

パラエルミート対称空間と擬エルミート対称空間の 双対性について

杉本 恭司 (東京理科大学)*

概 要

不変 para 複素構造と不変 para-Hermite 計量を兼ね備えた対称空間を para-Hermite 対称空間という. 本稿では, 絶対単純擬 Hermite 対称空間の実形が, ある双曲軌道型絶対単純 para-Hermite 対称空間の para 実形として実現でき, またその逆も成り立つことを紹介する. ここで, 双曲軌道型絶対単純 para-Hermite 対称空間は随伴双曲軌道として実現でき, 絶対単純擬 Hermite 対称空間は随伴楕円軌道として実現できる.

1. para-Hermite 対称空間

G を連結 Lie 群, L をその閉部分群とし, σ を G の非自明な対合とする. このとき, $(G/L, \sigma)$ が対称空間であるとは,

$$(G^\sigma)_0 \subset L \subset G^\sigma$$

が成り立つことをいう. ここで, $G^\sigma := \{x \in G \mid \sigma(x) = x\}$, $(G^\sigma)_0$ はその連結成分を表す.

対称空間 $(G/L, \sigma)$ が G 不変 para 複素構造 I と, I に関する G 不変 para-Hermite 計量 g を兼ね備えているとき, $(G/L, \sigma, I, g)$ を **para-Hermite 対称空間**という. 但し, **para 複素構造** I とは, 次の (1)~(3) を満たす G/L 上の $(1, 1)$ 型テンソル場である.

(1) $I^2 = \text{id}$.

(2) $\dim T_p^+ G/L = \dim T_p^- G/L$ ($\forall p \in G/L$). 但し, $T_p^+ G/L$ (resp. $T_p^- G/L$) は I_p の $(+1)$ (resp. (-1)) 固有空間を表す.

(3) $[IX, IY] - I[IX, Y] - I[X, IY] + [X, Y] = 0$ ($\forall X, Y \in \mathfrak{X}(G/L)$).

また, I に関する **para-Hermite 計量** g とは, G/L 上の擬 Riemann 計量で

(4) $g(IX, Y) + g(X, IY) = 0$ ($\forall X, Y \in \mathfrak{X}(G/L)$)

を満たすものをいう. para-Hermite 計量はニュートラル計量であり, para-Hermite 対称空間は Riemann でない擬 Riemann 対称空間である. また, para-Hermite 対称空間 G/L は para-Kähler 等質空間である. 即ち, $\omega(X, Y) := g(X, IY)$ ($X, Y \in \mathfrak{X}(G/L)$) とすると, ω は G/L 上のシンプレクティック形式である.

次の補題は概効果的半単純 para-Hermite 対称空間に関する基本的なものである.

補題 1.1 (cf. [4]) $(G/L, \sigma, I, g)$ を概効果的半単純 para-Hermite 対称空間, $\mathfrak{g}$ を G の Lie 代数, $\mathfrak{g} = \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{u}$ を σ_* に関する $\mathfrak{g}$ の (± 1) 固有空間分解とする. このとき, 以下を満たす $Z \in \mathfrak{l}$ が唯一つ存在する.

$$(1) \mathfrak{l} = \mathfrak{c}_{\mathfrak{g}}(Z) = \{X \in \mathfrak{g} \mid [Z, X] = 0\}, \quad (2) I_o = \text{ad} Z|_{\mathfrak{u}}.$$

但し, o は G/L の原点を表す.

* 部分多様体幾何とリー群作用 2022 講演要旨

補題 1.1 について補足しておく. $C_G(Z) := \{x \in G \mid \text{Ad}x(Z) = Z\}$ としたとき, 補題 1.1 より, $C_G(Z)_0 \subset L \subset C_G(Z)$ となることがわかる. $L = C_G(Z)$ となるとき, G/L は双曲軌道型であるという. このとき, $G/L \cong \text{Ad}G(Z)$ である. 即ち, 双曲軌道型概効果的半単純 para-Hermite 対称空間は $\mathfrak{g}$ 内のある随伴軌道として実現される.

補題 1.1 の Z は $\mathfrak{g}$ の半単純元であり, $\text{ad}Z$ の $\mathfrak{g}$ 上の固有値は $0, \pm 1$ である. この Z を G/L の特性元という. $\lambda = 0, \pm 1$ に対して, $\mathfrak{g}_\lambda$ を $\text{ad}Z$ の λ 固有空間とすると, $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ は第一種階別 Lie 代数になる. これにより, 概効果的半単純 para-Hermite 対称空間と半単純第一種階別 Lie 代数が対応することがわかる.

例 1.1 $G := SL(p+q, \mathbb{R})$ ($1 \leq p \leq q$), $\mathfrak{g} := \mathfrak{sl}(p+q, \mathbb{R})$ とする.

$$Z := \frac{1}{p+q} \begin{pmatrix} qE_p & O \\ O & -pE_q \end{pmatrix}$$

とする. 但し E_α は α 次の単位行列を表す. このとき, Z は $\mathfrak{g}$ の半単純元で $\text{ad}Z$ の $\mathfrak{g}$ 上の固有値は $0, \pm 1$ であり, $M := \text{Ad}G(Z) \cong G/C_G(Z)$ は Z を特性元とする双曲軌道型単純 para-Hermite 対称空間になる. ここで, 対称空間を定義する G の対合 σ は, $\sigma(x) := (\exp \sqrt{-1}\pi Z)x(\exp \sqrt{-1}\pi Z)^{-1}$ ($x \in G$) によって与えられ, para-Hermite 計量 g は $\mathfrak{g}$ の Killing 形式の (0 でない定数倍の) G 不変拡張で与えられる. ここで,

$$C_G(Z) = \left\{ \begin{pmatrix} X & O \\ O & Y \end{pmatrix} \in G \mid X \in GL(p, \mathbb{R}), Y \in GL(q, \mathbb{R}) \right\}$$

であり, $C_G(Z)$ は非連結である. 特に $p = q = 1$ のとき, M は一葉双曲面である.

一般に半単純非 Riemann 対称空間は, あるコンパクト型 Riemann 対称空間上のベクトル束と微分同型である (cf. [1, 5]). 特に, 双曲軌道型概効果的半単純 para-Hermite 対称空間は対称 R 空間の余接束と微分同型である (cf. [4, 6, 13]). 例 1.1 の M は実 Grassmann 多様体の余接束と微分同型である. このことから, para-Hermite 対称空間は対称 R 空間の研究の中で自然に表れてくることがわかる.

2. 擬 Hermite 対称空間

対称空間 $(\bar{G}/\bar{L}, \rho)$ が $\bar{G}$ 不変複素構造 J と, J に関する $\bar{G}$ 不変擬 Hermite 計量 h を兼ね備えているとき, $(\bar{G}/\bar{L}, \rho, J, h)$ を擬 Hermite 対称空間という (cf. [1]). 特に h の 0 でない定数倍が正定値になるとき, $(\bar{G}/\bar{L}, \rho, J, h)$ は Hermite 対称空間である. 即ち, 擬 Hermite 対称空間は Hermite 対称空間の擬 Riemann の場合への自然な一般化である. 擬 Hermite 対称空間は擬 Kähler 等質空間である. para-Hermite 対称空間の場合と同様に, 擬 Hermite 対称空間も Lie 代数のある特別な元で特徴づけられる.

補題 2.1 (cf. [7]) $(\bar{G}/\bar{L}, \rho, J, h)$ を概効果的半単純擬 Hermite 対称空間, $\bar{\mathfrak{g}}$ を $\bar{G}$ の Lie 代数, $\bar{\mathfrak{g}} = \bar{\mathfrak{l}} \oplus \bar{\mathfrak{u}}$ を ρ_* に関する (± 1) 固有空間分解とする. このとき, 以下を満たす $S \in \bar{\mathfrak{l}}$ が唯一つ存在する.

$$(1) \bar{L} = C_{\bar{G}}(S) = C_{\bar{G}}(S)_0, \quad (2) J_{\bar{o}} = \text{ad } S|_{\bar{\mathfrak{u}}}.$$

但し, $\bar{o}$ は $\bar{G}/\bar{L}$ の原点を表す.

補題 2.1 の S は $\bar{\mathfrak{g}}$ の半単純元であり, $\text{ad } S$ の $\bar{\mathfrak{g}}$ 上の固有値は $0, \pm \sqrt{-1}$ である. 補題 2.1 より, 概効果的半単純擬 Hermite 対称空間 $\bar{G}/\bar{L}$ は $\bar{\mathfrak{g}}$ 内のある随伴軌道として実現される.

擬 Hermite 対称空間の対合的反正則等長変換の固定点集合の連結成分を実形という.

3. para 実形

本節では para 実形の定義を紹介し、双曲軌道型効果的半単純 para-Hermite 対称空間の para 実形が対称 R 空間の一般化とみなせることについて述べる。

定義 3.1 $(M, I), (M', I')$ を para 複素多様体とし、 $\Phi : M \rightarrow M'$ を可微分写像とする。任意の $p \in M$ に対して、

$$(d\Phi)_p \circ I_p = I_{\Phi(p)} \circ (d\Phi)_p \quad (\text{resp. } (d\Phi)_p \circ I_p = -I_{\Phi(p)} \circ (d\Phi)_p)$$

が成り立つとき、 Φ は **para 正則** (resp. **反 para 正則**) であるという。

para-Hermite 対称空間の対合的反 para 正則等長変換の固定点集合の連結成分を **para 実形** という。

例 3.1 $(G/C_G(Z), \sigma, I, g)$ を例 1.1 で構成した双曲軌道型単純 para-Hermite 対称空間とする。

(1) $\theta : G \ni x \mapsto {}^t x^{-1} \in G$ とすると、 θ は G の対合で $\theta(C_G(Z)) = C_G(Z)$ となるので、 G/L 上の等長変換

$$\Theta : G/C_G(Z) \rightarrow G/C_G(Z), \quad xC_G(Z) \mapsto \theta(x)C_G(Z)$$

を誘導できる。 $\theta_*(X) = -{}^t X$ ($X \in \mathfrak{g}$) で、 Z は $G/C_G(Z)$ の特性元であったので、 Θ は反 para 正則である。 θ_* は $\mathfrak{g}$ の Cartan 対合とよばれるものであり、このとき、 Θ の固定点集合 $(G/C_G(Z))^\Theta$ は連結であることがわかり、 $(G/C_G(Z))^\Theta$ は $G/C_G(Z)$ の para 実形である。このとき、

$$(G/C_G(Z))^\Theta = SO(p+q)/S(O(p) \times O(q))$$

であり、 $(G/C_G(Z))^\Theta$ は実 Grassmann 多様体である。

(2) $p = q$ の場合を考える。このとき

$$Z = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} E_p & O \\ O & -E_p \end{pmatrix}$$

である。

$$J_p := \begin{pmatrix} O & E_p \\ E_p & O \end{pmatrix}$$

とし、 G の対合 ξ を $x \mapsto J_p x J_p$ により定義する。このとき、 $\xi(C_G(Z)) = C_G(Z)$ 、 $\xi_*(Z) = -Z$ がわかり、 $G/C_G(Z)$ の対合的反 para 正則等長変換

$$\Xi : G/C_G(Z) \rightarrow G/C_G(Z), \quad xC_G(Z) \mapsto \xi(x)C_G(Z)$$

を誘導することができる。従って、 $(G/C_G(Z))^\Xi$ の連結成分は para 実形である。ここで、 $(G/C_G(Z))^\Xi$ は連結ではない。たとえば、 $p = 1$ のとき、 $G/C_G(Z)$ は一葉双曲面であったが、このとき $(G/C_G(Z))^\Xi$ は双曲線であり、その連結成分は2つである。

一般に任意の para 実形は原点を含むある para 実形と para 正則等長変換で移りあうので、本質的には原点を含むものを考えればよいことがわかる。また、双曲軌道型効果的半単純 para-Hermite 対称空間 G/L で、計量が $\text{Lie}(G)$ の Killing 形式から誘導されているものには、コンパクトな para 実形 R が、para 正則等長変換で移りあうものを除いて、一意的

に存在する. R は対称 R 空間であり, その余接束と G/L は微分同型である. またこのとき, R の非コンパクト双対も G/L の para 実形である.

次の命題は基本的である.

命題 3.1 ([10]) $(G/L, \sigma, I, g)$ を双曲軌道型効果的半単純 para-Hermite 対称空間で, g は $\text{Lie}(G)$ の Killing 形式から誘導されているとする. このとき, 原点を含む部分集合 $R \subset G/L$ に対して, 次の (1), (2) は同値である.

(1) R は para 実形.

(2) R は G/L の閉連結完備全測地的 Lagrange 部分多様体で誘導計量が非退化.

特に para 実形は対称空間である.

para-Hermite 対称空間は Riemann でない擬 Riemann 対称空間なので, 誘導計量が非退化という条件は意味をもつ.

双曲軌道型効果的半単純 para-Hermite 対称空間の para 実形は対称 R 空間の一般化と考えられる. 実際, 次の定理が成り立つ.

定理 3.1 ([10]) 非退化 Jordan triple system から構成される擬 Riemann 対称 R 空間は, ある双曲軌道型効果的半単純 para-Hermite 対称空間の para 実形として実現でき, その逆も成り立つ.

ここで, 擬 Riemann 対称 R 空間とは [12] によって導入された概念で, 対称 R 空間の擬 Riemann のクラスへの一般化である. 擬 Riemann 対称 R 空間は, 直交 Jordan triple system とよばれる, ある種の不変非退化内積を兼ね備えた Jordan triple system である条件を満たすものから構成される対称空間のクラスである. ここで, 直交 Jordan triple system は, 直交対称階別 Lie 代数とよばれるものに対応することが知られている (従って, 擬 Riemann 対称 R 空間は直交対称階別 Lie 代数とも対応している) (cf. [11]). Jordan triple system が非退化であるとは, そのトレース形式が非退化であることをいう. また, トレース形式が正定値であるときコンパクトであるという. ここで, コンパクト Jordan triple system は非退化 Jordan triple system であり, 非退化 Jordan triple system は直交 Jordan triple system である. 特に, コンパクト Jordan triple system から構成される擬 Riemann 対称 R 空間は対称 R 空間であり, 逆に, 任意の対称 R 空間はコンパクト Jordan triple system から構成できる. 従って, 任意の対称 R 空間はある双曲軌道型効果的半単純 para-Hermite 対称空間の para 実形として実現できる.

4. para-Hermite 対称空間と擬 Hermite 対称空間の関係

定義 4.1 実 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ が絶対単純であるとは, その複素化が単純であることをいう. また, Lie 群 G , 等質空間 G/L が絶対単純であるとは, G の Lie 代数が絶対単純であることをいう.

以下では双曲軌道型効果的絶対単純 para-Hermite 対称空間と効果的絶対単純擬エルミート対称空間の関係を考える. この場合, para-Hermite 計量, 擬 Hermite 計量は 0 でない定数倍を除いて一意であり, それは, Killing 形式 (の 0 でない定数倍) から誘導される (cf. [3, 8]).

定義 4.2 G を連結絶対単純 Lie 群で中心が自明なもの, $\mathfrak{g}$ を絶対単純 Lie 代数, $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ を複素単純 Lie 代数とする. このとき,

- (1) $\mathcal{P}(G)$: 双曲軌道型効果的絶対単純 para-Hermite 対称空間 G/L とその para 実形 R の組 $(G/L, R)$ 全体からなる集合.
- (2) $\mathcal{R}(G)$: 効果的絶対単純擬 Hermite 対称空間 G/L とその実形 Q の組 $(G/L, Q)$ 全体からなる集合.
- (3) $d\mathcal{P}(\mathfrak{g})$: $\mathfrak{g}$ の (0 でない) 半単純元 Z で $\text{ad } Z$ の $\mathfrak{g}$ 上の固有値が $0, \pm 1$ となるものと, $\mathfrak{g}$ の対合 ξ で $\xi(Z) = -Z$ を満たすものの組 (Z, ξ) 全体からなる集合.
- (4) $d\mathcal{R}(\mathfrak{g})$: $\mathfrak{g}$ の (0 でない) 半単純元 S で $\text{ad } S$ の $\mathfrak{g}$ 上の固有値が $0, \pm \sqrt{-1}$ となるものと, $\mathfrak{g}$ の対合 η で $\eta(S) = -S$ を満たすものの組 (S, η) 全体からなる集合.
- (5) $d\mathcal{P}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$: $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ の実形 $\mathfrak{r}$ と $(Z, \xi) \in d\mathcal{P}(\mathfrak{r})$ の組 $(\mathfrak{r}, Z, \xi)$ 全体からなる集合.
- (6) $d\mathcal{R}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$: $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ の実形 $\mathfrak{r}$ と $(S, \eta) \in d\mathcal{R}(\mathfrak{r})$ の組 $(\mathfrak{r}, S, \eta)$ 全体からなる集合.

定義 4.3 定義 4.2 で定めた集合に対して, 以下のようにして同値関係を定義する

- (1) $(G/L_1, R_1), (G/L_2, R_2) \in \mathcal{P}(G)$ に対して,

$$(G/L_1, R_1) \simeq (G/L_2, R_2) \stackrel{\text{def.}}{\iff} \text{para 正則相似変換 } \Phi : G/L_1 \rightarrow G/L_2 \text{ が存在して,} \\ \Phi(R_1) = R_2.$$

- (2) $(G/L_1, Q_1), (G/L_2, Q_2) \in \mathcal{R}(G)$ に対して,

$$(G/L_1, Q_1) \simeq (G/L_2, Q_2) \stackrel{\text{def.}}{\iff} \text{正則相似変換 } \Phi : G/L_1 \rightarrow G/L_2 \text{ が存在して,} \\ \Phi(Q_1) = Q_2.$$

- (3) $(Z_1, \xi_1), (Z_2, \xi_2) \in d\mathcal{P}(\mathfrak{g})$ に対して,

$$(Z_1, \xi_1) \sim (Z_2, \xi_2) \stackrel{\text{def.}}{\iff} \mathfrak{g} \text{ の自己同型 } \phi \text{ が存在して, } \phi(Z_1) = Z_2, \phi \circ \xi_1 = \xi_2 \circ \phi.$$

- (4) $(S_1, \eta_1), (S_2, \eta_2) \in d\mathcal{R}(\mathfrak{g})$ に対して,

$$(S_1, \eta_1) \sim (S_2, \eta_2) \stackrel{\text{def.}}{\iff} \mathfrak{g} \text{ の自己同型 } \phi \text{ が存在して, } \phi(S_1) = S_2, \phi \circ \eta_1 = \eta_2 \circ \phi.$$

- (5) $(\mathfrak{r}_1, Z_1, \xi_1), (\mathfrak{r}_2, Z_2, \xi_2) \in d\mathcal{P}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ に対して,

$$(\mathfrak{r}_1, Z_1, \xi_1) \sim (\mathfrak{r}_2, Z_2, \xi_2) \stackrel{\text{def.}}{\iff} \text{Lie 代数の同型 } \phi : \mathfrak{r}_1 \rightarrow \mathfrak{r}_2 \text{ が存在して,} \\ \phi(Z_1) = Z_2, \phi \circ \xi_1 = \xi_2 \circ \phi.$$

- (6) $(\mathfrak{r}_1, S_1, \eta_1), (\mathfrak{r}_2, S_2, \eta_2) \in d\mathcal{R}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ に対して,

$$(\mathfrak{r}_1, S_1, \eta_1) \sim (\mathfrak{r}_2, S_2, \eta_2) \stackrel{\text{def.}}{\iff} \text{Lie 代数の同型 } \phi : \mathfrak{r}_1 \rightarrow \mathfrak{r}_2 \text{ が存在して,} \\ \phi(S_1) = S_2, \phi \circ \eta_1 = \eta_2 \circ \phi.$$

G を連結絶対単純 Lie 群で中心が自明なものとし, $\mathfrak{g}$ を G の Lie 代数, $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ を $\mathfrak{g}$ の複素化とする. このとき, $d\mathcal{P}(\mathfrak{g})/\sim$ から $d\mathcal{P}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})/\sim$ への自然な単射が存在する. また, $d\mathcal{P}(\mathfrak{g})/\sim$ と $\mathcal{P}(G)/\simeq$ の間には自然な全単射が存在する. 実際, $(Z, \xi) \in d\mathcal{P}(\mathfrak{g})$ に対して, $G/C_G(Z)$ は Z を特性元とする効果的絶対単純 para-Hermite 対称空間となり, ξ から $G/C_G(Z)$ 上の原点を固定する対合的反 para 正則等長変換を誘導できて, これより得られる原点を含む para 実形を R とすると, $(G/C_G(Z), R) \in \mathcal{P}(G)$ となる. この対応から $d\mathcal{P}(\mathfrak{g})/\sim$ から $\mathcal{P}(G)/\simeq$ への対応を誘導でき, それが全単射であることがわかる. $d\mathcal{R}(\mathfrak{g})/\sim, d\mathcal{R}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})/\sim, \mathcal{R}(G)/\simeq$ の間にも同様な対応がある.

この対応より, 各絶対単純 Lie 代数に対して, $d\mathcal{P}(\mathfrak{g})/\sim, d\mathcal{R}(\mathfrak{g})/\sim$ を決定することで, 絶対単純 para-Hermite 対称空間の para 実形, 絶対単純擬 Hermite 対称空間の分類を得る (cf. [2, 8]).

更に, $d\mathcal{P}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ と $d\mathcal{R}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ について, 次のことが成り立つ.

命題 4.1 (cf. [10]) $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ を複素単純 Lie 代数とする.

- (1) $f : d\mathcal{P}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}) \rightarrow d\mathcal{R}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}), (g, Z, \xi) \mapsto (\bar{g} := \mathfrak{h} \oplus \sqrt{-1}\mathfrak{m}, -\sqrt{-1}Z, \eta)$ は全単射. 但し, $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$ は ξ による $\mathfrak{g}$ の (± 1) 固有空間分解, η は ξ の $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ への複素線形拡張の $\bar{g}$ への制限を表す.
- (2) $F : d\mathcal{P}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})/\sim \rightarrow d\mathcal{R}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})/\sim, [(g, Z, \xi)] \mapsto [f(g, Z, \xi)]$ は well-defined で全単射. 但し, $[(g, Z, \xi)]$ は (g, Z, ξ) を含む同値類を表す ($[f(g, Z, \xi)]$ についても同様).

命題 4.1 より次がわかる.

定理 4.1 (cf. [10]) 任意の中心が自明な連結絶対単純 Lie 群 G と $(G/L, R) \in \mathcal{P}(G)$ で $o \in R$ なるものに対して, 中心が自明な連結絶対単純 Lie 群 $\bar{G}$ と $(\bar{G}/\bar{L}, Q) \in \mathcal{R}(\bar{G})$ が存在して, Q は R と同変微分同型. また, この逆も成り立つ.

例 4.1 (1) $1 \leq p \leq 1 \leq i \leq p \leq j \leq p + q - 1$ に対して,

$$SO(p, q)_0 / (SO(i, j - p)_0 \times SO(p - i, p + q - j)_0)$$

は絶対単純 para-Hermite 対称空間

$$SL(p + q, \mathbb{R}) / S(GL(i + j - p, \mathbb{R}) \times GL(2p + q - i - j, \mathbb{R}))$$

の para 実形であり, 一方で絶対単純擬 Hermite 対称空間

$$SU(p, q) / S(U(i, j - p) \times U(p - i, p + q - j))$$

の実形である. $i = j = p$ のとき, 非コンパクト型 Hermite 対称空間の実形である.

(2) $2 \leq n, 1 \leq i < (n/2) + 1$ に対して,

$$Sp(n, \mathbb{R}) / (Sp(i, \mathbb{R}) \times Sp(n - i, \mathbb{R}))$$

は絶対単純 para-Hermite 対称空間

$$SL(2n, \mathbb{R}) / S(GL(2i, \mathbb{R}) \times GL(2(n - i), \mathbb{R}))$$

の para 実形であり, 一方で絶対単純擬 Hermite 対称空間

$$SU(n, n) / S(U(i, i) \times U(n - i, n - j))$$

の実形である.

参考文献

- [1] M. Berger, Les espaces symétriques noncompacts, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **74** (1957), 85–177.
- [2] N. Boumuki, The classification of real forms of simple irreducible pseudo-Hermitian symmetric spaces, *J. Math. Soc. Japan* **66** (2014), no.1, 37–88.
- [3] N. Boumuki, The group of isometries of simple irreducible pseudo-Hermitian symmetric spaces, *Kyushu J. Math.* **72** (2018), no.1, 25–34.
- [4] S. Kaneyuki and M. Kozai, Paracomplex structures and affine symmetric spaces, *Tokyo J. Math.* **8** (1985), no.1, 81–98.
- [5] S. S. Koh, On affine symmetric spaces, *Amer. Math. Soc.* **119** (1965), 291–309.
- [6] T. Nagano, Transformation groups on compact symmetric spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.* **118** (1965), 428–453.
- [7] R. A. Shapiro, Pseudo-Hermitian symmetric spaces, *Comment. Math. Helv.* **46** (1971), 529–548.
- [8] T. Shimokawa and K. Sugimoto, On the groups of isometries of simple para-Hermitian symmetric spaces, *Tsukuba J. Math.* **41** (2017), no.1, 21–42.
- [9] K. Sugimoto and T. Shimokawa, Classification of para-real forms of absolutely simple para-Hermitian symmetric spaces, *Osaka J. Math.* **59** (2022), no. 3, 559–590.
- [10] K. Sugimoto, Para-real forms of para-Hermitian symmetric spaces and real forms of pseudo-Hermitian symmetric spaces, to appear in *Hiroshima Math. J.*
- [11] H. Naitoh, Parallel submanifolds of complex space forms I, *Nagoya Math.* **90** (1983), 85–117.
- [12] H. Naitoh, Pseudo-Riemannian symmetric R-spaces, *Osaka J. Math.* **21** (1984), 733–764.
- [13] M. Takeuchi, Cell decompositions and Morse equalities on certain symmetric spaces, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. I* **12** (1965), 81–192.