結合的グラスマン多様体の部分多様体

佐々木優 (東京工業高等専門学校)

概要

本講演では，コンパクト四元数対称空間の 1 つである G 型コンパクト対称空間を取り上げ，四元数構造に関して良い性質をもつ部分多様体の構成を紹介する．とくに，6 次元球面の部分多様体を用いた構成，およびイソトロピー群作用を用いた構成の 2 つを取り上げる．本稿の内容は，[9] の内容に基づく．

1　四元数対称空間

$4n$ $(n \geq 2)$ 次元リーマン多様体 (M, g) について，接束 TM の自己準同型束 $\mathrm{End}TM$ の 3 次元部分束 $\tilde{Q}$ で次を満たすものが存在するとき，$(M, g, \tilde{Q})$ を四元数ケーラー多様体という．

(1) 各 $x \in M$ に対して，x の近傍上で定義された $\tilde{Q}$ の局所枠場 $\{I, J, K\}$ で次を満たすものが存在する．

$$I^2 = J^2 = K^2 = -\mathrm{Id}, \quad IJ = -JI = K, \quad JK = -KJ = I, \quad KI = -IK = J.$$

(2) 任意の $x \in M, I \in \tilde{Q}_x, X, Y \in T_xM$ について

$$g\big(I(X), Y\big) + g\big(X, I(Y)\big) = 0.$$

(3) $\tilde{Q}$ は g によるリーマン接続に関して平行.

四元数ケーラー多様体 $(M, g, \tilde{Q})$ に対して，$Q = \{A \in \tilde{Q}\ ;\ A^2 = -\mathrm{Id}\}$ は M 上の S^2 束となる．Q を M のツイスター空間という．Q は複素多様体になることが知られており，とくに正則接触構造を持つ [8]．リッチ曲率が 0 でない四元数ケーラー多様体で，対称空間になるものを四元数対称空間という．四元数対称空間は Wolf により分類されており，とくに既約コンパクト型四元数対称空間 G/K は以下のように分類されている [12].

G	K	$\dim M$	G	K	$\dim M$
$Sp(n+1)$	$Sp(1) \times Sp(n)$	$4n(n \geq 2)$	G_2	$SO(4)$	8
$SU(n+2)$	$S(U(2) \times U(n))$	$4n(n \geq 2)$	F_4	$(Sp(1) \times Sp(3))/\mathbb{Z}_2$	28
$SO(7)$	$SO(4) \times SO(3)$	12	E_6	$(Sp(1) \times SU(6))/\mathbb{Z}_2$	40
$SO(n+4)$	$SO(4) \times SO(n)$	$4n(n \geq 3)$	E_7	$(Sp(1) \times Spin(12))/\mathbb{Z}_2$	64
			E_8	$(Sp(1) \times E_7)/\mathbb{Z}_2$	112

表 1　既約コンパクト型四元数対称空間

本稿では，コンパクト四元数対称空間である G 型コンパクト対称空間 $G_2/SO(4)$ を取り上げ，その部分多様体の四元数構造に関する性質を紹介する．そのために，四元数ケーラー多様体の部分多様体の紹介を行う．M を四元数ケーラー多様体とし，N を多様体 $(\dim N < \dim M)$，$f : N \to M$ をはめ込みとする．f^*Q を f による Q の引き戻し束とする．このとき，f^*Q の切断 I で，各 $x \in N$ に対して $I(df(T_xN)) \subset df(T_xN)$ を満たすものが存在するとき，f を概複素はめ込みという．I を f

の概複素構造という．$Q^I := \{J \in f^*Q\ ;\ IJ = -JI\}$ とおくと，Q^I は N の S^1 束となる．このとき，任意の $x \in N, J \in Q^I_x$ について $df(T_xN) \perp J(df(T_xN))$ が成り立つとき，f を全複素はめ込みという．f が全複素であれば，概複素構造 I は可積分であることが知られている [11].

概エルミート多様体の概複素部分多様体のアナロジーとして，CR 部分多様体が存在する．H を概エルミート多様体とし，$U \subset H$ を部分多様体とする．I を H の概複素構造とする．このとき，U 上の接分布 V, W で次を満たすものが存在するとき，U を H の CR 部分多様体と呼ぶ [1].

$$V + W = TU,\ V \perp W,\ I(V) \subset V,\ I(W) \subset (TU)^{\perp}.$$

ただし，$(TU)^{\perp}$ を U の法束とする．CR 部分多様体の典型例として実超曲面が挙げられる．

概エルミート多様体の CR 部分多様体を元にし，四元数ケーラー多様体 M における概複素はめ込みのアナロジーを考えたい．N を多様体とし，$f : N \to M$ をはめ込みとする．このとき，f^*Q の切断 I および N 上の接分布 V, W で次を満たすものが存在するとき，f を CR はめ込みと呼ぶことにする．

$$V + W = TN,\ df(V) \perp df(W),\ I(df(V)) \subset df(V),\ I(df(W)) \subset (df(TN))^{\perp}.$$

さらに，任意の $x \in N$ および $J \in Q^I_x$ について，T_xN の部分空間 V_J, W_J で

$$V_J + W_J = TN,\ df(V_J) \perp df(W_J),\ I(df(V_J)) \subset df(V_J),\ I(df(W_J)) \subset (df(TN))^{\perp}.$$

を満たし，さらに $\dim V_J$ が $x \in N, J \in Q^I_x$ の取り方によらないとき，f を全 CR はめ込みと呼ぶことにする．概複素はめ込みは CR はめ込みであり，全複素はめ込みは全 CR はめ込みになっている．四元数ケーラー多様体の実超曲面は，Q の制限束への切断が存在するとは限らないため，CR 部分多様体になるとは限らない．

本稿では，G 型コンパクト対称空間 $G_2/SO(4)$ への全複素はめ込みおよび全 CR はめ込みの例を紹介する．

2　結合的グラスマン多様体

$e_0, \cdots, e_7$ を基底とする 8 次元ベクトル空間 $\mathbb{O} = \sum_{i=0}^{7} \mathbb{R}e_i$ に，次のように積を定めたものを八元数と呼ぶ．e_0 を積の単位元とし単に 1 と記す．さらに，各 $1 \leq i \neq j \leq 7$ について $e_i^2 = -1, e_ie_j = -e_je_i$ とし，分配則を満たすものとする．e_i, e_j の積については，次ページ図 1 の各直線および円によって定める．例えば，$e_1e_2 = e_3, e_4e_1 = -e_5$．さらに，$\mathrm{Im}\mathbb{O} = \sum_{i=1}^{7} \mathbb{R}e_i$ とおく．八元数について [13] が詳しい．一般に，八元数 $\mathbb{O}$ では結合則が成り立たないことが知られている．実際，

$$e_1(e_4e_7) = e_1e_3 = -e_2, \quad (e_1e_4)e_7 = e_5e_7 = e_2$$

となる．しかしながら，$\mathbb{R}e_1 + \mathbb{R}e_2 + \mathbb{R}e_3$ などの図 1 の各直線や円上にある 3 つの e_i たちにより張られている 3 次元部分空間においては，結合則が成り立っている．結合則が成り立つ 3 次元部分空間 $V \subset \mathrm{Im}\mathbb{O}$ を結合的部分空間といい，$\mathrm{Im}\mathbb{O}$ の結合的部分空間全体による集合を結合的グラスマン多様体と呼ぶ [7]．本講演では，結合的グラスマン多様体を $G_{\mathbb{H}}(\mathbb{O})$ と記す．

八元数 $\mathbb{O}$ の線形自己同型 f で，$f(xy) = f(x)f(y)\ (x, y \in \mathbb{O})$ を満たすものを $\mathbb{O}$ の自己同型と呼ぶ．とくに，$\mathbb{O}$ の自己同型全体による群を例外型コンパクトリー群 G_2 という．$x = \sum_{i=0}^{7} x_ie_i \in \mathbb{O}$ について，x の共役 $\bar{x}$ を $\bar{x} = x_0 - \sum_{i=1}^{7} x_ie_i$ により定める．$g \in G_2$ について，$e_0 = 1$ が積の単位元であることから，$g(1) = 1$ であり $\overline{g(x)} = g(\bar{x})\ (x \in \mathbb{O})$ となることが分かる．八元数 $\mathbb{O}$ において，内積 $(\ ,\ )$ を $(x, y) = \frac{1}{2}(x\bar{y} + y\bar{x})$ により定める．とくに，$x = \sum_{i=0}^{7} x_ie_i, y = \sum_{i=0}^{7} y_ie_i$ に関して $(x, y) = \sum_{i=0}^{7} x_iy_i$ である．このとき，各 $g \in G_2$ について $(gx, gy) = (x, y)\ (x, y \in \mathbb{O})$ になり，

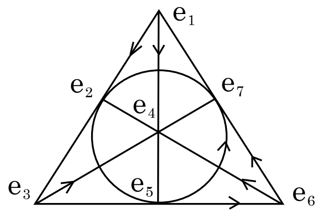

図 1　八元数の積

$g(\mathrm{Im}\mathbb{O}) \subset \mathrm{Im}\mathbb{O}$ であることから $G_2 \subset SO(7)$ となる．とくに，$\mathfrak{so}(7)$ の 14 次元リー部分環で，次の各元により張られるものが，G_2 のリー環を与えている．

$$
\left(\begin{array}{c|cc|cc|cc}
0 & & & & & & \\ \hline
 & & \lambda & & & & \\
 & -\lambda & & & & & \\ \hline
 & & & & \mu & & \\
 & & & -\mu & & & \\ \hline
 & & & & & & \nu \\
 & & & & & -\nu &
\end{array}\right),\quad
\left(\begin{array}{c|cc|cc|cc}
 & & -\lambda & & & & \\ \hline
 & 0 & & & & & \\
\lambda & & & & & & \\ \hline
 & & & & & -\mu & \\
 & & & & & & \nu \\ \hline
 & & & \mu & & & \\
 & & & & -\nu & &
\end{array}\right),
$$

$$
\left(\begin{array}{c|cc|cc|cc}
 & \lambda & & & & & \\ \hline
-\lambda & & & & & & \\
 & & 0 & & & & \\ \hline
 & & & & & & \mu \\
 & & & & & \nu & \\ \hline
 & & & & -\nu & & \\
 & & & -\mu & & &
\end{array}\right),\quad
\left(\begin{array}{c|cc|cc|cc}
 & & & & -\lambda & & \\ \hline
 & & & & & \mu & \\
 & & & & & & -\nu \\ \hline
 & & & 0 & & & \\
-\lambda & & & & & & \\ \hline
 & -\mu & & & & & \\
 & & \nu & & & &
\end{array}\right),
$$

$$
\left(\begin{array}{c|cc|cc|cc}
 & & & \lambda & & & \\ \hline
 & & & & & & -\nu \\
 & & & & & -\mu & \\ \hline
-\lambda & & & & & & \\
 & & & & 0 & & \\ \hline
 & & \mu & & & & \\
 & \nu & & & & &
\end{array}\right),\quad
\left(\begin{array}{c|cc|cc|cc}
 & & & & & & -\lambda \\ \hline
 & & & -\mu & & & \\
 & & & & \nu & & \\ \hline
 & \mu & & & & & \\
 & & -\nu & & & & \\ \hline
 & & & & & 0 & \\
\lambda & & & & & &
\end{array}\right),
$$

$$
\left(\begin{array}{c|cc|cc|cc}
 & & & & & \lambda & \\ \hline
 & & & & \mu & & \\
 & & & \nu & & & \\ \hline
 & & -\nu & & & & \\
 & -\mu & & & & & \\ \hline
-\lambda & & & & & & \\
 & & & & & & 0
\end{array}\right),
$$

ただし，$\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$ は $\lambda+\mu+\nu = 0$ を満たすとし，空白の成分には 0 が入っているものとする [13]．

G_2 が $\mathbb{O}$ の自己同型群であることから，$g \in G_2, V \in G_{\mathbb{H}}(\mathbb{O})$ について $g(V) \in G_{\mathbb{H}}(\mathbb{O})$ となり，G_2 が $G_{\mathbb{H}}(\mathbb{O})$ に作用している．とくに，この作用は推移的であり，$G_{\mathbb{H}}(\mathbb{O}) = G_2/SO(4)$ となる．これより，結合的グラスマン多様体は G 型コンパクト対称空間になる．各 $V \in G_{\mathbb{H}}(\mathbb{O})$ における点対称は，V に関する鏡映により与えられる．また，$G_3(\mathbb{R}^7)$ を $\mathbb{R}^7$ の 3 次元部分空間全体による実グラスマン多様体とすれば，自然に $G_{\mathbb{H}}(\mathbb{O}) \subset G_3(\mathbb{R}^7)$ とみなせるが，$G_{\mathbb{H}}(\mathbb{O})$ は $G_3(\mathbb{R}^7)$ の全測地的部分多様体になっている．

3　6 次元球面 S^6 と結合的グラスマン多様体

以下，6 次元球面を $\mathrm{Im}\mathbb{O}$ の単位球面であるとする．すなわち，$S^6 = \{x \in \mathrm{Im}\mathbb{O}\ ;\ (x,x) = 1\}$．各 $x \in S^6$ について，$T_xS^6 = \{y \in \mathrm{Im}\mathbb{O}\ ;\ (x,y) = 0\}$ となる．ところで，$a,b,c \in \mathrm{Im}\mathbb{O}$ について次が成り立つことが知られている．

$$a(ab) = (aa)b,\ (ab, ac) = (b,c).$$

また，各 $x \in S^6$ について $x^2 = -1$ となる．これより，S^6 上の $(1,1)$ テンソル J を以下のように定めれば，J は S^6 の概複素構造となる．

$$J_x : T_xS^6 \to T_xS^6\ ;\ y \mapsto xy.$$

J は可積分にならないことが知られており，(S^6, J) は概複素部分多様体である．さらに，$(\ ,\ )$ を S^6 に制限して得られるリーマン計量を同じ記号で表すと，$(S^6, J, (\ ,\ ))$ は概エルミート多様体となる．

S^6 の概エルミート構造から定義される部分多様体のクラスを紹介する．部分多様体 $N \subset S^6$ について，各 $x \in N$ に対して $J(T_xN) \subset T_xN$ が成り立つとき，N を概複素部分多様体という．概複素部分多様体については，その次元が必ず 2 になることが知られている [6]．また，概複素部分多様体は S^6 の極小部分多様体である．とくに，任意のコンパクトリーマン面は，S^6 の概複素部分多様体として実現できることが知られている [2]．また，3 次元部分多様体 $L \subset S^6$ について，各 $x \in L$ について $J(T_xL) \perp T_xL$ が成り立つとき，L をラグランジュ部分多様体という．ラグランジュ部分多様体も S^6 の極小部分多様体になることが知られている．さらに，概複素部分多様体とラグランジュ部分多様体のアナロジーとして，CR 部分多様体も定義することができる．

Enoyoshi-Tsukada らにより S^6 のラグランジュ部分多様体と結合的グラスマン多様体の関係が調べられている．ラグランジュ部分多様体 $L \subset S^6$ について，各 $x \in L$ に対して $(T_xL)^\perp \subset T_xS^6 \subset \mathrm{Im}\mathbb{O}$ が結合的部分空間になる．そこで，次のガウス写像を考える．

$$\phi_L : L \to G_{\mathbb{H}}(\mathbb{O})\ ;\ x \mapsto (T_xL)^\perp.$$

このガウス写像に関して，Enoyoshi-Tsukada は次の結果を得た．

定理 3.1. [5] ϕ_L は調和写像である．

この結果を受けて，S^6 のその他の部分多様体のクラスに関しても，ϕ_L と類似した良い性質を持ったガウス写像の構成が期待される．本研究では，概複素部分多様体および 3 次元 CR 部分多様体に関して，そのようなガウス写像の構成に取り組んだ．

N を S^6 の概複素部分多様体とする．S^6 の概複素構造 J の定義から，各 $x \in N$ ついて $x(T_xN) \subset T_xN$ となる．一般に，$a, b, c \in \mathrm{Im}\mathbb{O}$ $(a, b, c \neq 0)$ について，a, b, c が互いに直交してかつ $a(\mathbb{R}b + \mathbb{R}c) \subset \mathbb{R}b + \mathbb{R}c$ であれば，$\mathbb{R}a + \mathbb{R}b + \mathbb{R}c$ は結合的部分空間となることが知られている．この性質および $\dim N = 2$ であることから，$\mathbb{R}x + T_xN$ は $\mathrm{Im}\mathbb{O}$ の結合的部分空間になるので，次のガウス写像を考えることができる．

$$\phi_C : N \to G_{\mathbb{H}}(\mathbb{O})\ ;\ x \mapsto \mathbb{R}x + T_xN.$$

ところで，$\mathbb{R}^n$ の単位球面上の部分多様体 L $(\dim L = l < n-1)$ について，ガウス写像 $N \to G_{l+1}(\mathbb{R}^n)\ ;\ x \mapsto \mathbb{R}x + T_xL$ を Obata の球面ガウス写像という．ただし，$G_{l+1}(\mathbb{R}^n)$ は，$\mathbb{R}^n$ の $l+1$ 次元部分空間全体による実グラスマン多様体とする．$L \subset S^{n-1}$ が S^{n-1} の極小部分多様体であれば，Obata の球面ガウス写像は調和写像になることが知られている．$G_{\mathbb{H}}(\mathbb{O}) \subset G_3(\mathbb{R}^7)$ が全測地的部分多様体であること，および概複素部分多様体が S^6 の極小部分多様体であることから ϕ_C が調和写像になることがわかる．また，ϕ_C の $G_{\mathbb{H}}(\mathbb{O})$ の四元数構造に関する性質を調べ，上記の議論と合わせて次の主張を得た．

定理 3.2. [9] ϕ_C は調和写像であり，はめ込みであれば全複素はめ込みになる．

さらに，$N \subset S^6$ を 3 次元 CR 部分多様体とする．このとき，N 上の接分布 V, W で次を満たすものが存在する．

$$V + W = TN,\ V \perp W,\ J(V) \subset V,\ J(W) \subset (TN)^\perp.$$

このとき，$\dim V = 2, \dim W = 1$ となる．$J(V) \subset V$ であることから，この場合にも次のガウス写像を考えることができる．

$$\phi_{CR}\ :\ N \to G_{\mathbb{H}}(\mathbb{O})\ ;\ x \mapsto \mathbb{R}x + V_x.$$

ϕ_{CR} の性質を調べたところ，$G_{\mathbb{H}}(\mathbb{O})$ の四元数構造に関して次のことが分かった．

定理 3.3. [9] ϕ_{CR} がはめ込みであれば，ϕ_{CR} は CR はめ込みである．

4　結合的グラスマン多様体におけるイソトロピー群作用

本節では，さらなる CR はめ込みの例を紹介するため．結合的グラスマン多様体におけるイソトロピー群作用を考える．

M をコンパクト四元数対称空間とし，$\tilde{Q}$ を M の四元数構造，Q を M のツイスター空間とする．$o \in M$ を固定する．さらに，G を M の等長変換群の単位連結成分とし，o における G のイソトロピー群を K とおく．すなわち，$K = \{g \in G\ ;\ g(o) = o\}$．さらに，$\mathfrak{g}, \mathfrak{k}$ をそれぞれ G, K のリー環とし，$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{m}$ を標準分解とする．$\mathfrak{m} = T_oM$ である．このとき，$\mathfrak{k}$ の 3 次元イデアル $\mathfrak{s}$ で，$\mathrm{ad}(\mathfrak{s})|_{\mathfrak{m}} = \tilde{Q}_o$ となるものが存在することが知られている．さらに，$\mathrm{ad}(\mathfrak{s})|_{\mathfrak{m}}$ を G 作用で M 全体に定義することで，四元数構造 $\tilde{Q}$ が定まっている．$\mathfrak{k}_0$ を $\mathfrak{k}$ における $\mathfrak{s}$ の直交補空間とすれば，直和分解 $\mathfrak{k} = \mathfrak{s} + \mathfrak{k}_0$ が成り立つ．また，$\mathfrak{s}$ が $\mathfrak{k}$ のイデアルなので，$\mathfrak{k}$ の任意のリー部分代数は $\mathfrak{s}$ へ表現を持つ．

点 $p \in M$ $(p = g(o), g \in G)$ を通る K 軌道 $K(p)$ を考える．とくに，$\mathcal{O}_p = g^{-1}K(p) = g^{-1}Kg(o)$ を考える．このとき，$K_p = \{g \in K\ ;\ k(p) = p\}$ とすれば $\mathcal{O}_p = K/K_p$ である．さらに，K_p の単位連結成分を $(K_p)_0$ とおく．また，$\mathfrak{k}_p$ を K_p のリー環であるとする．このとき，$\mathfrak{k}_p$ が随伴表現の制限により $\mathfrak{s}$ に作用し，とくに K_p が随伴表現の制限により $\mathfrak{s}$ へ作用する．この作用は等長的であるので，$S(\mathfrak{s})$ を $\mathfrak{s}$ の単位球面とすれば，K_p は $S(\mathfrak{s})$ へ等長変換として作用する．とくに，$(K_p)_0$ が $S(\mathfrak{s}) = S^2$ へ作用するが，$(K_p)_0$ の連結性から，S^2 への作用は次のいずれかになる．

(i) 自明な作用，　(ii) $U(1)$-作用（回転），　(iii) $SO(3)$-作用（推移的）．

$\pi_{\mathfrak{s}} : \mathfrak{k} \to \mathfrak{s}$ を直交射影とすれば，上の 3 つのタイプで $\pi_{\mathfrak{s}}(\mathfrak{k}_p)$ は次のように対応している．

$$\text{(i) } \pi_{\mathfrak{s}}(\mathfrak{k}_p) = \{0\}, \quad \text{(ii) } \dim \pi_{\mathfrak{s}}(\mathfrak{k}_p) = 1, \quad \text{(iii) } \pi_{\mathfrak{s}}(\mathfrak{k}_p) = \mathfrak{s}.$$

K-軌道 $K(p)$ について，$N = K/(K_p)_0$ とおき，次のはめ込みを考える．

$$f : N \to \mathcal{O}_p\ ;\ k(K_p)_0 \mapsto g^{-1}kg(o).$$

$e(K_p)_0$ を x と記すことにする．さらに，f による Q の引き戻し束を f^*Q とおく．(i) の場合，各 $X \in \mathfrak{s}$ について，J_X を次のように定める．

$$(J_X)_{k(x)} : T_{f(kx)}f(N) \to T_{f(kx)}f(N)\ ;\ A \mapsto dk \circ \mathrm{ad}(J)|_{\mathfrak{s}} \circ dk^{-1}.$$

このとき，$\mathrm{Ad}(k)(X) = X$ $(k \in (K_p)_0)$ であることから，J_X は f^*Q への K-不変切断になる．同様にして，(ii) の場合にも $\mathrm{Ad}(k)X = X$ $(k \in (K_p)_0)$ なる $X \in S(\mathfrak{s})$ について，f^*Q への K-不変切断が定まる．しかしながら，$S(\mathfrak{s})_X = \{Y \in S(\mathfrak{s})\ ;\ X \perp Y\}$ とすれば，$\mathrm{Ad}((K_p)_0)$ が $S(\mathfrak{s})_X$ へと推移的に作用するため，K が Q^{J_X} へと推移的に作用する．この点が，(i) の場合と異なる．一方で，(iii) の場合では，$\mathrm{Ad}((K_p)_0)|_{S(\mathfrak{s})}$ は不動点を持たないので，f^*Q への K-不変切断は定まらない．その代わり，Q の $\mathcal{O}_p$ への制限束に K が推移的に作用している．これらの議論をまとめて，次を得る．

定理 4.1. [10] M をコンパクト四元数対称空間，G を M の等長変換群の単位連結成分とし，$o \in M$ を固定する．さらに，K を o における G のイソトロピー群とし，各 $p \in M$ に対して $K_p = \{k \in K\ ;\ k(p) = p\}$ とおく．$\mathfrak{g}, \mathfrak{k}, \mathfrak{k}_p$ をそれぞれ G, K, K_p のリー環とする．さらに，$\mathfrak{s}$ を M の四元数構造を定める $\mathfrak{k}$ 上のイデアルであるとし，$\pi_{\mathfrak{s}} : \mathfrak{k} \to \mathfrak{s}$ を直交射影とする．また，$(K_p)_0$ を K_p の単位連結成分とし，次のはめ込みを考える．

$$f_p : K/(K_p)_0 \to K(p)\ ;\ k(K_p)_0 \mapsto k(p).$$

このとき，次が成り立つ．

(i) $\pi_{\mathfrak{s}}(\mathfrak{k}_p) = \{0\}$ ならば f^*Q への K-不変切断が S^2 の各点と 1 対 1 に対応して存在する．

(ii) $\dim \pi_{\mathfrak{s}}(\mathfrak{k}_p) = 1$ ならば f^*Q への K-不変切断が符号を除いて一意に存在する．K-不変切断を I とすれば，K が Q^I に推移的に作用する．

(iii) $\pi_{\mathfrak{s}}(\mathfrak{k}_p) = \mathfrak{s}$ ならば Q の $K(p)$ への制限束に K が推移的に作用する．

以後，上の定理の (i), (ii), (iii) を満たす K-軌道を type (i), (ii), (iii) であると呼ぶことにする．

結合的グラスマン多様体においてイソトロピー群作用の各軌道が，この主張の (i),(ii),(iii) のいずれに対応し，K 不変切断などがどのような性質を持つのかを考える．結合的グラスマン多様体の制限ルート系は G 型になり，さらに結合的グラスマン多様体の単連結性から，イソトロピー群作用の軌道空間は，内角が $30°, 60°, 90°$ の直角三角形 OAB（図 2）により与えられる．

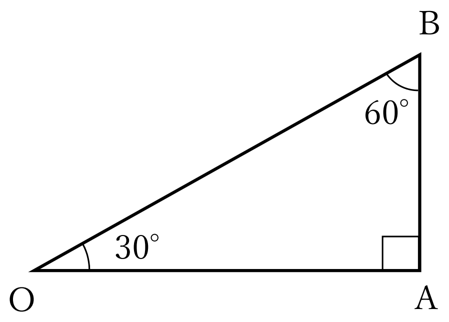

図 2

とくに軌道型は 7 タイプに分けられ，各頂点 O, A, B，各辺 OA, OB, AB の頂点以外の点，三角形 OAB の内部の点たちは，それぞれ同じ軌道型を持つ．それぞれの領域に対応する $G_{\mathbb{H}}(\mathbb{O})$ 上の点を通る K-軌道を，I,II, $\cdots$,VII 型と呼ぶことにする．これらの準備の下で，Enoyoshi-Tsukada の結果 [4] を合わせて，次の主張を得た．

定理 4.2. [4][9] 結合的グラスマン多様体 $G_{\mathbb{H}}(\mathbb{O})$ のイソトロピー群作用の各軌道 $K(p)$ $(p \in G_{\mathbb{H}}(\mathbb{O}))$ について次が従う．

(1) I 型の K-軌道は自明な 1 点．

(2) II 型の K-軌道 N は type (iii)．$\dim N = 3$．任意の $x \in N$ および $J \in Q_x$ について，次を満たす T_xN の部分空間 V, W は存在しない．

$$V + W = T_xN,\ V \perp W,\ J(V) \subset V,\ J(W) \subset (T_xN)^{\perp}.$$

(3) III 型の K-軌道 N は type (ii)．とくに，極地 ([3]) であり $\dim N = 4$．f^*Q の K-不変切断により，f は全複素はめ込みになる [4]．

(4) IV, V, VI 型の K-軌道 N は type (ii)．$\dim N = 5$．f^*Q の K-不変切断により，f は全 CR はめ込みになる．

(5) VII 型の K-軌道 N は type (i)．とくに，主軌道であり $\dim N = 6$．f^*Q の各 K-不変切断により，f は全 CR はめ込みになる．さらに，各 K-不変切断 I, J に関して，$\dim\big(Tf(N) \cap I(Tf(N))\big) = \dim\big(Tf(N) \cap J(T(f(N)))\big)$．

参考文献

[1] A. Bejancu, *CR submanifolds of a Kahler manifold I*, Proc. Amer. Math. Soc. **69-1**(1978), 135-142

[2] R. Bryant, *Submanifolds and special structures on the octonians*, J. Diff. Geom. **17**(1982), 185-232

[3] B. Y. Chen, T. Nagano, *Totally geodesic submanifolds of symmetric spaces II*, Duke. Math. J. **45-2**(1978), 405–425.

[4] K. Enoyoshi, K. Tsukuda, *Examples of transversally complex submanifolds of the associative Grassmann manifold*, Tsukuba J. Math. vol.**43**, No.1(2019), 23-36

[5] K. Enoyoshi, K. Tsukada, *Lagrangian submanifolds of S^6 and the associative Grassmann manifold*, Kodai Math. J. **43**(2020), 170-192

[6] A. Gray, *Almost complex submanifolds of Six sphere*, Proc. Amer. Math. Soc. **20**(1969), 277-279

[7] R. Harvey, H. B. Lawson, *Calibrated geometries*, Acta Math. **148**(1982), 47-157

[8] S. Salamon, *Quaternionic Kähler manifolds*, Invent. Math. **67**(1982), 143-171

[9] Y. Sasaki, *Some submanifolds of the associative Grassmann manifold*, to appear in Tokyo J. Math.

[10] Y. Sasaki, *Orbits of the isotropy group action on quaternionic symmetric spaces*, preprint

[11] K. Tsukada, Transversally complex submanifolds of a quaternion projective space, in Hermitian-Grassmannian submanifolds, edited by Y. J. Suh, Y. Ohnita, J. Zhou, B. H. Kim, H. Lee, Springer Proceedings in Mathematics and Statistics **203**(2017), 223-233

[12] J. A. Wolf, *Complex homogeneous contact manifolds and quaternionic symmetric spaces*, J. Math. Mech. **14**(1965), 1033-1047

[13] I. Yokota, Exceptional Lie groups, arXiv:0902.043lvl