Lie 球面幾何学の複素化と
実グラスマン多様体の全複素部分多様体

塚田　和美　　(お茶の水女子大学) *

序

私は四元数ケーラー多様体の複素部分多様体に興味を持って研究を続けてきた．n 次元実ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ の向き付けられた 4 次元部分空間全体のなす実グラスマン多様体 $\widetilde{\mathrm{Gr}}_4(\mathbb{R}^n)$ は四元数ケーラー構造をもつことが知られている． J.A.Wolf ([6]) によって分類された対称四元数ケーラー多様体の 1 種である．本研究はグラスマン多様体 $\widetilde{\mathrm{Gr}}_4(\mathbb{R}^n)$ の半分次元全複素部分多様体について Lie 球面幾何学の複素化と呼ばれるべき幾何学との関連に着目して調べることを目的としている．以下でその関連の概要を述べる．

n 次元複素ベクトル空間 $\mathbb{C}^n$ の複素 2 次元部分空間で標準的な複素内積を制限したとき零となるもの全体 $\mathrm{H}_2(\mathbb{C}^n)$ は（複素） $2n-7$ 次元複素多様体となり，さらに正則接触構造をもつ．$\mathrm{H}_2(\mathbb{C}^n)$ から $\widetilde{\mathrm{Gr}}_4(\mathbb{R}^n)$ への自然な射影が定義され，これは $\widetilde{\mathrm{Gr}}_4(\mathbb{R}^n)$ の四元数ケーラー構造に関するツイスターファイブレーションになっている．ツイスター空間は四元数ケーラー多様体を研究する際重要で有効な方法を与える．$z_1^2+z_2^2+\cdots+z_{n-2}^2=1$ で定義される $\mathbb{C}^{n-2}$ の複素超曲面を $\mathbb{C}S^{n-3}$ で表し，複素球面と呼ぶ．$\mathbb{C}S^{n-3}$ には複素内積から誘導された複素リーマン計量が入り複素リーマン多様体になる．$\mathbb{C}S^{n-3}$ の単位接ベクトル束 $S(T\mathbb{C}S^{n-3})$ は $\mathrm{H}_2(\mathbb{C}^n)$ への正則埋め込みをもち，その像は $\mathrm{H}_2(\mathbb{C}^n)$ の開集合となる．以上をまとめると次のような図式を得る：

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{H}_2(\mathbb{C}^n) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\mathbb{C}S^{n-3} & & \widetilde{\mathrm{Gr}}_4(\mathbb{R}^n).
\end{tikzcd}$$

ただし，左側のファイブレーションの定義域は $\mathrm{H}_2(\mathbb{C}^n)$ 全体ではなく，$S(T\mathbb{C}S^{n-3})$ からの正則埋め込みによる像に限る．それぞれのファイブレーションと四元数ケーラー幾何学，Lie 球面幾何学の複素化との関係の概要を述べる．

上記右側のファイブレーションについて： $\widetilde{\mathrm{Gr}}_4(\mathbb{R}^n)$ の複素部分多様体から $\mathrm{H}_2(\mathbb{C}^n)$ へのリフトが定まる（ツイスターリフトと呼ばれる）．この複素部分多様体が全複素部分多様体であるための必要十分条件はツイスターリフトが正則はめ込みで $\mathrm{H}_2(\mathbb{C}^n)$ の正則接触構造に関して積分多様体になることである．特に，$\widetilde{\mathrm{Gr}}_4(\mathbb{R}^n)$ の半分次元全複素部分多様体のツイスターリフトは $\mathrm{H}_2(\mathbb{C}^n)$ のルジャンドル部分多様体になる．逆にルジャンドル部分多様体を射影することにより全複素部分多様体が得られる．

上記左側のファイブレーションについて：複素球面 $\mathbb{C}S^{n-3}$ の非退化複素超曲面の単位法ベクトル場により $\mathrm{H}_2(\mathbb{C}^n)$ への正則はめ込みが定まり，正則接触構造に関してルジャンドル部

*部分多様体幾何とリー群作用 2022 記録集

本研究は JSPS 科研費 18K03271 の助成を受けたものです

分多様体になる．ルジャンドル部分多様体の接触幾何学の視点から複素球面 $\mathbb{C}S^{n-3}$ の複素超曲面について論ずることが，Lie 球面幾何学の複素化に相当する幾何学である．

以上を統合することにより， $\mathrm{H}_2(\mathbb{C}^n)$ を仲立ちに複素球面 $\mathbb{C}S^{n-3}$ の複素超曲面と実グラスマン多様体 $\widetilde{\mathrm{Gr}}_4(\mathbb{R}^n)$ の全複素部分多様体の間に対応関係があることが見いだされた．

$$\begin{array}{rcl} \text{複素球面の複素超曲面} & \rightarrow & \mathrm{H}_2(\mathbb{C}^n) \text{ のルジャンドル部分多様体} \\ & \leftrightarrow & \widetilde{\mathrm{Gr}}_4(\mathbb{R}^n) \text{ の半分次元全複素部分多様体} \end{array}$$

上記対応関係に着目して $\widetilde{\mathrm{Gr}}_4(\mathbb{R}^n)$ の全複素部分多様体の構成，特徴付け等の問題を考えることが研究課題である．

本講演では，$\mathrm{H}_2(\mathbb{C}^n)$ のルジャンドル部分多様体に関する Lie 球面幾何学の複素化の視点からの研究について得られた結果を中心に報告する．ツイスターファイブレーション $\mathrm{H}_2(\mathbb{C}^n) \to \widetilde{\mathrm{Gr}}_4(\mathbb{R}^n)$，全複素部分多様体の定義等を含む四元数ケーラー多様体の複素部分多様体の一般論については，[7] やその参考文献などを参照してほしい．

本講演の構成は以下の通り：

§1 $\mathrm{H}_2(\mathbb{C}^n)$ の幾何

§2 複素リーマン幾何

§3 Lie 球面幾何学の複素化

§1 $\mathrm{H}_2(\mathbb{C}^n)$ の幾何

この節では $\mathrm{H}_2(\mathbb{C}^n)$ の正則接触構造，ルジャンドル部分多様体について述べる．

$\mathbb{C}^n$ で複素数を成分に持つ n 項列ベクトル全体のなす複素ベクトル空間を表す．$\langle\ ,\ \rangle$ を $\mathbb{C}^n$ の標準的な複素内積とする．即ち

$$\langle z, w\rangle = \sum_{i=1}^{n} z_i w_i \qquad z, w \in \mathbb{C}^n$$

$W \subset \mathbb{C}^n$ を複素部分空間とする． W の任意のベクトル u, v に対して， $\langle u, v\rangle = 0$ が成り立つとき，W を**等方的部分空間 (isotropic subspace)** という．

$\mathrm{Gr}_2(\mathbb{C}^n)$ ($n \geq 6$) で $\mathbb{C}^n$ の複素 2 次元部分空間全体のなす複素グラスマン多様体を表し，$\mathrm{H}_2(\mathbb{C}^n)$ で 2 次元等方的部分空間全体のなす集合を表す．$\mathrm{Gr}_2(\mathbb{C}^n)$ は (複素) $2(n-2)$ 次元複素多様体で，$\mathrm{H}_2(\mathbb{C}^n)$ は $\mathrm{Gr}_2(\mathbb{C}^n)$ の（複素）余次元 3 の複素部分多様体になる．複素内積 $\langle\ ,\ \rangle$ を保つ $\mathbb{C}^n$ の複素線形変換で行列式 1 となるもの全体のなす複素 Lie 群を $SO(n,\mathbb{C})$ で表す． $SO(n,\mathbb{C})$ は $\mathrm{Gr}_2(\mathbb{C}^n)$ に複素 Lie 変換群として作用する．$\mathrm{H}_2(\mathbb{C}^n)$ はこの作用で不変である．さらに，$SO(n,\mathbb{C})$ は $\mathrm{H}_2(\mathbb{C}^n)$ に推移的に作用する．

$\mathrm{H}_2(\mathbb{C}^n)$ の幾何学を複素ベクトル束を用いて論ずる．$\underline{\mathbb{C}^n} = \mathrm{Gr}_2(\mathbb{C}^n) \times \mathbb{C}^n$ を $\mathrm{Gr}_2(\mathbb{C}^n)$ 上の自明束，$E \subset \underline{\mathbb{C}^n}$ を**同語反復部分束 (tautological bundle)** とする．即ち

$$E = \{(e, v) \in \mathrm{Gr}_2(\mathbb{C}^n) \times \mathbb{C}^n \mid v \in e\}$$

E は自明束の正則部分ベクトル束である．$\underline{\mathbb{C}^n}/E$ で商ベクトル束を表す．自然に正則ベクトル束になる．$\pi_E : \underline{\mathbb{C}^n} \to \underline{\mathbb{C}^n}/E$ を射影とする．π_E は正則ベクトル束の間の束準同型写像になる．$\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(E, \underline{\mathbb{C}^n}/E)$ を各ファイバーにおける複素線形写像からなる複素ベクトル束とする．複素グラスマン多様体 $\mathrm{Gr}_2(\mathbb{C}^n)$ の接ベクトル束 $T\mathrm{Gr}_2(\mathbb{C}^n)$ と $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(E, \underline{\mathbb{C}^n}/E)$ とは複素ベクトル束として同型になる．その同型対応は次のように与えられる：d を $\underline{\mathbb{C}^n}$ の自明接続とする．$e \in \mathrm{Gr}_2(\mathbb{C}^n), v \in e$ に対して e の近傍で定義された E の切断 s を $s(e) = v$ となるように選ぶ．$X \in T_e\mathrm{Gr}_2(\mathbb{C}^n)$ に対し $\alpha(X) : e \to \mathbb{C}^n/e$ を

$$\alpha(X)v = \pi_E(d_X s) \tag{1.1}$$

で定める．$\alpha(X)v$ は切断 s の選び方によらず定義される．また，$\alpha(X)$ は e から $\mathbb{C}^n/e$ への複素線形写像である．このように定められた $\alpha : T\mathrm{Gr}_2(\mathbb{C}^n) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(E, \underline{\mathbb{C}^n}/E)$ は複素ベクトル束としての同型写像になる．この同型対応で，接ベクトル束と $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(E, \underline{\mathbb{C}^n}/E)$ とを同一視する．

多様体 M から $\mathrm{Gr}_2(\mathbb{C}^n)$ への写像 f 及びその微分 df を ベクトル束の言葉で記述する．同語反復部分束を f で引き戻すことにより，次の 1 対 1 対応が成立する：

$$\text{写像 } f : M \to \mathrm{Gr}_2(\mathbb{C}^n) \quad \leftrightarrow \quad \begin{array}{c} \text{部分ベクトル束} \\ E \subset \underline{\mathbb{C}^n} = M \times \mathbb{C}^n \end{array}$$

また，df には実線形写像

$$df : TM \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(E, \underline{\mathbb{C}^n}/E)$$

が対応している．f が複素多様体 M からの正則写像ならば，E は自明束 $\underline{\mathbb{C}^n} = M \times \mathbb{C}^n$ の正則部分ベクトル束となり，df は複素ベクトル束の間の束準同型写像になる．$\mathrm{H}_2(\mathbb{C}^n)$ は $\mathrm{Gr}_2(\mathbb{C}^n)$ の複素部分多様体であるから，$\mathrm{H}_2(\mathbb{C}^n)$ の接ベクトル空間 $T_e\mathrm{H}_2(\mathbb{C}^n)$ には $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(e, \mathbb{C}^n/e)$ の複素部分空間が対応している．それは次で与えられる：

$$T_e\mathrm{H}_2(\mathbb{C}^n) = \{\phi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(e, \mathbb{C}^n/e) \mid \langle \phi(u), v\rangle + \langle u, \phi(v)\rangle = 0, \quad u, v \in e\}$$

ここで，e は等方的部分空間であるから，$\langle \phi(u), v\rangle$ は $\phi(u) \in \mathbb{C}^n/e$ に関して，代表元の選び方によらず定まることに注意する．

$\mathrm{H}_2(\mathbb{C}^n)$ に正則接触構造を定義しよう．複素余次元 1 の接分布 $\mathcal{D}$ を次のように定める：各 $e \in \mathrm{H}_2(\mathbb{C}^n)$ で

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_e &= \{\phi \in T_e\mathrm{H}_2(\mathbb{C}^n) \mid \langle \phi(u), v\rangle = 0, \quad u, v \in e\} \\ &= \{\phi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(e, \mathbb{C}^n/e) \mid \langle \phi(u), v\rangle = 0, \quad u, v \in e\} \\ &= \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(e, e^{\perp}/e)\end{aligned}$$

とおく．ここで，$e^{\perp}$ は複素内積 $\langle\ ,\ \rangle$ に関して e に直交する $\mathbb{C}^n$ の部分空間を表す．e は等方的部分空間であるから，$e \subset e^{\perp}$ であることに注意する．また，商ベクトル空間 $e^{\perp}/e$ の次元は $n-4$ である．$\mathcal{D}$ は $SO(n, \mathbb{C})$ の作用で不変な接分布である．正則接触構造は次のように定義される：(複素) $2m+1$ 次元複素多様体 Z の（複素）余次元 1 接分布 $\mathcal{D}$ に対し，

各点の近傍 U 上に正則 1-形式 ω が存在し， U 上で $\omega \wedge (d\omega)^m \neq 0, \omega|_{\mathcal{D}} = 0$ をみたすとき， $\mathcal{D}$ を**正則接触構造 (holomorphic contact structure)** という．

命題 1.1 $\mathcal{D}$ は $\mathrm{H}_2(\mathbb{C}^n)$ の正則接触構造となる．また, $SO(n, \mathbb{C})$ は接触構造を保つ変換群として作用する．

$SO(n, \mathbb{C})$ の作用による $\mathrm{H}_2(\mathbb{C}^n)$ の変換群を **Lie 接触変換群**とよぶ.

正則接触構造 $\mathcal{D}$ に関する $\mathrm{H}_2(\mathbb{C}^n)$ のルジャンドル部分多様体について考える．M を複素多様体とし, その正則はめ込み (holomorphic immersion) $\lambda : M \to \mathrm{H}_2(\mathbb{C}^n)$ が $\mathcal{D}$ の積分多様体となるものとする．即ち，$d\lambda$ による接ベクトル空間の像が $\mathcal{D}$ に含まれている．そのようなはめ込まれた複素多様体で最大次元 ($\frac{1}{2} \dim \mathcal{D}$) となるものがルジャンドル部分多様体である．ここで議論されている設定では，$\dim M = \frac{1}{2} \dim \mathcal{D} = \frac{1}{2}(\dim \mathrm{H}_2(\mathbb{C}^n) - 1) = n - 4$ となる．

M を $n-4$ 次元複素多様体とし，$\lambda : M \to \mathrm{H}_2(\mathbb{C}^n)$ を正則写像とする．同語反復部分束を引き戻すことにより，自明束 $\underline{\mathbb{C}^n} = M \times \mathbb{C}^n$ の正則部分ベクトル束 E が定まる．M の各点の近傍で定義された $\mathbb{C}^n$ に値をもつ正則関数 Z_1, Z_2 が E の局所枠場となっているとき，$\lambda = [Z_1, Z_2]$ と表すことにする．以上の設定で $\lambda : M \to \mathrm{H}_2(\mathbb{C}^n)$ がルジャンドル部分多様体となるための条件を与えよう（cf. [2]）.

補題 1.2 $\lambda : M \to \mathrm{H}_2(\mathbb{C}^n)$ がルジャンドル部分多様体になるための必要十分条件は M の各点 p の近傍で次の条件をみたす E の局所枠場 $[Z_1, Z_2]$ が存在することである．

(1) $\langle Z_i, Z_j \rangle = 0 \quad (i, j = 1, 2)$

(2) $X \in T_pM$ に対して，$dZ_1(X), dZ_2(X) \in \{Z_1(p), Z_2(p)\}_{\mathbb{C}}$ ならば， $X = 0$.

(3) $\langle dZ_1, Z_2 \rangle = 0$

上記補題の条件 (2) で，$\{Z_1(p), Z_2(p)\}_{\mathbb{C}}$ は $Z_1(p), Z_2(p)$ で張られる $\mathbb{C}^n$ の部分空間即ち E_p を表す．(2) は λ がはめ込みになることに対応している．(3) で $\langle dZ_1, Z_2 \rangle$ は p の近傍で定義された正則 1 次微分形式を表している．条件 (3) は λ が $\mathcal{D}$ の積分多様体となることに対応している．

ルジャンドル部分多様体の自然な例を 3 つ述べる．

例 1.3 (1) 複素 2 次超曲面 $Q^{n-2} = \{[z] \in \mathbb{C}P^{n-1} \mid z \in \mathbb{C}^n - \{0\}, \quad \langle z, z \rangle = 0\}$ の元からルジャンドル部分多様体を構成する．固定された $\kappa \in Q^{n-2}$ に対し

$$Q(\kappa) = \{W \in \mathrm{H}_2(\mathbb{C}^n) \ |W \supset \kappa\}$$

とおく．$Q(\kappa)$ は $n-4$ 次元複素 2 次超曲面に正則同型であり，$\mathrm{H}_2(\mathbb{C}^n)$ のルジャンドル部分多様体になる．$Q(\kappa)$ は $\mathrm{H}_2(\mathbb{C}^n)$ のルジャンドル部分多様体に対し曲率球を定義する際, 基本図形となる．

(2) V を $\mathbb{C}^n$ の非退化部分空間，$V^\perp$ を V の直交補空間とする．$V, V^\perp$ それぞれの次元を $r+2, s+2$ $(r, s \geq 1)$ とする．従って特に $r + s = n - 4$ である．$P(V), P(V^\perp)$ を $V, V^\perp$

の射影空間とする．複素 2 次超曲面 Q^r, Q^s を次で定める．

$$\begin{aligned} Q^r &= P(V) \cap Q^{n-2} = \{[z] \in P(V) \mid \langle z, z\rangle = 0\} \\ Q^s &= P(V^\perp) \cap Q^{n-2} = \{[w] \in P(V^\perp) \mid \langle w, w\rangle = 0\}. \end{aligned}$$

正則写像 $\lambda : Q^r \times Q^s \to \mathrm{H}_2(\mathbb{C}^n)$ を次で定める：

$$\lambda([z],[w]) = \{z, w\}_{\mathbb{C}}\,.$$

λ はルジャンドル埋め込みである．

(3) V を $\mathbb{C}^{2m}$ の m 次元等方的部分空間とする．V の任意の複素 2 次元部分空間は明らかに $\mathrm{H}_2(\mathbb{C}^{2m})$ の元である．$\mathrm{Gr}_2(V)$ を V の複素 2 次元部分空間全体のなす複素グラスマン多様体とする．このとき，埋め込み $\lambda : \mathrm{Gr}_2(V) \to \mathrm{H}_2(\mathbb{C}^{2m})$ はルジャンドル部分多様体になる．

これらがルジャンドル部分多様体になることは，補題 1.2 によって分かる．

§2 複素リーマン幾何

この節では複素球面の複素超曲面から $\mathrm{H}_2(\mathbb{C}^n)$ へのルジャンドルはめ込みの構成法について述べる．M を複素多様体とする．M 上の正則 $(0,2)$ 型対称テンソル場 g が各点で非退化な複素内積を定める時，**正則リーマン計量**と呼ばれる．正則リーマン計量 g を備えた複素多様体 (M,g) を**複素リーマン多様体** という (cf. Lebrun [4]). 複素座標系 $z_1, \cdots, z_m$ のもとで正則リーマン計量は次のように表示される：

$$g = \sum_{i,j=1}^{m} g_{ij}\, dz_i \otimes dz_j,$$

ここで，g_{ij} は正則関数，即ち $\bar\partial g_{ij} = 0$．また 非退化性により $\det(g_{ij}) \neq 0$ をみたす．正則リーマン計量 g の実部を $g_{\mathbb{R}}$ とおく．このとき， $g_{\mathbb{R}}$ は符号数 (m,m) をもつ擬リーマン計量で， $g_{\mathbb{R}}(JX, JY) = -g_{\mathbb{R}}(X,Y)$ をみたす．ここで，J は M の複素構造を表す．このような計量は**アンチ-ケーラー計量**と呼ばれている．アンチ-ケーラー多様体に対し興味深い研究が行われている（cf. [1],[3]）．両者は本質的に同じ対象である．

複素リーマン多様体に対して，(実) リーマン幾何学とほぼ同じ議論が展開される．最初に適合する接続の存在が示される．複素多様体 M 上の捩れのないアフィン接続 ∇ で $\nabla J = 0$ をみたすものを複素接続という．複素接続 ∇ が**正則**であるとは任意の局所正則ベクトル場 Z, W に対して $\nabla_Z W$ が正則であるときをいう．この条件は，複素座標系に関する接続係数が正則関数となることと同値である．

命題 2.1 (cf [4]) (M,g) を複素リーマン多様体とする．このとき，正則アフィン接続 ∇ で $\nabla g = 0$ をみたすものが唯 1 つ存在する．

適合する接続が導入されれば，この接続に基づき様々な幾何学的諸量や概念 – 曲率テンソル，測地線など – が定義され，幾何学が展開される．複素リーマン多様体の複素部分多様体論も興味深いのではないかと思う．$(\tilde M, \tilde g)$ を複素リーマン多様体とし，$f : M \to \tilde M$ を複

素多様体 M から $\tilde{M}$ への正則はめ込みとする．M の各点 p で，$df(T_pM)$ が $\tilde{g}$ に関して非退化部分空間になっているとき，**非退化部分多様体** という．このとき，引き戻し $f^{-1}T\tilde{M}$ は M 上の正則ベクトル束となり，接ベクトル束 TM の像 $df(TM)$ はその正則部分ベクトル束である．$\tilde{g}$ に関する直交補空間をとり，法ベクトル束 $T^{\perp}M$ を定義することができる．$T^{\perp}M$ は $f^{-1}T\tilde{M}$ の正則部分ベクトル束である．このようにして，正則ベクトル束の直和分解を得る：

$$f^{-1}T\tilde{M} = df(TM) + T^{\perp}M.$$

上記のような設定で（実）リーマン部分多様体論と同様に，第 2 基本形式，型作用素などの概念が定義され，ガウス，ワインガルテンの公式，部分多様体の基本方程式である ガウス方程式，コダッチ方程式，リッチ方程式が導かれる．

複素リーマン多様体の典型例である複素球面について述べる．複素ベクトル空間 $\mathbb{C}^{n-2}$ は，各点 $\boldsymbol{z}$ における接ベクトル空間 $T_{\boldsymbol{z}}\mathbb{C}^{n-2}$ と $\mathbb{C}^{n-2}$ との同一視のもと，標準的な複素内積 $\langle\ ,\ \rangle$ から定まる正則リーマン計量 $\sum_{i=1}^{n-2} dz_i \otimes dz_i$ をもつ．$\mathbb{C}^{n-2}$ の超曲面 $\mathbb{C}S^{n-3}$ を次で定め，**複素球面** と呼ぶ：

$$\mathbb{C}S^{n-3} = \left\{ \boldsymbol{z} \in \mathbb{C}^{n-2} \mid \langle \boldsymbol{z}, \boldsymbol{z} \rangle = 1 \right\}.$$

このとき，$\boldsymbol{z} \in \mathbb{C}S^{n-3}$ における接ベクトル空間 $T_{\boldsymbol{z}}\mathbb{C}S^{n-3}$ は次で与えられる:

$$T_{\boldsymbol{z}}\mathbb{C}S^{n-3} = \left\{ X \in T_{\boldsymbol{z}}\mathbb{C}^{n-2} = \mathbb{C}^{n-2} \mid \langle X, \boldsymbol{z} \rangle = 0 \right\}.$$

このようにして，直交直和分解

$$\mathbb{C}^{n-2} = T_{\boldsymbol{z}}\mathbb{C}S^{n-3} + \mathbb{C}\boldsymbol{z}$$

を得る．従って，$\mathbb{C}S^{n-3}$ は $\mathbb{C}^{n-2}$ の非退化部分多様体であり，誘導計量に関して複素リーマン多様体になる．また，原点からの位置ベクトル $\boldsymbol{z}$ は $\boldsymbol{z}$ での単位法ベクトルとみることができる．誘導計量に適合する正則アフィン接続の曲率テンソル R は次をみたす:

$$R(X,Y)Z = \langle Y, Z \rangle X - \langle X, Z \rangle Y, \qquad X, Y, Z \in T_{\boldsymbol{z}}\mathbb{C}S^{n-3}$$

$\mathbb{C}S^{n-3}$ の単位接ベクトル束 $S(T\mathbb{C}S^{n-3})$ は $\mathbb{C}^{n-2} \times \mathbb{C}^{n-2}$ の余次元 3 の複素部分多様体として次のように表される：

$$S(T\mathbb{C}S^{n-3}) = \left\{ (\boldsymbol{z}, \xi) \in \mathbb{C}^{n-2} \times \mathbb{C}^{n-2} \mid \langle \boldsymbol{z}, \boldsymbol{z} \rangle = 1, \langle \xi, \xi \rangle = 1, \langle \boldsymbol{z}, \xi \rangle = 0 \right\}.$$

π_1 を $\mathbb{C}^{n-2} \times \mathbb{C}^{n-2}$ の第 1 成分への射影を $S(T\mathbb{C}S^{n-3})$ に制限した写像とする．π_1 は $S(T\mathbb{C}S^{n-3})$ から $\mathbb{C}S^{n-3}$ への単位接ベクトル束としての射影に外ならない．$S(T\mathbb{C}S^{n-3})$ の余次元 1 の接分布 $\mathcal{D}$ を

$$\mathcal{D}_{(\boldsymbol{z}_0, \xi_0)} = \left\{ X \in T_{(\boldsymbol{z}_0, \xi_0)} S(T\mathbb{C}S^{n-3}) \mid \langle d\pi_1(X), \xi_0 \rangle = 0 \right\}$$

で定めると，$\mathcal{D}$ は $S(T\mathbb{C}S^{n-3})$ の正則接触構造になる．

$(\boldsymbol{z},\xi) \in S(T\mathbb{C}S^{n-3})$ に対して，${}^t({}^t\boldsymbol{z},\sqrt{-1},0)$, ${}^t({}^t\xi,0,\sqrt{-1})$ で張られる $\mathbb{C}^n$ の 2 次元部分空間 $\left\{{}^t({}^t\boldsymbol{z},\sqrt{-1},0),{}^t({}^t\xi,0,\sqrt{-1})\right\}_{\mathbb{C}}$ は等方的部分空間である．このようにして定まる $S(T\mathbb{C}S^{n-3})$ から $\mathrm{H}_2(\mathbb{C}^n)$ への写像を ψ で表す．即ち，

(2.1) $$\psi : S(T\mathbb{C}S^{n-3}) \ni (\boldsymbol{z},\xi) \mapsto \left\{{}^t({}^t\boldsymbol{z},\sqrt{-1},0),{}^t({}^t\xi,0,\sqrt{-1})\right\}_{\mathbb{C}} \in \mathrm{H}_2(\mathbb{C}^n).$$

命題 2.2 ψ は $S(T\mathbb{C}S^{n-3})$ から $\mathrm{H}_2(\mathbb{C}^n)$ の開部分多様体への正則同型写像である．さらに正則接触構造を保つ．

複素球面の複素超曲面から 単位接ベクトル束 $S(T\mathbb{C}S^{n-3})$ のルジャンドル部分多様体を構成する.（実）リーマン多様体の単位接ベクトル束での接触構造に対するルジャンドル部分多様体の構成の類似である．M を $n-4$ 次元複素多様体，$\varphi : M \to \mathbb{C}S^{n-3}$ を非退化超曲面はめ込みとする．このとき，単位法ベクトル束 $S(T^{\perp}M)$ から M への射影は 2 重被覆になっている．M 上連続な単位法ベクトル場 ξ がとれると仮定する．このとき

$$\hat{\varphi} = (\varphi,\xi) : M \to \mathbb{C}^{n-2} \times \mathbb{C}^{n-2}$$

とおく．$\hat{\varphi}$ は M から単位接ベクトル束 $S(T\mathbb{C}S^{n-3})$ への正則はめ込みになる．さらにルジャンドルはめ込みである．$S(T\mathbb{C}S^{n-3})$ から $\mathrm{H}_2(\mathbb{C}^n)$ の中への正則同型写像 ψ との合成写像を考えることにより，ルジャンドルはめ込み $\psi\circ\hat{\varphi} : M \to \mathrm{H}_2(\mathbb{C}^n)$ を得る．$\mathrm{H}_2(\mathbb{C}^n)$ におけるルジャンドル部分多様体の接触幾何学の視点から複素球面 $\mathbb{C}S^{n-3}$ の複素超曲面について論ずることが，Lie 球面幾何学の複素化に相当する幾何学である．特に，接触変換群として作用する $SO(n,\mathbb{C})$ のもとで不変な幾何学として議論する．Lie 球面幾何学の複素化の議論は次節で述べることにし，ここではグラスマン多様体 $\widetilde{\mathrm{Gr}}_4(\mathbb{R}^n)$ の全複素部分多様体の構成への応用について見ることにする．$\pi : \mathrm{H}_2(\mathbb{C}^n) \to \widetilde{\mathrm{Gr}}_4(\mathbb{R}^n)$ を序で述べた $\widetilde{\mathrm{Gr}}_4(\mathbb{R}^n)$ の四元数ケーラー構造に関するツイスターファイブレーションとする．

定理 2.3 $\varphi : M \to \mathbb{C}S^{n-3}$ を非退化超曲面はめ込みとし，連続な単位法ベクトル場 ξ がとれると仮定する．このとき，$\tilde{\varphi} = \pi\circ\psi\circ\hat{\varphi} : M \to \widetilde{\mathrm{Gr}}_4(\mathbb{R}^n)$ は（半分次元）全複素はめ込みである．

この結果により，$\mathbb{C}S^{n-3}$ の複素超曲面の興味深い例の構成とそれらに対応する $\mathrm{H}_2(\mathbb{C}^n)$ のルジャンドル部分多様体，$\widetilde{\mathrm{Gr}}_4(\mathbb{R}^n)$ の全複素部分多様体の幾何学的性質の解明が今後の課題となろう．ここでは，初等的な例– 超球面 – について考える．最初に，$\mathbb{C}S^{n-3}$ の超球面の構成について述べる． $p \in \mathbb{C}^{n-2}$ $(p \neq 0)$, $c \in \mathbb{C}$ に対して，$\mathbb{C}S^{n-3}$ の超曲面を次で定める：

$$M = \left\{\boldsymbol{z} \in \mathbb{C}S^{n-3} \mid \ \langle p,\boldsymbol{z}\rangle = c\ \right\}$$

このとき，M が非退化超曲面になるための必要十分条件は $\langle p,p\rangle \neq c^2$．非退化超曲面になるとき, M 上に連続な単位法ベクトル場 ζ を定めることができ，ζ に関する型作用素 A_ζ は $A_\zeta = \lambda\,\mathrm{id}$ (λ はある複素定数) をみたす．このような型作用素をもつ非退化超曲面を**超球面**と呼ぶ．超球面の誘導計量に関する曲率テンソルは

$$R(X,Y)Z = (1+\lambda^2)\{\langle Y,Z\rangle X - \langle X,Z\rangle Y\}$$

で与えられる．

上の事実を受け，単位法ベクトル場の選び方を含め次のような超球面を考える：
Case 1. $\langle p,p\rangle = 1$, $\rho\in\mathbb{C}$, $\rho\neq m\pi$ $(m\in\mathbb{Z})$ に対し，

$$S(p,\rho)=\left\{\boldsymbol{z}\in\mathbb{C}S^{n-3}\mid \langle p,\boldsymbol{z}\rangle=\cos\rho\right\}$$

単位法ベクトル場 $\zeta=\frac{1}{\sin\rho}(p-\cos\rho\,\boldsymbol{z})$. このとき，主曲率は $\cot\rho=\frac{\cos\rho}{\sin\rho}$.
Case 2. $\langle p,p\rangle=0$ $(p\neq 0)$ に対し，

$$S(p,1,+)=\left\{\boldsymbol{z}\in\mathbb{C}S^{n-3}\mid \langle p,\boldsymbol{z}\rangle=1\right\}$$

単位法ベクトル場 $\zeta=\sqrt{-1}(p-\boldsymbol{z})$. このとき，主曲率は $\sqrt{-1}$. Case 2 の誘導計量は平坦であり，ホロ球面に相当する．

超球面はこれらで尽くされる．超球面は Lie 球面幾何学を展開する上での基本図形になっている．これらの超球面のルジャンドルはめ込み $\psi\circ\hat{\varphi}:M\to \mathrm{H}_2(\mathbb{C}^n)$ による像は 例 1.3 (1) で与えられた複素 2 次超曲面 $Q(\kappa)$ の開部分集合になっている．ここで，Case 1 のとき $\kappa={}^t({}^tp,\sqrt{-1}\cos\rho,\sqrt{-1}\sin\rho)$, Case 2 のとき $\kappa={}^t({}^tp,\sqrt{-1},1)$ である．

§3 Lie 球面幾何学の複素化

最初に，例 1.3 (1) の特徴付けに相当する結果を述べる．

命題 3.1 $\lambda:M\to\mathrm{H}_2(\mathbb{C}^n)$ を $n-4$ (≥ 2) 次元複素多様体 M からのルジャンドルはめ込みとする．E を同語反復部分束を引き戻すことにより定まる自明束 $\underline{\mathbb{C}^n}=M\times\mathbb{C}^n$ の正則部分ベクトル束とする．E の正則直線部分束 K で次の条件をみたすものが存在すると仮定する： M の任意の点 p, 任意の接ベクトル $X\in T_pM$ に対し，$d\lambda(X)k=0$, $k\in K_p$ が成立する．ここで，$d\lambda(X)$ を $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(E,\underline{\mathbb{C}^n}/E)$ の元として捉えている．このとき，正則直線部分束 K の定める複素 2 次超曲面 Q^{n-2} への写像は定値である．その像となる Q^{n-2} の点を κ とすると, λ の像は $Q(\kappa)$ の開部分多様体になる．

命題 3.1 を受け，(実)Lie 球面幾何学の理論に倣い，ルジャンドル部分多様体に対して曲率球を導入する（cf. [2],[5]）．

定義 3.2 $\lambda:M\to\mathrm{H}_2(\mathbb{C}^n)$ を $n-4$ 次元複素多様体 M からのルジャンドルはめ込みとし，p を M の点とする．0 でない $k\in\lambda(p)$ に対し，0 でない接ベクトル $X\in T_pM$ で $d\lambda(X)k=0$ をみたすものが存在するとき，$[k]\in Q^{n-2}$ を点 p での λ の**曲率球 (curvature sphere)** といい，X を $[k]$ に対応する**曲率方向 (a direction of curvature)** という．曲率方向となる接ベクトルのなす部分空間の次元を曲率球 $[k]$ の重複度という．

ここでは，Q^{n-2} の元 κ と κ の定める複素 2 次超曲面 $Q(\kappa)\subset\mathrm{H}_2(\mathbb{C}^n)$ とを同一視して曲率球という用語を用いている．

各点 p での曲率球について次のいずれかが成り立つ：
Case 1. 高々 $n-4$ 個の異なる曲率球が存在する．
Case 2. すべての $k\in\lambda(p)$ について $[k]\in Q^{n-2}$ は曲率球である．

Case 2 は (実)Lie 球面幾何学では起こらない現象である．Case 1,Case 2 それぞれの例をあげよう．

Case 1 の例： $\varphi : M \to \mathbb{C}S^{n-3}$ を非退化超曲面はめ込み, ξ を φ に沿う単位法ベクトル場とする．$Z_1 = {}^t({}^t\varphi, \sqrt{-1}, 0)$, $Z_2 = {}^t({}^t\xi, 0, \sqrt{-1})$, $\lambda = [Z_1, Z_2]$ とおき，φ に対応するルジャンドルはめ込み λ を定める．

$$d\lambda(X)Z_1 = \pi_E(dZ_1(X)) = \pi_E{}^t({}^t d\varphi(X), 0, 0), \quad d\lambda(X)Z_2 = \pi_E(dZ_2(X)) = \pi_E{}^t({}^t d\xi(X), 0, 0).$$

従って，$d\lambda(X)(sZ_1 + Z_2) = 0$ となるための必要十分条件は $s\ d\varphi(X) + d\xi(X) = 0$. これは，$s$ が型作用素 A_ξ の固有値，即ち主曲率，X が主曲率ベクトルであることを意味している．Lie 球面幾何学における主曲率の対応物が曲率球である．この場合は，相異なる曲率球の個数と主曲率の個数は一致する．

Case 2 の例：例 1.3 (3) のルジャンドル埋め込み $\lambda : \mathrm{Gr}_2(V) \to \mathrm{H}_2(\mathbb{C}^{2m})$.

曲率球の概念は Lie 接触変換群の作用で不変である．即ち，次が成立する（cf. [2],[5]）．

命題 3.3 $\lambda : M \to \mathrm{H}_2(\mathbb{C}^n)$ をルジャンドルはめ込みとし，P を $SO(n, \mathbb{C})$ の元とする．$[k] \in Q^{n-2}$ を点 p での λ の曲率球とする．このとき，$P[k]$ はルジャンドルはめ込み $P\lambda$ の点 p での曲率球である．また，$[k], P[k]$ に対応する曲率方向は一致する．

曲率球の性質に着目したルジャンドル部分多様体の特徴付けは Lie 球面幾何学の興味深い問題と思う．命題 3.1 は重複度 $n-4\ (= \dim M)$ の唯 1 つの曲率球をもつルジャンドル部分多様体を決定した結果とみることができる．それでは，相異なる曲率球を 2 つもつ場合はどうなるだろうか? （実）Lie 球面幾何学では（追加の条件も課され）**デュパンサイクライド (a cyclide of Dupin)** と呼ばれている対象が調べられている（cf. [2],[5]）．これは（実）Lie 球面幾何学の枠組みで Pinkall によって決定されている ([5], Theorem 3). 複素版を考えよう.（実）Lie 球面幾何学に倣い，デュパンサイクライドを定義する．$\lambda : M \to \mathrm{H}_2(\mathbb{C}^n)$ を $n-4$ 次元複素多様体 M からのルジャンドルはめ込みとする．λ が次の条件 (i),(ii),(iii) をみたすとき，特性数 (r, s) のデュパンサイクライドという：

(i) M の各点で ちょうど 2 つの曲率球 $[k_1], [k_2]$ をもち，それぞれの重複度は r, s, $(r + s = n - 4)$. さらに，各 $[k_i]$ $(i = 1, 2)$ は M から 2 次超曲面 Q^{n-2} への正則写像を定めているとする．

(ii) T_i $(i = 1, 2)$ を各曲率球 $[k_i]$ の曲率方向ベクトルからなる接分布とする．(i) の仮定のもと，T_i は完全積分可能である．

(iii) 各 i $(i = 1, 2)$ について，T_i の積分多様体上 曲率球 $[k_i]$ は一定である．

例 1.3 (2) は特性数 (s, r) のデュパンサイクライドである.（実）Lie 球面幾何学の場合と同様に $\mathrm{H}_2(\mathbb{C}^n)$ のデュパンサイクライドの分類を得る．証明もほぼ同じである．

定理 3.4 (1) 特性数 (s, r) の連結デュパンサイクライド $\lambda : M \to \mathrm{H}_2(\mathbb{C}^n)$ の像は例 1.3 (2) で示されたデュパンサイクライドに含まれる．

(2) 同じ特性数をもつ 2 つのデュパンサイクライドは，局所的に Lie 接触変換で移り合う．

ここまでは初等的な例に基づく議論であった．今後は，より多くの例を構成し，その幾何学的性質等を調べたい.

参考文献

[1] A.Borowiec, M.Francaviglia, and I.Volovich : *Anti-Kählerian manifolds*, Differ. Geom. Appl. 12(2000), 281-289

[2] T.E.Cecil : *Lie sphere geometry*, 2nd edn, Springer, New York, 2008

[3] N.Koike : *The complexifications of pseudo-Riemannian manifolds and anti-Kaehler geometry*, SUT J. of Math. 50(2014), 271-295

[4] C.Lebrun : *Spaces of complex null geodesics in complex-Riemannian geometry*, Trans. of A.M.S. 278(1983), 209-231

[5] U.Pinkall : *Dupin hypersurfaces*, Math.Ann. 270(1985), 427-440

[6] J.A.Wolf : *Complex homogeneous contact manifolds and quaternionic symmetric spaces*, J. of Math. and Mech. 14(1965), 1033-1047

[7] 塚田 和美 : *Lie* **球面幾何学の複素化と実グラスマン多様体の全複素部分多様体**, 数理解析研究所講究録 2210（2022）,104-122