frac{1}{2}H_ze^{w/2+u/2},$$

$$\frac{1}{2}w_{z\bar z}+e^w-Q\overline{Q}e^{-w}+\frac{1}{2}\left(H_{z\bar z}+H_{\bar z}\left(-\frac{w}{2}+\frac{u}{2}\right)_{z}\right)\widetilde{\epsilon}e^{-w/2+u/2}=0.$$

特に $H=0$, $Q\overline{Q}=0$ を仮定すると, 可積分条件は $Q_{\bar z}=0$ と実数値関数に対する双曲型の Liouville 方程式になる. Liouville 方程式の厳密解は [3, 6, 7, 13, 14] などでよく研究されている. このとき得られる時間的極小曲面は正定値計量の場合に対応する曲面が平面（Abresch-Rosenberg 微分が恒等的に消える）以外に存在しない. $Q\neq 0$ かつ $Q\overline{Q}=0$ となる極小曲面は不定値特有の曲面であり, 大変興味深い. 現在行っている研究 ([11]) で, このような極小曲面は”null scroll” とでも呼ぶべきはめ込みであることがわかった.

定義 7. 3 次元ハイゼンベルグ群 Nil_3 の零的（光的）曲線 $\gamma(s)$ と γ に沿った $\mathfrak{nil}_3$ 値零的ベクトル場 $\widetilde{B}(s)$ に対して, 写像 $f(s,t)$ を次で定める.

$$f(s,t) = \gamma(s) \cdot \exp(t\widetilde{B}(s)).$$

ここで写像 $\exp : \mathfrak{nil}_3 \to \mathrm{Nil}_3$ はリー群の指数写像である. 写像 f がはめ込みであるとき, f を **null scroll** と呼び, γ を **base curve**, $\widetilde{B}$ を **ruling** と呼ぶ.

null scroll は時間的曲面である. null scroll の定義式自体はハイゼンベルグ群である必要も零的である必要性もなく, 要請されるのはリー群の構造のみである. 擬ユークリッド空間では群構造は通常の積であり, 指数写像は恒等写像であるから, 上記の定義は線織面と同じである. さらに, 両側不変計量をもつリー群では指数写像は測地線を定めるため, 上記の定義は線織面を定める. したがって, 上記の定義は線織面の自然な一般化と見なすことができる. また, ハイゼンベルグ群では null scroll は s を固定するごとに $\mathbb{R}^3$ の直線を定めるため, 見た目は $\mathbb{R}^3$ の線織面になっている.

ハイゼンベルグ群の構造・計量のために計算は煩雑になるが, null scroll の極小性は base curve の速度ベクトル場と ruling を用いて非常に簡潔に表すことができる. またリー環 $\mathfrak{nil}_3$ とミンコフスキー空間 $\mathbb{L}^3$ をある意味で同一視することにより, ミンコフスキー空間の曲線論をハイゼンベルグ群で扱うことができる. 特に Nil_3 の時間的極小曲面と $\mathbb{L}^3$ の時間的平均曲率 1/2 一定曲面の関係から, ミンコフスキー空間の曲線論がハイゼンベルグ群で意味を持ち, Nil_3 の零的曲線に動標構が導入される.

命題 8. 3 次元ハイゼンベルグ群の零的曲線 γ に対し, 以下の条件を満たす $\mathfrak{nil}_3$ 値関数 A, B, C と実数値関数 k_i $(i = 0, 1, 2)$ が存在する.

$$\begin{gathered} A = \gamma^{-1}\frac{d\gamma}{ds}, \quad g(A,B) = g(C,C) = 1, \\ g(A,A) = g(B,B) = g(A,C) = g(B,C) = 0, \\ (A', B', C') = (A, B, C)\begin{pmatrix} k_0 & 0 & -k_2 \\ 0 & -k_0 & -k_1 \\ k_1 & k_2 & 0 \end{pmatrix}. \end{gathered}$$

この動標構の取り方は一意ではなく, **screen bundle** という, 曲線に沿った直線束の取り方に依存している ([5]). また, 適切なパラメータに取り直すことで k_0 を恒等的に 0 にできる. このとき動標構 (A, B, C) を **null frame**, 関数 k_1, k_2 を null frame (A, B, C) に関する零的曲線 γ の**第 1 曲率, 第 2 曲率**と呼ぶ. 特に null scroll の ruling として null frame の従法線ベクトルから定まる零的ベクトルを採用すると, これらの曲率は Abresch-Rosenberg 微分と平均曲率の情報をもっており, 次の特徴付けを与える定理が成立する.

定理 9. Nil_3 の零的曲線 $\gamma(s)$ に対して, その null frame を $(A(s), B(s), C(s))$, 第 1 曲率, 第 2 曲率を $k_1(s), k_2(s)$ とする. 零的ベクトル場 $\widetilde{B}$ を $\widetilde{B} = \sum_{i=1}^{3} B^i e_i$ と定める. ただし

$B = B^1 e_1 + B^2 e_2 - B^3 e_3$ である．$k_2 = 1/2$ ならば, null scroll $\gamma(s) \cdot \exp(t\widetilde{B}(s))$ は極小である．

定理 10. null scroll f が極小ならば, その Abresch-Rosenberg 微分は大きさ 0 をもつ．逆に大きさ 0 の Abresch-Rosenberg 微分をもつ時間的極小曲面は null scroll である．

証明には時間的曲面の構造方程式を書き換えた Liouville 方程式の解を用いるが, 方程式の書き換えには曲面の支持関数が 0 でないことを仮定していたことに注意が必要である．しかしながら, 支持関数が 0 の時間的極小曲面は vertical な平面に限られるため, 定理の成立には影響しない．

以上の議論では, 曲線の情報を与えて大きさ 0 の Abresch-Rosenberg 微分をもつ極小曲面を構成したが, 具体的に写像の成分を与えるには連立微分方程式を解く必要があり, 手間がかかる．一方で極小性の条件より, ruling から曲面を構成する研究が進んでいる．この方法により, いくつかの具体例が得られている．これらについても [11] で発表する予定である．

参考文献

[1] U. Abresch, H. Rosenberg. Generalized Hopf differentials. *Mat. Contemp.* **28**: 1-28, 2005.

[2] U. Abresch, H. Rosenberg. A Hopf differential for constant mean curvature surfaces in $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ and $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. *Acta Matht.* **193**(2): 141-174, 2004.

[3] O. P. Bhutani, M. H. M. Moussa, K. Vijayakumar. On the generalized forms of exact solutions to the Liouville equation via direct approach. *Int. J. Engng. Sci.* **32**(12): 1965-1969, 1994.

[4] D. A. Berdinskiĭ, I. A. Taĭmanov. Surfaces in three-dimensional Lie groups (Russian). *Sibirsk. Mat. Zh.* **46**(6): 1248–1264, 2005. English translation: Siberian Math. J. **46**(6): 1005-1019, 2005.

[5] K. L. Duggal, A. Bejancu. Lightlike Submanifolds of semi-Riemannian Manifolds and Applications. *Mathematics and its Applications*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1996.

[6] P. A. Clarkson, M. D. Kruskal. New similarity reductions of the Boussinesq equation. *J. Math. Phys.* **30**(10): 2201-2213, 1989.

[7] D. G. Crowdy. General solutions to the 2D Liouville equation. *Int. J. Engng. Sci.* **35**(2): 141-149, 1997.

[8] B. Daniel. The Gauss map of minimal surfaces in the Heisenberg group. *Int. Math. Res. Not. IMRN*, (3):674–695, 2011.

[9] J. F. Dorfmeister, J. Inoguchi, S.-P. Kobayashi. A loop group method for minimal surfaces in the three-dimensional Heisenberg group. *Asian J. Math.* **20**(3): 409-448, 2016.

[10] J. Inoguchi. Minimal surfaces in the 3-dimensional Heisenberg group. *Differ. Geom. Dyn. Syst. (Electronic)*, 10:163–169, 2008.

[11] H. Kiyohara. Minimal null scrolls in the three-dimensional Heisenberg group. In prepa-

ration.

[12] H. Kiyohara, S-P. Kobayashi. Timelike minimal surfaces in the three-dimensional Heisenberg group. *J. Geom. Anal.*

[13] J. Liouville. Sur l'equation aux différences partielles $\frac{d^2 \log \lambda}{dudv} \pm \frac{\lambda}{2a^2} = 0$. *J. Math. Pures Appl.* **18**: 71-72, 1853.

[14] A. G. Popov. Exact formulas for constructing solutions of the Liouville equation $\Delta_2 u = e^u$ from solutions of the Laplace equation $\Delta_2 v = 0$. *In: Doklady Akademii Nauk. Russian Academy of Sciences*: 440-441, 1993.

[15] S. Rahmani, Métriques de Lorentz sur les groupes de Lie unimodulaires, de dimension trois, [Lorentz metrics on three-dimensional unimodular Lie groups]. *J. Geom. Phys.* **9**(3): 295-302, 1992.

[16] K. Uhlenbeck, Harmonic maps into Lie groups: classical solutions of the chiral model. *J. Differ. Geom.*, 30 (1989), no. 1, 1–50.

[17] T. Weinstein. An introduction to Lorentz surfaces. *De Gruyter Expositions in Mathematics*, **22**. Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1996.