

左不変リーマン計量のモジュライ空間が 1 次元となる Lie 群について

田丸 博士 (大阪公立大学理学研究科 / OCAMI)

概要

与えられた Lie 群に対して, その上の左不変リーマン計量の全体の空間を然るべき群作用で割った空間を, 左不変リーマン計量の moduli 空間と呼ぶ. この moduli 空間の性質, 例えば次元や位相型などは, Lie 群の不変量であり, 左不変リーマン計量の様相を反映することが期待できる. 例えば, moduli 空間が 0 次元の場合, その Lie 群上の任意の左不変リーマン計量は Ricci soliton である. 本稿では, moduli 空間が 1 次元となる Lie 群について, 現在進行中の研究を紹介する. 本稿の内容は, 武富雄一郎氏, 川又将大氏との共同研究に基づく.

1 導入

与えられた多様体上に特別な幾何構造が存在するかどうかを判定する問題は, 幾何学における中心的な問題意識である. 特に, 多様体に何らかの付加構造が備わっている場合には, それと適合する幾何構造を対象とすることが自然である. 我々は, 多様体としては等質多様体を考え, その上の等質構造と適合するリーマン計量を研究対象とする. このとき, 次の問題意識は基本的である.

問題 1.1. 等質多様体 G/K が与えられたとき, その上の G -不変なリーマン計量で, Einstein あるいは Ricci soliton となるものが存在するかどうかを判定せよ.

ここで, リーマン多様体 (M, g) が Ricci soliton であるとは, 次をみたす定数 $c \in \mathbb{R}$ と

部分多様体幾何とリー群作用 2022 (東京理科大学, 2023/03/28) 講演原稿.

本研究は, 文部科学省特色ある共同研究拠点の整備の推進事業 JPMXP0619217849 の助成を受けたものです.

ベクトル場 $X \in \mathfrak{X}(M)$ が存在することである:

$$\text{Ric}_g = cg + \mathfrak{L}_X g.$$

ただし Ric_g は Ricci 曲率, $\mathfrak{L}_X$ は X に沿った Lie 微分を表す. 特に $\mathfrak{L}_X g$ の項が消えているとき, (M, g) は Einstein であるという.

等質多様体上の不変な Einstein あるいは Ricci soliton 計量に関しても, 他の場合と同様に, 定数 c の符号によって状況が異なる. ここでそれぞれの状況について, [9, 18] を参考にして簡単に復習しておく. まず $c > 0$ の場合には, 次が知られている.

定理 1.2 (cf. [19, 20]). (M, g) が等質 Ricci soliton であり, 定数は $c > 0$ をみたすとする. このとき (M, g) は, $c > 0$ の等質 Einstein 多様体と平坦な多様体の直積と等長的.

従ってこの場合には, Ricci soliton に関する問題は Einstein の問題に帰着される. なお, Einstein の問題に帰着されたと言っても, それで問題が解決した訳ではないことに注意する. 等質 Einstein 多様体に関する未解決問題も数多く残されている. 一方で, $c = 0$ の場合には, 状況は分かっていると言ってよい.

定理 1.3 (cf. [1]). (M, g) が等質 Ricci soliton であり, 定数は $c = 0$ をみたすとする. このとき (M, g) は平坦.

最後は $c < 0$ の場合である. このときが, 非自明な Ricci soliton が登場する興味深い場合であり, 本稿の内容も深く関係する. この場合に関して, 最近大きなブレイクスルーがあった.

定理 1.4 ([8]). (M, g) が等質 Ricci soliton であり, 定数は $c < 0$ をみたすとする. このとき (M, g) は, 可解 Lie 群に左不変リーマン計量を入れた空間 (可解多様体) と等長的.

なお, この定理の主張は, 一般化 Alekseevskii 予想と呼ばれて長年の未解決問題だったものである (定理の仮定を Einstein に限定したものが元々の Alekseevskii 予想). 従って, $c < 0$ の場合には次が自然に問題となる.

問題 1.5. 可解 Lie 群 G が与えられたとき, その上の左不変リーマン計量で, Einstein あるいは Ricci soliton となるものが存在するかどうかを判定せよ.

この問題に関しては, 多くのことが未解明なまま残されている. 例えば, 低次元の場合から分類することは安直だが一つの方針であるが, 現時点で分類が得られているのは 6 次元までである ([23]). これは可解を冪零に置き換えたとしても, 状況は大きくは変わらない.

2 moduli 空間

前節で述べた通り, Lie 群 G が与えられたときに, その上の左不変リーマン計量で Einstein あるいは Ricci soliton となるものの存在・非存在を判定することは, 重要な問題である. 一般にこれは極めて難しい問題だが, 次の命題はその難しさの一つの要因を表している.

命題 2.1. G を n 次元 Lie 群とし, $\mathfrak{g}$ を G の Lie 代数とする. このとき, G 上の左不変リーマン計量全体の空間は $GL(n, \mathbb{R})/O(n)$ と同一視できる. その次元は $(1/2)n(n+1)$.

すなわち, G の次元 n が高くなると, その上の左不変リーマン計量の空間の次元は n^2 のオーダーで増えていく. これらを全て調べ尽くすことは絶望的であろう. この問題を解決するための一つの方策として, 我々は次の概念を提示している.

定義 2.2 ([13]). G を n 次元単連結 Lie 群とする. このとき G 上の左不変リーマン計量の moduli 空間 $\mathcal{M}_G$ を, 群 $\mathbb{R}^\times \text{Aut}(G)$ の $GL(n, \mathbb{R})/O(n)$ への作用の軌道空間として定義する.

ここで $\text{Aut}(G)$ は Lie 群 G の自己同型群, $\mathbb{R}^\times$ は 0 でない実数の成す乗法群を表す. Lie 群 G は単連結であるとしているので, $\text{Aut}(G)$ は対応する Lie 代数の自己同型群 $\text{Aut}(\mathfrak{g})$ と同型である.

注意 2.3. 上で定義した moduli 空間 $\mathcal{M}_G$ から次の集合への全射が存在する:

$$\{\text{left-inv. metrics on } G\}/(\text{isometry and scaling}).$$

後者の集合を “moduli 空間” と呼ぶ方が自然であるかも知れないが, こちらの集合は扱いにくい場合が多々ある. そのため, 軌道空間として定式化できる前者を, ここでは moduli 空間として採用している. なお, G が冪零あるいは完全可解の場合には, 前者と後者は一致する.

ここで定義した moduli 空間は, 一般には滑らかな多様体ではないが, 次のような良い性質をもつことが分かっている.

命題 2.4. 各単連結 Lie 群 G に対して, $\mathcal{M}_G$ は商位相に関して連結かつハウスドルフである. また, 群 $\mathbb{R}^\times \text{Aut}(G)$ の作用による主軌道の成す部分集合は, 開かつ稠密であり, 滑らかな多様体となる.

上で述べた主軌道の成す滑らかな多様体の次元を, moduli 空間 $\mathcal{M}_G$ の次元という. イメージを掴むための具体例を一つここで挙げておく.

命題 2.5 ([12]). $a \neq 1$ とし, 次で定義される 3 次元 Lie 代数を考える:

$$\mathfrak{g} := \text{span}\{e_1, e_2, e_3\}, \quad [e_1, e_2] = e_2, \quad [e_1, e_3] = ae_3, \quad [e_2, e_3] = 0.$$

このとき対応する単連結 Lie 群 G 上の左不変リーマン計量の moduli 空間は, 次の表示をもつ:

$$\mathcal{M}_G \cong \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \end{pmatrix} \mid \lambda \geq 0 \right\} \cong [0, +\infty).$$

さらに, この G 上の左不変リーマン計量が Ricci soliton であるための必要十分条件は, その計量が moduli 空間の端点 0 と対応すること.

Lie 群 G に対して, 対応する moduli 空間 $\mathcal{M}_G$ の性質は, G の不変量である. さらに, このようにして得られた不変量は, G 上の左不変リーマン計量の性質を反映することが期待される. これが我々の研究の大きな枠組みである. 例えば Lie 群が 3 次元可解の場合には, この枠組は極めて良く振る舞うことが分かっている ([12]). しかし現時点では, 一般的な結果はそれ程多くは得られていない. 以下では, いくつかの個別の場合について, 現時点での状況を紹介したい.

3 moduli 空間が 0 次元の場合

我々の枠組において, 最も簡単な場合は moduli 空間 $\mathcal{M}_G$ の次元が 0 となるときであろう. このとき, moduli 空間 $\mathcal{M}_G$ は一点集合となる. 別の言い方をすると, 群 $\mathbb{R}^\times \text{Aut}(G)$ の $GL(n, \mathbb{R})/O(n)$ への作用が推移的となる. 左不変リーマン計量が本質的に一つしかない場合, と言い換えることもできる. このような Lie 群は, 分類が知られている.

定理 3.1 ([17]). $\dim \mathcal{M}_G = 0$ が成り立つための必要十分条件は, G の Lie 代数が以下のいずれかと同型であること:

$$\mathbb{R}^n \text{ (abelian)}, \quad \mathfrak{g}_{\mathbb{R}H^n} \text{ (special type)}, \quad \mathfrak{h}^3 \oplus \mathbb{R}^{n-3}.$$

ここで $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}H^n}$ は実双曲空間の Lie 代数とも呼ばれている. 実双曲空間 $\mathbb{R}H^n$ に単純推移的に作用する完全可解 Lie 代数, ということもできるし, $SO^0(n, 1)$ という不定値の特殊

直交群 (の単位元連結成分) の岩澤分解の可解部分ということもできる. 最後に登場した Lie 代数に現れる $\mathfrak{h}^3$ は, 3 次元 Heisenberg 代数を表す.

注意 3.2. 上で挙げた 3 種類の Lie 群は, いずれも左不変 Ricci soliton を許容する. さらに詳しくいうと, 以下が成り立つ:

- $\mathbb{R}^n$ の場合, 対応する左不変リーマン計量は平坦である;
- $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}H^n}$ の場合, 対応する左不変リーマン計量は負定曲率である;
- $\mathfrak{h}^3 \oplus \mathbb{R}^{n-3}$ の場合, 対応する左不変リーマン計量は Einstein ではない.

従って, 左不変リーマン計量が Einstein であることは, moduli 空間 $\mathcal{M}_G$ を使って特徴付けることは (Lie 群に何らかの制約を課さない限りは) 不可能である. 一方で, Ricci soliton についてはどうか, という問題が本稿の出発点である.

4 moduli 空間が 1 次元の場合

本節では, Lie 群 G であって, その上の左不変リーマン計量の moduli 空間 $\mathcal{M}_G$ が 1 次元になるものについて扱う. この場合は, 群 $\mathbb{R}^\times \text{Aut}(G)$ の $GL(n, \mathbb{R})/O(n)$ への作用が余等質性 1 となる場合, と言い換えることができる. 唐突だが次の問題 (予想) を考える.

問題 4.1. $\mathcal{M}_G$ が 1 次元であるとする. このとき次が成り立つかどうかを調べよ:

- (1) $\mathcal{M}_G$ は位相空間として $\mathbb{R}$ または $[0, +\infty)$ と同相である.
- (2) G 上に左不変 Ricci soliton が存在するための必要十分条件は, $\mathcal{M}_G \cong [0, +\infty)$ となること.
- (3) $\mathcal{M}_G \cong [0, +\infty)$ のとき, 左不変 Ricci soliton は端点 0 と対応する.

上の問題のうち (1) は moduli 空間の位相型を限定するものである. また (2), (3) は, moduli 空間が左不変 Ricci soliton の存在・非存在を完全に決定することを意味している. この問題を定式化した理由は, 今までに調べた具体例については全て成り立っているから, というものである. しかしそれ以外にも状況証拠がないわけではないので, それらについて, 以下でもう少し詳しく述べたい. まず (3) については, 実は証明されている.

命題 4.2. $\mathcal{M}_G \cong [0, +\infty)$ であるとする. このとき

- 0 に対応する軌道は孤立軌道である;
- 群作用 $\mathbb{R}^\times \text{Aut}(G) \curvearrowright GL(n, \mathbb{R})/O(n)$ の孤立軌道に対応する計量は Ricci soliton である ([21]).

これらにより, 問題 (3) は解決されており, さらに (2) の一部, すなわち moduli 空間が $[0, +\infty)$ と同相なら Ricci soliton が存在することも, 示されたことになる. 次に問題 (1) について述べる.

命題 4.3. 以下が成り立つ:

- $GL(n, \mathbb{R})/O(n)$ は Hadamard 多様体であり, $\mathbb{R}^\times \text{Aut}(G)$ の作用は等長的;
- 一般に $H \curvearrowright M$ が Hadamard 多様体への余等質性 1 作用のとき, H が連結なら, 軌道空間は $\mathbb{R}$ または $[0, +\infty)$ と同相である ([2]).

従って $\mathbb{R}^\times \text{Aut}(G)$ が連結な場合には, 問題 (1) は肯定的に解決されたことになる. 当然ながら $\mathbb{R}^\times \text{Aut}(G)$ は一般には非連結なので, 一般の場合の解決のためには, その非連結成分をコントロールすることが必要になる.

最後に残っているのは問題 (2) の $\mathbb{R}$ の場合であるが, この場合は現時点では有効なアイデアは特にはない. 一般に非存在を証明するのは難しいが, 特に Lie 群上の左不変リーマン計量の場合には, 効果的な不変量や障害がほとんど知られていないことが, 大きな問題である.

5 moduli 空間が 1 次元の場合: 分類に向けて

前節で述べた問題 4.1 の解決のために, 正規ルートではないかも知れないが, moduli 空間が 1 次元となる Lie 群を分類してしまう, という方策も考えられる. その方向での研究について, 現時点で得られている結果を紹介する. そのために一つ用語を定義する.

定義 5.1. Lie 代数 $\mathfrak{g}$ が **almost abelian** であるとは, $\mathfrak{g}$ が余次元 1 の可換イデアルをもつこと.

短く言うと, $\mathfrak{g} \cong \mathbb{R} \ltimes \mathbb{R}^{n-1}$ と表せること, ということもできる. 右辺は $\mathbb{R}$ と $\mathbb{R}^{n-1}$ の半直積を表す. 半直積は $\mathbb{R}$ の $\mathbb{R}^{n-1}$ への作用によって定まることから, 次が成り立つ.

命題 5.2. 各 $A \in M(n-1, \mathbb{R})$ に対して, $\mathfrak{g}_A := \text{span}\{e_1, \dots, e_n\}$ に以下で括弧積を定義したものは almost abelian:

$$\text{ad}_{e_1} = A \quad (\text{on } \text{span}\{e_2, \dots, e_n\}).$$

逆に, almost abelian な Lie 代数はこの方法で全て構成される. さらに, $\mathfrak{g}_A$ と $\mathfrak{g}_B$ が Lie 代数として同型であるための必要十分条件は, 行列 A と B が相似 (スカラー倍を除いて共役) となること.

容易に分かるように, 零行列から定まる almost abelian は可換である. また, moduli 空間 $\mathcal{M}_G$ が 0 次元となるような Lie 代数は, 全て almost abelian である.

例 5.3. $\mathbb{R}^n, \mathfrak{g}_{\mathbb{R}H^n}, \mathfrak{h}^3 \oplus \mathbb{R}^{n-3}$ は全て almost abelian であり, 対応する行列は以下の通り:

$$O_n, \quad I_n, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \oplus \mathbb{R}^{n-3}.$$

ただしここで, I_k は単位行列, O_k は零行列を表す. このことから, moduli 空間が 1 次元になる場合についても, almost abelian は重要な供給源となることが期待できる. 次は, almost abelian の範囲内で, moduli が 1 次元となるものを分類した結果である.

定理 5.4. $\mathfrak{g}_A$ に対応する単連結 Lie 群の moduli 空間が 1 次元であるために必要十分条件は, 行列 A が以下のいずれかと相似になること:

- (1) $(\alpha I_{n-1}) \oplus (\beta I_1)$ with $\alpha \neq \beta$;
- (2) $I_{n-3} \oplus \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;
- (3) $\begin{pmatrix} \gamma & 1 \\ -1 & \gamma \end{pmatrix}$ with $\gamma \geq 0$;
- (4) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \oplus O_{n-5}$.

これらの Lie 群について, (2) のものだけが moduli 空間が $\mathbb{R}$ と同相になり, 左不変 Ricci soliton を許容しない. この場合の非存在性は, 左不変リーマン計量が本質的に 1 次元分しかないという事情により, それら全ての計量について調べ尽くすという方法で証明される.

問題 5.5. $\dim \mathcal{M}_G = 1$ であるとする. このとき, その Lie 代数は almost abelian であるか, または $\mathfrak{h}^5 \oplus \mathbb{R}^{n-5}$ (5 次元 Heisenberg と abelian の直和) になるか?

これを証明するためには, Lie 代数を分解して注意深く場合分けをする必要があると思われるので, 道が見えない訳ではないが厄介である. なお, 上に挙げた全ての例に関して, 最初に述べた問題 4.1 の性質をみたすことは, 注意しておく.

6 今後の課題

最後に、本稿に関連する今後の課題について述べる。本稿の内容は、そのほとんどがまだ途中段階であり、ようやく予想を定式化することができたところである。これらの予想を解決することが、当然ながら最初の課題である。もし我々の予想を肯定的に解決することができたとすると、左不変リーマン計量の moduli 空間は、左不変リーマン計量の幾何的な様相を良く表すことが期待できる、と言っても良いだろう。

その自然な続きとしては、例えば安直だが、moduli 空間 $\mathcal{M}_G$ が 2 次元の場合を調べるという問題は考えられる。なお、群作用の研究状況から考えると、余等質性 1 の場合と 2 の場合は大きく様相が異なるので、2 次元の場合には問題が本質的に難しくなると感じられる。

一方で、本稿ではリーマン計量に話を限定したが、この moduli 空間の考え方は、Lie 群上の他の幾何構造に対しても適用することができる。例えば、Lie 群上の符号数 (p, q) の左不変擬リーマン計量の moduli 空間は、 $\mathbb{R}^\times \text{Aut}(G)$ の $GL(p+q, \mathbb{R})/O(p, q)$ への作用の軌道空間として定義することができる。これを用いた研究も我々を行っている ([14, 15])。なお、擬リーマン計量の場合には、(作用される空間 $GL(p+q, \mathbb{R})/O(p, q)$ が擬リーマン対称空間であることが影響して) moduli 空間が一般にはハウスドルフにはならないなど、リーマン計量の時とは全く異なる現象も数多く起こる。さらに、左不変シンプレクティック構造に関しても、同様の枠組みによる研究が進展中である ([10, 11])。

参考文献

- [1] D. Alekseevskii, B. Kimel'fel'd, *Structure of homogeneous Riemannian spaces with zero Ricci curvature*, Funkt. Anal. Prilozen, **9** (1975), 5–11; English translation: Funct. Anal. Appl., **9** (1975), 97–102
- [2] J. Berndt, M. Brück, *Cohomogeneity one actions on hyperbolic spaces*, J. Reine Angew. Math., **541** (2001), 209–235
- [3] J. Berndt, J.C. Diaz-Ramos, H. Tamaru; *Hyperpolar homogeneous foliations on symmetric spaces of noncompact type*, J. Differential Geom., **86** (2010), 191–235
- [4] J. Berndt, H. Tamaru; *Homogeneous codimension one foliations on noncompact symmetric spaces*, J. Differential Geom., **63** (2003), 1–40
- [5] J. Berndt, H. Tamaru; *Cohomogeneity one actions on noncompact symmetric*

- spaces with a totally geodesic singular orbit*, Tohoku Math. J., **56** (2004), 163–177
- [6] J. Berndt, H. Tamaru; *Cohomogeneity one actions on noncompact symmetric spaces of rank one*, Trans. Amer. Math. Soc., **359** (2007), 3425–3438
 - [7] J. Berndt, H. Tamaru; *Cohomogeneity one actions on symmetric spaces of non-compact type*, J. Reine Angew. Math., **683** (2013), 129–159
 - [8] C. Böhm, R.A. Lafuente; *Non-compact Einstein manifolds with symmetry*, J. Amer. Math. Soc., **36** (2023), 591–651
 - [9] M. Jablonski; *Homogeneous Ricci solitons are algebraic*, Geom. Topol., **18** (2014), 2477–2486
 - [10] L.P. Castellanos Moscoso; *Left-invariant symplectic structures on diagonal almost abelian Lie groups*, Hiroshima Math. J. **52** (2022), 357–378
 - [11] L.P. Castellanos Moscoso, H. Tamaru; *A classification of left-invariant symplectic structures on some Lie groups*, Beitrage Algebra Geom., **64** (2023), 471–491
 - [12] T. Hashinaga, H. Tamaru; *Three-dimensional solvsolitons and the minimality of the corresponding submanifolds*, Internat. J. Math., **28** (2017), 1750048 [31 pages]
 - [13] H. Kodama, A. Takahara, H. Tamaru; *The space of left-invariant metrics on a Lie group up to isometry and scaling*, Manuscripta Math., **135** (2011), 229–243
 - [14] Y. Kondo; *A classification of left-invariant pseudo-Riemannian metrics on some nilpotent Lie groups*, Hiroshima Math. J., **52** (2022), 333–356
 - [15] Y. Kondo, H. Tamaru; *A classification of left-invariant Lorentzian metrics on some nilpotent Lie groups*, Tohoku Math. J., **75** (2023), 89–117
 - [16] A. Kubo, K. Onda, Y. Taketomi, H. Tamaru; *On the moduli spaces of left-invariant pseudo-Riemannian metrics on Lie groups*, Hiroshima Math. J., **46** (2016), 357–374
 - [17] J. Lauret, *Degenerations of Lie algebras and geometry of Lie groups*, Differential Geom. Appl., **18** (2003), 177–194
 - [18] J. Lauret, *Ricci soliton solvmanifolds*, J. Reine Angew. Math., **650** (2011) 1–21
 - [19] A. Naber; *Noncompact shrinking four solitons with nonnegative curvature*, J. Reine Angew. Math., **645** (2010), 125–153
 - [20] P. Petersen, W. Wylie, *On gradient Ricci solitons with symmetry*, Proc. Amer. Math. Soc., **137** (2009) 2085–2092

- [21] Y. Taketomi; *A maximal element of a moduli space of Riemannian metrics*, preprint, arXiv:2210.01483
- [22] Y. Taketomi, H. Tamaru; *On the nonexistence of left-invariant Ricci solitons — a conjecture and examples*, Transf. Groups, **23** (2018), 257–270
- [23] C. Will, *Rank-one Einstein solvmanifolds of dimension 7*, Differential Geom. Appl., **19** (2003), 307–318