

リプシッツ関数に関するレーブの球面定理

近藤 慶 (岡山大学)*

概 要

J. ミルナー (1959 年) と R. ローゼン (1960 年) は, レーブの球面定理が非退化性を仮定せずとも成り立つことを独立に証明した。講演者は, 薄滑解析の立場から滑らかな関数の臨界点の概念をリプシッツ関数へ拡張し, 上述のレーブ・ミルナー・ローゼンの球面定理をリプシッツ関数へ一般化した。本講演ではその一般化された球面定理についてお話したい。

1 研究の背景

1.1 レーブの球面定理 (オリジナル版)

1952 年に G. レーブは次の球面定理を証明した。

定理 1.1 (レーブ, [17]) m 次元閉 C^∞ 多様体 M 上に滑らかな関数で非退化な臨界点をちょうど 2 つ持つものが存在すれば, その多様体は m 次元標準球面 $\mathbb{S}^m$ に同相である。

J. ミルナー (1959 年) と R. ローゼン (1960 年) は, 定理 1.1 が臨界点の非退化性を仮定せずとも成り立つことを独立に証明した。その主張を述べる前に, 非退化性を仮定しないことが我々にどのような障害をもたらすのかを定理 1.1 の証明を復習することによって確認したい: 定理 1.1 の証明において, 次のモース命題と基本定理が適用された:

命題 1.2 (モース命題, cf. [9, 13]) f を m 次元 C^∞ 多様体 X 上の滑らかな関数とし, $p_0 \in X$ を f の非退化臨界点とする。このとき, p_0 の周りのチャート $(U, \varphi) = (U; x_1, \dots, x_m)$ で, $\varphi(p_0) = o := (0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^m$ かつ

$$f(q) = f(p_0) - x_1^2(q) - \dots - x_\lambda^2(q) + x_{\lambda+1}^2(q) + \dots + x_m^2(q), \quad \forall q \in U$$

となるものが取れる。ここで, $x_1, \dots, x_m$ は φ の成分関数を表す。

定理 1.3 (モースの基本定理, cf. [9, 13]) f を m 次元閉 C^∞ 多様体 X 上の滑らかな関数とする。もし $f^{-1}[a, b]$ 上に f の臨界点が存在しなければ, $f^{-1}(-\infty, a]$ は $f^{-1}(-\infty, b]$ に微分同相である。特に, 任意の $t, s \in [a, b]$ に対し, $(m-1)$ 次元の正則部分多様体 $f^{-1}(t)$ と $f^{-1}(s)$ は微分同相であり, $f^{-1}[a, b]$ は $f^{-1}(t) \times [a, b]$ と微分同相である。

定理 1.1 の証明. f を仮定の M 上の滑らかな関数で非退化な臨界点をちょうど 2 つ持つものとする。 $p_1, p_2 \in M$ でそれら非退化臨界点を表す。最大値・最小値の定理より, $a_1 := f(p_1) = \min_{x \in M} f(x)$ かつ $a_2 := f(p_2) = \max_{y \in M} f(y)$ と仮定でき

* 〒700-8530 岡山市北区津島中 3-1-1 岡山大学 理学部 数学科, e-mail: keikondo@okayama-u.ac.jp

る。命題 1.2 (モース命題) より, p_1 の周りのチャート $(U, \varphi) = (U; x_1, \dots, x_m)$ と p_2 の周りのチャート $(V, \psi) = (V; y_1, \dots, y_m)$ で, $\varphi(p_1) = o$, $\psi(p_2) = o$ かつ $f(q) = a_1 - \sum_{i=1}^{\lambda} x_i^2(q) + \sum_{\lambda+1}^m x_i^2(q)$ ($q \in U$), $f(r) = a_2 - \sum_{i=1}^{\mu} y_i^2(r) + \sum_{\mu+1}^m y_i^2(r)$ ($r \in V$) となるものがそれぞれ取れる。更に, $a_1 < f(q)$ ($q \in U \setminus \{p_1\}$) なので, U 上で f の指数 λ は $\lambda = 0$ を満たす。よって, U 上で, $f = a_1 + \sum_{i=1}^m x_i^2$ となる。同様に, V 上で f の指数 μ は $\mu = m$ を満たすので, V 上で $f = a_2 - \sum_{j=1}^m y_j^2$ となる。今, $\varepsilon > 0$ を $D_\varepsilon(p_1) := \{q \in M \mid a_1 \leq f(q) \leq a_1 + \varepsilon\}$ と $D_\varepsilon(p_2) := \{r \in M \mid a_2 - \varepsilon \leq f(r) \leq a_2\}$ が, $D_\varepsilon(p_1) \subset U$ かつ $D_\varepsilon(p_2) \subset V$ を満たすように選ぶ。このとき, $D_\varepsilon(p_1) = \{q \in U \mid \sum_{i=1}^m x_i^2(q) \leq \varepsilon\}$, $D_\varepsilon(p_2) = \{r \in V \mid \sum_{j=1}^m y_j^2(r) \leq \varepsilon\}$ となるので, $D_\varepsilon(p_1)$ と $D_\varepsilon(p_2)$ は円板 $\{x \in \mathbb{R}^m \mid \|x\| \leq \sqrt{\varepsilon}\}$ と微分同相である。以下, それらを円板と呼ぶ。 $M \setminus \overset{\circ}{D}_\varepsilon(p_1) \cup \overset{\circ}{D}_\varepsilon(p_2) = f^{-1}[a_1 + \varepsilon, a_2 - \varepsilon]$ 上に f の臨界点は存在しないので, 定理 1.3 より, $f^{-1}(-\infty, a_2 - \varepsilon]$ と $f^{-1}(-\infty, a_1 + \varepsilon] = D_\varepsilon(p_1)$ は微分同相である。よって, M は本質的に円板 $D_\varepsilon(p_1)$ と $D_\varepsilon(p_2)$ によって構成されていると言ってよい。従って, M は円板 $D_\varepsilon(p_1)$ と $D_\varepsilon(p_2)$ の境界を貼り合わせたものと同相であるから, $\mathbb{S}^m$ と同相である。□

注意 1.4

- (1) 定理 1.1 の証明から分かることは, 我々は「非退化」という仮定により f の非退化臨界点の周りで円板を取ることができるという事実である。よって, 非退化性を仮定しない場合は, 2 枚の円板の境界の貼り合わせにより M が $\mathbb{S}^m$ であるという直感的にも分かりやすい明確な方針を取ることができない。
- (2) 定理 1.1 の証明で見たように M は 2 枚の円板の境界の貼り合わせに同相であったので, M は歪曲球面である。特に, スメールの結果 [22] により, 7 次元以上の異種球面は歪曲球面に微分同相であるから, 一般に定理 1.1 を微分同相という主張へ拡張することはできない。ただし, [3], [7], [15], [21] より, 6 次元以下であれば, M は $\mathbb{S}^m$ に微分同相である。

1.2 ミルナーとローゼンによるレーブの球面定理の拡張

上述のように J. ミルナー (1959 年) と R. ローゼン (1960 年) は, 非退化性を仮定せずとも定理 1.1 が成り立つことを独立に証明した。

定理 1.5 (ミルナー [12], ローゼン [19]; [20]) m 次元閉 C^∞ 多様体 M 上に滑らかな関数で臨界点をちょうど 2 つ持つものが存在すれば, M は $\mathbb{S}^m$ に同相である。

注意 1.4 の (1) で言及したように, 非退化性を仮定しないため, 定理 1.5 の証明では定理 1.1 の証明のように命題 1.2 を適用できない。定理 1.5 の証明において, 鍵となる結果は次のメイザー・ブラウンの定理である:

定理 1.6 (メイザー [10]; [11], ブラウン [2]) X を位相空間とし, Σ を X 上の懸垂とする。もし Σ が懸垂点において m 次元局所ユークリッド的ならば, Σ は $\mathbb{S}^m$ に同相である。

注意 1.7 一般に定理 1.6 はブラウンの定理と呼ばれているが, 講演者はメイザー・ブラウンの定理と呼んでいる。と言うのは, 1959 年に B. メイザー ([10]; [11]) が初めにシェーンフリース (Schoenflies) の定理を高次元化し, 彼はその帰結として定理 1.6 が従うと指摘した。その後, M. ブラウンが定理 1.6 を証明した。ただし, ブラウンはメイザーの指摘に従っていない。つまり, ブラウンはメイザーによるシェーンフリースの定理を 1960 年に拡張 [1] ^{*1}したが, 一般化されたシェーンフリースの定理を適用せずに彼独自の「初等的」アイデアで定理 1.6 を証明している ([2])。なお, メイザーの指摘に素直に従ったのは, ローゼン ([19]; [20]) である。

定理 1.5 の証明. f を仮定の M 上の滑らかな関数で臨界点をちょうど 2 つ持つものとする。 $p_1, p_2 \in M$ でそれら臨界点を表す。最大値・最小値の定理より, $a_1 := f(p_1) = \min_{x \in M} f(x)$ かつ $a_2 := f(p_2) = \max_{y \in M} f(y)$ と仮定できる。このとき, $c := (a_1 + a_2)/2$ とおき, $\varepsilon > 0$ を $c \in (a_1 + \varepsilon, a_2 - \varepsilon)$ となるように選ぶ。 $f^{-1}[a_1 + \varepsilon, a_2 - \varepsilon]$ 上には f の臨界点が存在しないので, 定理 1.3 より, 任意の $t \in [a_1 + \varepsilon, a_2 - \varepsilon]$ に対して, $f^{-1}[a_1 + \varepsilon, a_2 - \varepsilon]$ と $f^{-1}(t) \times [a_1 + \varepsilon, a_2 - \varepsilon]$ は微分同相である。特に, $f^{-1}(a_1 + \varepsilon)$, $f^{-1}(c)$, $f^{-1}(a_2 - \varepsilon)$ は互いに微分同相であり, $\lim_{\varepsilon \downarrow} f^{-1}(a_1 + \varepsilon) = p_1$ かつ $\lim_{\varepsilon \downarrow} f^{-1}(a_2 - \varepsilon) = p_2$ なので,

$$M \stackrel{\text{同相}}{\simeq} \frac{f^{-1}(c) \times [a_1, a_2]}{(f^{-1}(c) \times \{a_1\}, f^{-1}(c) \times \{a_2\})} = f^{-1}(c) \text{ 上の懸垂} =: \Sigma$$

であることがわかる。 M は多様体であるので, p_1 と p_2 において m 次元局所ユークリッド的である。よって, 上の関係式より, Σ は懸垂点において m 次元局所ユークリッド的である。従って, メイザー・ブラウンの定理より, M は $\mathbb{S}^m$ に同相である。 $\square$

1.3 講演のテーマ

講演のテーマは,

定理 1.5 をリプシッツ関数へ拡張すること

である。このため, 滑らかな関数に対する臨界点の概念を拡張する必要がある。そこで, 先ず, 本研究では薄滑解析を雇うことにより, 滑らかな関数に対する臨界点の概念をリプシッツ関数へ拡張する (第 2 節で説明)。次に基本定理に対応する命題を近似理論の立場から確立し, それらを適用することにより定理 1.5 をリプシッツ関数へ拡張する (第 4 節で説明)。

^{*1} その主張は以下となる: $\varphi: \mathbb{S}^{m-1} \rightarrow \mathbb{S}^m$ を位相埋め込みとし, A を $\mathbb{S}^m \setminus \varphi(\mathbb{S}^{m-1})$ の連結成分の一つとする。(アレキサンダー双対性より, そのような連結成分は二つのみである。) もし A の閉包 $\bar{A}$ が境界付きの多様体であるならば, $\bar{A}$ は m 次元開円板に同相である。なお, 同年同じ雑誌にモース [14] によるシェーンフリースの定理の拡張定理が掲載されている。

2 薄滑解析 (Nonsmooth Analysis)

薄滑解析とは、R.T. ロッカフェラー [18] による凸解析をユークリッド空間の間のリプシッツ写像へ拡張したものであり、その創始者は F.H. クラークである。本節では、薄滑解析における微分の概念をリーマン多様体の間のリプシッツ写像へ拡張する。

2.1 リプシッツ写像の微分

以下、 M を m 次元リーマン多様体、 N を n 次元リーマン多様体とし、中心が $p \in M$ 半径 $r > 0$ の距離開球を $B_r(p)$ で表す ($p \in N$ のときも同様)。更に、 $F : M \rightarrow N$ をリプシッツ写像とする。このとき、ラーデマッヘルの定理 [16] より、ルベグ測度零集合 $E_F \subset M$ で、 $M \setminus E_F$ 上で dF が存在するものが取れる。

各 $p \in M$ に対し、 $T_p M$ から $T_{F(p)} N$ への線形写像全体からなる集合を $\mathcal{L}(p, F(p))$ で表す。線形代数の一般論より、 $\mathcal{L}(p, F(p))$ は nm 次元実ベクトル空間である。そこで、 $\mathcal{L}(p, F(p))$ に位相を作用素ノルム $\|G\| := \sup_{\|v\| \leq 1} \|G(v)\|$, $\forall G \in \mathcal{L}(p, F(p))$ によって与える。

定義 2.1 (クラーク・近藤, [4, 8]) 各 $p \in M$ に対して、

$$K_F(p) := \left\{ G \in \mathcal{L}(p, F(p)) \mid \begin{array}{l} \exists \{x_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset B_{r(p)}(p) \setminus E_F \text{ s.t. } x_i \rightarrow p, \\ \tau_{F(p)}^{F(x_i)} \circ dF_{x_i} \circ \tau_{x_i}^p \rightarrow G \text{ as } i \rightarrow \infty \end{array} \right\}$$

とおく。ここで、 $B_{r(p)}(p)$ は強凸距離開球^{*2}を表し、写像 $\tau_{x_i}^p : T_p M \rightarrow T_{x_i} M$ は p と x_i を結ぶ最短測地線に沿った平行移動を表す。 $(\tau_{F(p)}^{F(x_i)} : T_{F(x_i)} N \rightarrow T_{F(p)} N$ も同様である。) ただし、像 $F(B_{r(p)}(p))$ は $F(p)$ を中心としたある強凸距離開球に含まれるものとする^{*3}。このとき、 $K_F(p)$ の凸包を p における F の一般化された微分と呼び、

$$\partial F(p)$$

で表す。

注意 2.2 以下、 $p \in M$ を任意に取り固定する。

- (1) $\partial F(p)$ は、Clarke が初めに同じ次元のユークリッド空間の間のリプシッツ写像に対して定義し、その後、講演者によりリーマン多様体の間のリプシッツ写像に対して、定義 2.1. にあるように平行移動を導入することにより内在的に定式化された。このため、クラーク・近藤とクレジットした。
- (2) $\partial F(p)$ の定義より、 $\partial F(p)$ は $\mathcal{L}(p, F(p))$ のコンパクトな凸部分集合である。また、 $\partial F(p)$ は $K_F(p)$ を含む最小の凸集合でもある。

^{*2} $B_{r(p)}(p)$ が強凸距離開球であるとは、 $\forall x, y \in \overline{B_{r(p)}(p)}$ に対し、 x と y を結ぶ最短測地線 $\gamma : [0, 1]$ で、 $\gamma(0, 1) \subset B_{r(p)}(p)$ を満たすものが取れるときをいう。また、そのような距離開球の存在は J.H.C. ホワイトヘッド ([23]) によって示された。

^{*3} つまり、 F の連続性により、そのように半径 $r(p)$ を調整しているという意味である。

(3) もし F が C^1 であるならば, $\partial F(p) = \{dF_p\}$ である。従って, 一般化された微分は滑らかな写像の族を含むため, 滑らかな写像に関する結果を一般化された微分の立場から拡張できる。

(4) ∂F は M 上で上半連続である, すなわち, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, 正の数 $\mu(p, \varepsilon) \in (0, r(p))$ で,

$$\tau_{F(p)}^{F(x)} \circ \partial F(x) \circ \tau_x^p \subset U_\varepsilon(\partial F(p)), \quad \forall x \in B_{\mu(p, \varepsilon)}(p)$$

を満たすものが取れる ([8, Lemma 3.5])。ここで, $r(p)$ は強凸距離開球の半径であり, $U_\varepsilon(\partial F(p))$ は $\mathcal{L}(p, F(p))$ 内の $\partial F(p)$ の ε -近傍を表す。

定義 2.3 (近藤, [8]) $p \in M$ がクラークの意味で F の非特異点であるとは, 任意の $f \in \partial F(p)$ に対して, $\text{rank}(f) = \min\{m, n\}$ を満たすときをいう。

注意 2.4

(1) $p \in M$ がクラークの意味で F の非特異点であるとき, ∂F の上半連続性より, 正の数 $\lambda(p) > 0$ で, $B_{2\lambda(p)}(p)$ 上の任意の点がクラークの意味で F の非特異点であるものが取れる ([8, Propositions 3.6, 3.7])。

(2) $N = \mathbb{R}$ の場合 (すなわち, F はリプシッツ関数), $p \in M$ がクラークの意味で F の特異点であるための必要かつ十分条件は $g \in \partial F(p)$ で, $\text{rank}(g) = 0$ を満たすものが取れるときをいう。

例 2.5 関数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$f(x) := \begin{cases} x^2, & x \geq 2, \\ x + 2, & x \in [-1, 2], \\ x^2, & x \leq -1 \end{cases}$$

と定める。 f は凸関数であるので, リプシッツである。また, f は $x = -1, 2$ において微分不可能である。このとき,

$$f'(x) = \begin{cases} 2x, & x > 2, \\ 1, & x \in (-1, 2), \\ 2x, & x < -1 \end{cases}$$

なので, 任意の $\lambda \in [0, 1]$ に対して,

$$(1 - \lambda) \lim_{x \downarrow -1} f'(x) + \lambda \lim_{x \uparrow -1} f'(x) = 1 - 3\lambda, \quad (1 - \lambda) \lim_{x \downarrow 2} f'(x) + \lambda \lim_{x \uparrow 2} f'(x) = 4 - 3\lambda$$

よって, $df_p((d/dx)|_p) = (df/dx)(p) = f'(p)$ ($p \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}$) に注意すれば, $x = -1$ と $x = 2$ における f の一般化された微分は, それぞれ

$$\partial f(-1) = \{1 - 3\lambda \mid \lambda \in [0, 1]\} = [-2, 1], \quad \partial f(2) = \{4 - 3\lambda \mid \lambda \in [0, 1]\} = [1, 4]$$

となる。ところで、 $0 \in \partial f(-1) = [-2, 1]$ なので、 $x = -1$ は F の特異点である。特に、 $1 = f(-1) = \min_{x \in \mathbb{R}} f(x)$ である。一方、 $0 \notin \partial f(2) = [1, 4]$ なので、 $x = 2$ は f の非特異点である。特に f は $x = 2$ の近傍で増加関数である。従って、この例からも分かるように、滑らかな関数を微分をして臨界点を求めている時と同じ感覚で、一般化された微分を用いてリプシッツ関数の臨界点（特異点）の有無を調べることができるのである。

例 2.6 ここでは、よりワイルドな関数の一般化された微分を見ていく。関数 $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$g(x) := \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & (x \neq 0), \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

と定める。 g は局所リプシッツ関数である。さて、 g は $\mathbb{R}$ 上で微分可能であるが、 $g'(x) = 2x \sin(1/x) - \cos(1/x)$ より、 $x = 0$ で C^1 ではない。そこで、以下、 $x = 0$ における g の一般化された微分を求めて行く。 $|\cos(1/x)| \leq 1$ なので、 g のグラフ $y = g(x)$ の接線でその傾きが同じであるような定義域 $\mathbb{R}$ 上の点列を選ぶことができる^{*4}。よって、集合

$$K_g(0) := \left\{ \alpha \in \mathbb{R} = T_0 \mathbb{R} \mid \begin{array}{l} \exists \{x_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R} \setminus \{0\} \text{ s.t. } x_i \rightarrow 0, \\ g'(x_i) \rightarrow \alpha \text{ as } i \rightarrow \infty \end{array} \right\}$$

の凸包を $\partial g(0)$ で表すとき、 $|\cos(1/x)| \leq 1$ より、 $K_g(0) = [0, 1]$ なので、注意 2.2 の (2) より $\partial g(0) = [-1, 1]$ である。従って、 $0 \in \partial g(0)$ なので、 $x = 0$ は g の特異点である。

2.2 リプシッツ関数の勾配

さて、我々のテーマは定理 1.1 をリプシッツ関数へ拡張することであった。よって、ここでは、リプシッツ関数の勾配（一般化された勾配）を定義し、滑らかな関数の臨界点の概念をリプシッツ関数へ拡張する：

定義 2.7 (近藤, [8]) $F : M \rightarrow \mathbb{R}$ をリプシッツ関数とし、 $p \in M$ を任意に取り固定する。このとき、集合

$$\left\{ w \in T_p M \mid \begin{array}{l} \exists \{x_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset B_{r(p)}(p) \setminus E_F \text{ s.t. } x_i \rightarrow p, \\ \nabla F(x_i) \rightarrow w \text{ as } i \rightarrow \infty \end{array} \right\}$$

の凸包を $\circledast_F(p)$ で表し、 p における F の一般化された勾配と呼ぶ。ここで、 ∇F は $M \setminus E_F$ 上の F の勾配ベクトル場を表す。なお、この定義より、 $\circledast_F(p)$ は $T_p M$ のコンパクトな凸部分集合である。

定義 2.8 (近藤, [8]) $F : M \rightarrow \mathbb{R}$ をリプシッツ関数とする。このとき、 $p \in M$ がクラークの意味で F の臨界点であるとは、 $o_p \in \circledast_F(p)$ であるときをいう。ここで、 o_p は $T_p M$ の原点を表す。

^{*4}例えば、各 $i \in \mathbb{N}$ に対して、 $1/x_i := \pi/3 + 2(i-1)\pi$ とおくと、点列 $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ は $\lim_{i \rightarrow \infty} x_i = 0$ 、 $\lim_{i \rightarrow \infty} g'(x_i) = -1/2$ を満たす。すなわち、 $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ は、各 $(x_i, g(x_i))$ における $y = g(x)$ 上の接線の傾きが $-1/2$ である点列である

注意 2.9 (近藤, [8, Lemma 2.6]) $F : M \rightarrow \mathbb{R}$ をリプシッツ関数とすると、 $p \in M$ がクラークの意味で F の特異点であるための必要かつ十分条件は $p \in M$ がその意味で F の臨界点である。

3 グローヴ・塩濱の理論：一般化された勾配の例として

以下、 X を m 次元完備リーマン多様体、 d を X の距離関数とし、 $p \in M$ を任意に取り固定する。このとき、関数 $d_p : X \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$d_p(x) := d(p, x), \quad \forall x \in X$$

と定める。 d_p は 1-リプシッツ関数であることに注意。

定義 3.1 (グローヴ・塩濱, [6]) $q \in X$ が**グローヴ・塩濱の意味で d_p の臨界点**であるとは、任意の $v \in T_q X$ に対して、 $q = \gamma(0)$ と $p = \gamma(1)$ を結ぶ最短測地線 $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ で、 $\angle(v, \gamma'(0)) \leq \pi/2$ を満たすものが取れるときをいう。なお、 p も便宜上グローヴ・塩濱の意味で d_p の臨界点と呼ぶ。

注意 3.2 $q \in M \setminus \{p\}$ をグローヴ・塩濱の意味で d_p の臨界点であるとしよう。このとき、定義より、 q は p の最小点である。よって、 d_p は q で微分不可能である。

定義 3.1 の意義は、 d_p の臨界点が存在しない領域においてモースの基本定理 (定理 1.3) が成り立つ点にある。その事実を M. グロモフによる補強版で紹介する：

命題 3.3 (グロモフのアイソトピー命題, [5]) $0 < r_1 < r_2 \leq \infty$ とする。もし $\overline{B_{r_2}(p)} \setminus B_{r_1}(p)$ 上にグローヴ・塩濱の意味で d_p の臨界点が存在しなければ、任意の $t \in [r_1, r_2]$ に対して $\overline{B_{r_2}(p)} \setminus B_{r_1}(p)$ は $\partial B_t(p) \times [r_1, r_2]$ と同相である。

更に、グローヴ・塩濱の理論の強力なところは、 d_p の臨界点にトポノゴフの比較定理を適用し、命題 3.3 と合わせることで、次の美しい球面定理を生み出せる点である：

定理 3.4 (直径球面定理, [6]) もし X の断面曲率が 1 以上かつ X の直径が $\pi/2$ より大きければ、 X は $\mathbb{S}^m$ に同相である。

定理 3.4 の証明. $p, q \in X$ を X の直径 $\text{diam}(X)$ を定める点とし、 $a := \text{diam}(X)$ とおく。トポノゴフの比較定理より、 d_p のグローヴ・塩濱の意味での臨界点は p と q のみであることがわかる。更に、指数写像は局所微分同相なので、 X のコンパクト性より、同じ半径を持つ互いに交わらない距離開球 $B_r(p)$ と $B_r(q)$ で、その閉包が m 次元円盤に微分同相となるものが取れる。よって、 $X \setminus \overline{B_r(p)} \cup \overline{B_r(q)}$ 上に d_p の臨界点は存在しないので、命題 3.3 より、 $d_p^{-1}(-\infty, a-r]$ と $d_p^{-1}(-\infty, r] = \overline{B_r(p)}$ は同相である。よって、 X は本質的に円板 $\overline{B_r(p)}$ と $\overline{B_r(q)}$ によって構成されているので、 X は $\overline{B_r(p)}$ と $\overline{B_r(q)}$ の境界を貼り合わせたものと同相である。従って、 X は $\mathbb{S}^m$ に同相である。 $\square$

定理 3.4 の証明から分かる重要な事実は、直径球面定理は実質距離関数に関するレーブの球面定理であるということである。すなわち、「 X の断面曲率が 1 以上かつ X の直径が $\pi/2$ より大」という十分条件より、我々は d_p のグローヴ・塩漬の意味での臨界点が p と q のみ (2 点のみ) であることを示しているの、その十分条件を「 $p \in X$ に対し、 d_p がグローヴ・塩漬の意味でちょうど 2 つの臨界点 p, q を持つ」とすれば、距離関数に関するレーブの球面定理を得る：

定理 3.5 (距離関数に関するレーブの球面定理) $p \in X$ とする。もし X が閉であり、 d_p がグローヴ・塩漬の意味でちょうど 2 つの臨界点 p, q を持てば、 X は $\mathbb{S}^m$ に同相である。

注意 3.6

- (1) 距離関数はリプシッツなので、**定理 3.5 は本講演のテーマに関して先駆的工作と位置付けることができる。**よって、薄滑解析を通して定義した一般化された勾配の臨界点の概念がグローヴ・塩漬の距離関数の臨界点の概念を含む必要がある。幸いなことに、[8, Proposition 2.18] と注意 2.9 より、次がわかる： $p \in X$ を任意に取り固定する。このとき、次の (a), (b), (c) は同値である：
 - (a) q がグローヴ・塩漬の意味で d_p の臨界点である。
 - (b) q がクラークの意味で d_p の臨界点である。
 - (c) q がクラークの意味で d_p の特異点である。
- (2) よって、薄滑解析のリプシッツ写像に対する特異点の概念は、**グローヴ・塩漬による距離関数の臨界点理論を含む枠組みの一つ**と言っても良いであろう。

4 主結果とその証明

4.1 主結果

本講演の主結果は以下となる。

主結果 (近藤, [8, Theorem 1.7]) m 次元閉リーマン多様体 M 上にリプシッツ関数でクラークの意味で特異点をちょうど 2 つ持つものが存在すれば、 M は $\mathbb{S}^m$ に同相である。

主結果の証明において鍵となる結果は、定理 1.3 に対応する近似理論を通した命題とメイザー・ブラウンの定理である。定理 1.3 に対応する命題は証明内で言及する。

4.2 主結果の証明

$F : M \rightarrow \mathbb{R}$ をリプシッツ関数でクラークの意味で特異点をちょうど 2 つ持つものとする。それら特異点を $z_1, z_2 \in M$ とする。注意 2.9 より、 $z_1, z_2 \in M$ はクラークの意味で F の臨界点である。よって、 M はコンパクトなので、最大値・最小値の定理より、 $a_1 := F(z_1) = \min_{x \in M} F(x)$ かつ $a_2 := F(z_2) = \max_{y \in M} F(y)$ と仮定できる。 F の

連続性より, $B_r(z_1) \cap B_r(z_2) = \emptyset$ を満たす任意の $r > 0$ に対して, $b_i(r) \in (a_1, a_2)$ で, $F^{-1}(b_i(r)) \subset B_r(z_i)$ ($i = 1, 2$) を満たすものが取れる。

再び M のコンパクト性より, 強凸距離開球 $B_{r(p_1)}(p_1), \dots, B_{r(p_k)}(p_k) \subset M$ で, M の被覆となるものが有限個取れる。ただし, $r(p_i) \in (0, \text{inj}(M)/2)$ ($i = 1, 2, \dots, k$) である。ここで, $\text{inj}(M)$ は M の単射半径を表す。 $\varepsilon \in (0, \text{inj}(M)/2)$ を任意に取り固定する。各 $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ に対して, F とリーマン軟化子 $\rho_\varepsilon^{(i)}$ との畳み込み $F_\varepsilon^{(i)}$ を

$$F_\varepsilon^{(i)}(q) := \int_{y \in T_{p_i} M} \rho_\varepsilon^{(i)}(y) (F \circ \exp_{p_i})(\exp_{p_i}^{-1} q - y) dy, \quad \forall q \in B_{r(p_i)}(p_i)$$

と定める。 $(F_\varepsilon^{(i)})$ は F の局所的な C^∞ 近似である。) 更に, $\{\psi_i\}_{i=1}^k$ を $\{B_{r(p_i)}(p_i)\}_{i=1}^k$ に従属する 1 の分割とし,

$$F_\varepsilon(x) := \sum_{i=1}^k \psi_i(x) \cdot F_\varepsilon^{(i)}(x), \quad \forall x \in M$$

とおくと, $\varepsilon \downarrow 0$ のとき, F_ε は F に一様収束することがわかる。すなわち, F_ε は F の大域的な C^∞ 近似である。今,

$$M(r) := F^{-1}([b_1(r), b_2(r)])$$

とおく。 $M(r)$ 上には F の特異点が存在しないので, 注意 2.4 の (1) および F_ε の F への一様収束性より, **定理 1.3 に対応する命題を得る**, すなわち, 任意の $q \in M(r)$ に対して, 2 つの正の数 $\lambda(q) > 0$, $\varepsilon(q) \in (0, \text{inj}(M)/2)$ で, もし $\varepsilon \in (0, \varepsilon(q))$ ならば

$$\nabla F_\varepsilon(x) \neq 0, \quad \forall x \in B_{\lambda(q)}(q) \quad (0.1)$$

を満たすものが取れる。

$M(r)$ はコンパクトなので, (0.1) を満たす距離開球 $B_{\lambda(q_1)}(q_1), B_{\lambda(q_2)}(q_2), \dots, B_{\lambda(q_\ell)}(q_\ell)$ で, $M(r)$ の被覆となるものが有限個取れる。今, $V := \bigcup_{i=1}^\ell B_{\lambda(q_i)}(q_i)$, $\varepsilon_0 := \min\{\lambda(q_1), \lambda(q_2), \dots, \lambda(q_\ell)\}$ とおくと, $M(r) \subset V$ であり, かつ任意の $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ に対して F_ε は V 上にモースの意味で臨界点を持たない。ところで, $B_r(z_i) \cap V$ ($i = 1, 2$) は $F^{-1}(b_i(r))$ の開近傍なので, F_ε の F への一様収束性より, 正の数 $\varepsilon_1 > 0$ で,

$$F_\varepsilon^{-1}(b_i(r)) \subset B_r(z_i) \cap V, \quad \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_1) \quad (i = 1, 2)$$

を満たすものが取れる。特に,

$$M_\varepsilon(r) := F_\varepsilon^{-1}([b_1(r), b_2(r)])$$

とおくと, $M_\varepsilon(r) \subset V$ ($\varepsilon \in (0, \varepsilon_1)$) である。従って, $\varepsilon_2 := \min\{\varepsilon_0, \varepsilon_1\}$ とおくと, 任意の $\varepsilon \in (0, \varepsilon_2)$ に対して F_ε は $M_\varepsilon(r)$ 上に臨界点を持たないので, 任意の $\forall t \in [b_1(r), b_2(r)]$ に対して $F_\varepsilon^{-1}(t)$ は M の $(m-1)$ 次元コンパクト正則部分多様体である。

$c := (a_1 + a_2)/2$ とおく。 $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1)$ を任意に取り固定する。 各 $i \in \{1, 2\}$ に対して、 $\lim_{r \downarrow 0} b_i(r) = a_i$ であるので、 $c \in (b_1(r), b_2(r))$ と仮定してもよい。 定理 1.3 より、 $M_\varepsilon(r)$ は $F_\varepsilon^{-1}(t) \times [b_1(r), b_2(r)]$ ($t \in [b_1(r), b_2(r)]$) に微分同相である。 また、 $\lim_{r \downarrow 0} b_i(r) = a_i$ かつ $F_\varepsilon^{-1}(b_i(r)) \subset B_r(z_i)$ なので、 $\lim_{r \downarrow 0} F_\varepsilon^{-1}(b_i(r)) = z_i$ を得る。 特に、 $\lim_{r \downarrow 0} M_\varepsilon(r) = M$ である。 従って、 $F_\varepsilon^{-1}(b_1(r)), F_\varepsilon^{-1}(c), F_\varepsilon^{-1}(b_2(r))$ は互いに微分同相であるので、

$$M = \lim_{r \downarrow 0} M_\varepsilon(r) \stackrel{\text{同相}}{\simeq} \frac{F_\varepsilon^{-1}(c) \times [a_1, a_2]}{(F_\varepsilon^{-1}(c) \times \{a_1\}, F_\varepsilon^{-1}(c) \times \{a_2\})} = F_\varepsilon^{-1}(c) \text{ 上の懸垂 } =: \Sigma$$

である。 M は多様体であるので、 p_1 と p_2 において m 次元局所ユークリッド的である。 よって、 上の関係式より、 Σ は懸垂点において m 次元局所ユークリッド的である。 従って、 メイザー・ブラウンの定理より、 M は S^m に同相である。 $\square$

参考文献

- [1] M. Brown, *A proof of the generalized Schoenflies theorem*, Bull. Amer. Math. Soc. **66** (1960), 74–76.
- [2] M. Brown, *The monotone union of open n -cells is an open n -cell*, Proc. Amer. Math. Soc. **12** (1961), 812–814.
- [3] J. Cerf, *Sur les difféomorphismes de la sphère de dimension trois ($\Gamma_4 = 0$)*, Lecture Notes in Math., **53**. Springer-Verlag, 1968.
- [4] F.H. Clarke, *On the inverse function theorem*, Pacific J. Math. **64** (1976), 97–102.
- [5] M. Gromov, *Curvature, diameter and Betti numbers*, Comment. Math. Helv. **56** (1981), 179–195.
- [6] K. Grove and K. Shiohama, *A generalized sphere theorem*, Ann. of Math. (2) **106** (1977), 201–211.
- [7] M. Kervaire and J. Milnor, *Groups of homotopy spheres. I*, Ann. of Math. (2) **77** (1963), 504–537.
- [8] K. Kondo, *Approximations of Lipschitz maps via Ehresmann fibrations and Reeb’s sphere theorem for Lipschitz functions*, J. Math. Soc. Japan **74** (2022), no. 2, 521–548.
- [9] Y. Matsumoto, “An Introduction to Morse Theory”, Translations of Mathematical Monographs, **208**. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2002. Translated from the 1997 Japanese original by Kiki Hudson and Masahico Saito.
- [10] B.C. Mazur, *On embeddings of spheres*, Bull. Amer. Math. Soc. **65** (1959), 59–65.
- [11] B.C. Mazur, *On embeddings of spheres*, Acta Math. **105** (1961), 1–17.
- [12] J. Milnor, *Sommes de variétés différentiables et structures différentiables des sphères*, Bull. Soc. Math. France **87** (1959), 439–444.
- [13] J. Milnor, “Morse theory”, Annals of Mathematics Studies, **51**. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1963. Notes by M. Spivak and R. Wells.
- [14] M. Morse, *A reduction of the Schoenflies extension problem*, Bull. Amer. Math. Soc. **66** (1960), 113–115.
- [15] R. Palais, *Extending diffeomorphisms*, Proc. Amer. Math. Soc. **11** (1960), 274–277.

- [16] H. Rademacher, *Über partielle und totale differenzierbarkeit von Funktionen mehrerer Variablen und über die Transformation der Doppelintegrale*, Math. Ann. **79** (1919), 340–359.
- [17] G. Reeb, *Sur certaines propriétés topologiques des variétés feuilletées*, Publ. Inst. Math. Univ. Strasbourg 11, pp. 5–89, 155–156. Actualités Sci. Ind., no. 1183, Hermann & Cie., Paris, 1952.
- [18] R.T. Rockafellar, “Convex Analysis”, Princeton Landmarks in Mathematics, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1997. Reprint of the 1970 original.
- [19] R.H. Rosen, *A weak form of the star conjecture for manifolds*, Notices Amer. Math. Soc. **7** (1960), 380. Abstract No. 570-28.
- [20] R.H. Rosen, *Stellar neighborhoods in polyhedral manifolds*, Proc. Amer. Math. Soc. **14** (1963), 401–406.
- [21] S. Smale, *Diffeomorphisms of the 2-sphere*, Proc. Amer. Math. Soc. **10** (1959) 621–626.
- [22] S. Smale, *Generalized Poincaré’s conjecture in dimensions greater than four*, Ann. of Math. **74** (1961), 391–406.
- [23] J.H.C. Whitehead, *On the covering of a complete space by the geodesics through a point*, Ann. of Math. (2) **36** (1935), 679–704.