

コンパクト対称三対の標準形と二重佐武図形

馬場 蔵人（東京理科大学）

井川 治 氏（京都工芸繊維大学）との共同研究

arXiv:2205.08410

部分多様体幾何とリー群作用 2022 （於：東京理科大学）

2023 年 3 月 27 日

導入 (1)

- (G, θ_1, θ_2) : コンパクト対称三対, θ_1 と θ_2 の可換性は仮定しない
- $K_i := G^{\theta_i} = \{g \in G \mid \theta_i(g) = g\}$ ($i = 1, 2$)
- $K_2 \curvearrowright G/K_1$: Hermann 作用

定義 (同値関係 $\sim$ by Matsuki)

$$(G, \theta_1, \theta_2) \sim (G, \theta'_1, \theta'_2)$$

$$\stackrel{\text{def}}{\iff} \exists \varphi \in \text{Aut}(G), \exists \tau \in \text{Int}(G) \text{ s.t. } \theta'_1 = \varphi \theta_1 \varphi^{-1}, \theta'_2 = \tau \varphi \theta_2 \varphi^{-1} \tau^{-1}$$

- $(G, \theta_1, \theta_2) \sim (G, \theta'_1, \theta'_2) \implies (K_2 \curvearrowright G/K_1) \cong (K'_2 \curvearrowright G/K'_1)$
- このとき, $\text{rank}(G, \theta_1, \theta_2) = \text{rank}(G, \theta'_1, \theta'_2)$
- しかし, コンパクト対称三対に付随する種々の量 (例: $\theta_1 \theta_2$ の位数) が, 同値な二つのコンパクト対称三対に対して異なることが頻繁に起こる. そのため, それらから構成される Hermann 作用の扱いやすさに差が現れる.

導入 (2)

- よって、コンパクト対称三対の同型類の中から扱いやすい代表元（標準形）を選ぶ必要が出てくる．
- 一方で、コンパクト対称三対の標準形 (G, θ_1, θ_2) に対して、佐武図形概念を拡張した二重佐武図形が導入される．二重佐武図形から標準形の種々の量を読み取れるだけでなく、 G が単純の場合、コンパクト対称三対の同型類を分類できる．
- 以上の内容は、Hermann 作用の軌道幾何学やコンパクト対称三対をはじめ対称空間論において新しい視点を与えている．

本講演の目的

次の結果について紹介する：

- (1) 二重佐武図形を用いたコンパクト対称三対の分類結果
- (2) コンパクト対称三対の標準形の存在とその性質に関する結果

コンパクト対称三対の例 (1)

例 1 :

- $G = SO(4m)$, $\theta, \theta' : SO(4m)$ の対合,

$$\theta(g) = J_{2m} g J_{2m}^{-1}, \quad \theta'(g) = J'_{2m} g J_{2m}'^{-1} \quad (g \in SO(4m))$$

$$J_{2m} = \begin{pmatrix} & -E_{2m} \\ E_{2m} & \end{pmatrix}, \quad J'_{2m} = \begin{pmatrix} E_{4m-1} & \\ & -1 \end{pmatrix} J_{2m} \begin{pmatrix} E_{4m-1} & \\ & -1 \end{pmatrix}^{-1}$$

と定めると, $G^\theta = U(2m) \cong G^{\theta'} =: U(2m)'$

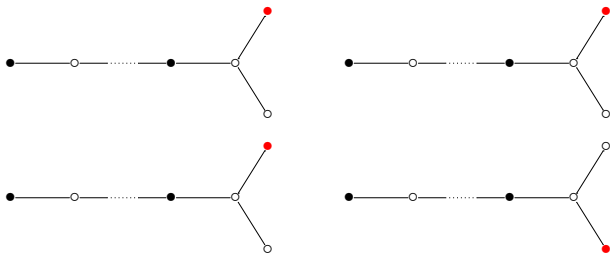
- $(SO(4m), U(2m)) \cong (SO(4m), U(2m)')$ となるが,
 $(SO(4m), U(2m), U(2m)) \not\cong (SO(4m), U(2m), U(2m)')$ である
- 二つの対合 θ と θ' は外部自己同型で移りあう.
- 内部自己同型で移りあわないことは自明でない.

コンパクト対称三対の例 (2)

(続き) $U(2m) \curvearrowright SO(4m)/U(2m)$ (イソトロピー作用) と $U(2m)' \curvearrowright SO(4m)/U(2m)$

視点	$U(2m) \curvearrowright SO(4m)/U(2m)$	$U(2m)' \curvearrowright SO(4m)/U(2m)$
余等質性	m	$m - 1$
軌道	austere 軌道は全測地的	全測地的でない austere 軌道が存在
対称三対 $(\tilde{\Sigma}, \Sigma, W)$	$\Sigma \cap W = \emptyset$	$\Sigma \cap W \neq \emptyset$

二重佐武図形



二重佐武図形を用いたコンパクト対称三対の分類 (1)

- コンパクト対称三対の分類を二重佐武図形を用いて行う。
- この方法はコンパクト対称対を佐武図形を用いて分類した Araki の方法の拡張となる。

$$\begin{array}{ccccc}
 \{\text{コンパクト対称三対}\} / \sim & \longleftrightarrow & \{\text{二重対合ルート系}\} / \sim & \longleftrightarrow & \{\text{二重佐武図形}\} / \sim \\
 \cup & & \cup & & \cup \\
 \{\text{コンパクト対称対}\} / \cong & \longleftrightarrow & \{\text{対合ルート系}\} / \cong & \longleftrightarrow & \{\text{佐武図形}\} / \cong
 \end{array}$$

- この方法がうまくいくためには、コンパクト対称三対の構造を支持する $\mathfrak{g}$ の極大可換部分リー環 $\mathfrak{t}$ をどのように構成すればよいのかが問題となる。
- θ_1 と θ_2 が可換のときは、次のような極大可換な列によって $\mathfrak{t}$ が構成される：

$$\mathfrak{a} \subset \mathfrak{m}_1 \cap \mathfrak{m}_2 \longrightarrow (\mathfrak{a} \subset) \mathfrak{a}_i \subset \mathfrak{m}_i \longrightarrow (\mathfrak{a}_i \subset) \mathfrak{t} \subset \mathfrak{g}$$

注意： θ_1 と θ_2 の可換性から $\mathfrak{a}_1$ と $\mathfrak{a}_2$ の可換性が導かれる。

二重佐武図形を用いたコンパクト対称三対の分類 (2)

- $[(G, \theta_1, \theta_2)]$: コンパクト対称三対 (G, θ_1, θ_2) の $\sim$ に関する同型類

基本補題

$\exists (G, \tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2) \in [(G, \theta_1, \theta_2)]$ & $\exists \mathfrak{t} : \mathfrak{g}$ の極大可換部分リー環 s.t.

- (1) 各 $i = 1, 2$ について, $\mathfrak{t} \cap \tilde{\mathfrak{m}}_i \subset \tilde{\mathfrak{m}}_i$ は極大可換部分空間である. 特に, $\mathfrak{t}$ は $\tilde{\theta}_i$ 不変である.
- (2) $\Delta : \mathfrak{t}$ に関する $\mathfrak{g}$ のルート系, $(\Delta, \sigma_1, \sigma_2) := (\Delta, -\tilde{\theta}_1|_{\mathfrak{t}}, -\tilde{\theta}_2|_{\mathfrak{t}})$ としたとき, Δ の基本系で σ_1 基本系かつ σ_2 基本系となるものが存在する.

注意 :

- (1) より $(G, \tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2)$ から二重対合ルート系 $(\Delta, \sigma_1, \sigma_2)$ を構成できる
- (2) より $(\Delta, \sigma_1, \sigma_2)$ から二重佐武図形を構成できる
- $\mathfrak{t} \cap (\tilde{\mathfrak{m}}_1 \cap \tilde{\mathfrak{m}}_2) =: \mathfrak{a}$ は $\tilde{\mathfrak{m}}_1 \cap \tilde{\mathfrak{m}}_2$ 内の極大可換部分空間であることが示される. よって, $\pi_1(\exp(\mathfrak{a}))$ は Hermann 作用 $\tilde{K}_2 \curvearrowright G/\tilde{K}_1$ の切断である.

二重佐武図形を用いたコンパクト対称三対の分類 (3)

定義

$\Pi \subset \Delta : (\Delta, \sigma_1, \sigma_2)$ の (σ_1, σ_2) 基本系, $S_i : \Pi$ に付随する (G, θ_i) の佐武図形
このとき, (S_1, S_2) を Π に付随する (G, θ_1, θ_2) の二重佐武図形とよぶ.

注意: この定義は Π の取り方に依らないことが確かめられる.

定義

$(S_1, S_2), (S'_1, S'_2) : \Pi, \Pi'$ に付随する二重佐武図形

$(S_1, S_2) \sim (S'_1, S'_2) \stackrel{\text{def}}{\iff} \exists \psi : \Pi \rightarrow \Pi' : \text{Dynkin 図形間の同型写像で佐武図形 } S_i \text{ と } S'_i$
 $(i = 1, 2)$ の間の同型写像となるもの

2つの二重対合ルート系の間には二重佐武図形の $\sim$ から自然に同値関係 $\equiv$ が定義される. このとき, 次の定理が導かれる:

定理 1 (B.-Ikawa).

$$(G, \theta_1, \theta_2) \sim (G, \theta'_1, \theta'_2) \iff (\Delta, \sigma_1, \sigma_2) \equiv (\Delta, \sigma'_1, \sigma'_2) \iff (S_1, S_2) \sim (S'_1, S'_2)$$

二重佐武図形を用いたコンパクト対称三対の分類 (4)

例 2 : $\bullet$ $G = SO(4m)$, $\theta_1, \theta, \theta' : SO(4m)$ の対合,

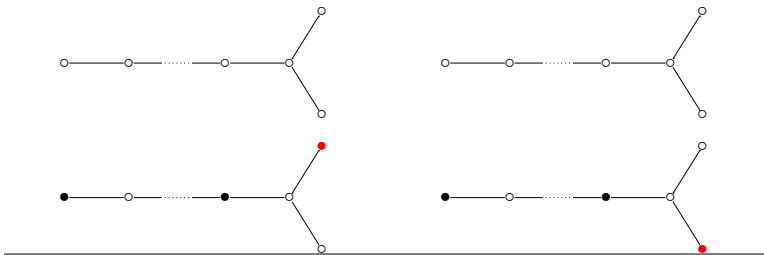
$$\theta_1(g) = I_{2m,2m} g I_{2m,2m}^{-1}, \quad I_{2m,2m} = \begin{pmatrix} E_{2m} & \\ & -E_{2m} \end{pmatrix}$$

$$\theta(g) = J_{2m} g J_{2m}^{-1}, \quad \theta'(g) = J'_{2m} g J'^{-1}_{2m} \quad (g \in SO(4m)),$$

と定めると, $G^{\theta_1} = S(O(2m) \times O(2m))$, $G^{\theta} = U(2m) \cong G^{\theta'} =: U(2m)'$

- $(SO(4m), S(O(2m) \times O(2m)), U(2m)) \sim (SO(4m), S(O(2m) \times O(2m)), U(2m)')$

$$(SO(4m), S(O(2m) \times O(2m)), U(2m)) \quad (SO(4m), S(O(2m) \times O(2m)), U(2m)')$$



二重佐武図形を用いたコンパクト対称三対の分類 (5)

- 2つのコンパクト対称三対 $(\mathfrak{g}, \theta_1, \theta_2)$, $(\mathfrak{g}, \theta'_1, \theta'_2)$ に対して, 次の例外を除いて $\mathfrak{k}_1 \cong \mathfrak{k}'_1, \mathfrak{k}_2 \cong \mathfrak{k}'_2$ が成り立てば, $(\mathfrak{g}, \theta_1, \theta_2)$, $(\mathfrak{g}, \theta'_1, \theta'_2)$ の二重佐武図形は同型となる. よって, これらは $\sim$ に関して同型となる
- 例外となるもの:
 - (1) 例 1 : $(\mathfrak{so}(4m), \mathfrak{u}(2m), \mathfrak{u}(2m))$ と $(\mathfrak{so}(4m), \mathfrak{u}(2m), \mathfrak{u}(2m)')$
 - (2) $(\mathfrak{so}(8), \mathfrak{so}(a) \oplus \mathfrak{so}(8-a), \mathfrak{so}(c) \oplus \mathfrak{so}(8-c))$ と $(\mathfrak{so}(8), \mathfrak{so}(a) \oplus \mathfrak{so}(8-a), \kappa(\mathfrak{so}(c) \oplus \mathfrak{so}(8-c)))$, $a, c = 1, 2, 3$

二重佐武図形を用いたコンパクト対称三対の分類 (6)

- 一方、二重佐武図形ではコンパクト対称三対に関する次の同値関係に関する同型類を区別することは一般にはできない：

定義 ($\sim$ よりも強い同値関係 $\equiv$)

$$(\mathfrak{g}, \theta_1, \theta_2) \equiv (\mathfrak{g}, \theta'_1, \theta'_2) \stackrel{\text{def}}{\iff} \exists \varphi \in \text{Aut}(\mathfrak{g}) \text{ s.t. } \theta'_1 = \varphi \theta_1 \varphi^{-1}, \theta'_2 = \varphi \theta_2 \varphi^{-1}$$

- 例 2 では

$$(\mathfrak{so}(4m), \mathfrak{so}(2m) \oplus \mathfrak{so}(2m), \mathfrak{u}(2m)) \not\equiv (\mathfrak{so}(4m), \mathfrak{so}(2m) \oplus \mathfrak{so}(2m), \mathfrak{u}(2m)')$$

であることが、

$$(\mathfrak{so}(2m) \oplus \mathfrak{so}(2m)) \cap \mathfrak{u}(2m) \simeq \mathfrak{u}(2m) \oplus \mathfrak{u}(2m)$$

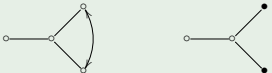
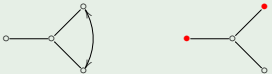
$$\not\simeq \mathfrak{so}(2m) \simeq (\mathfrak{so}(2m) \oplus \mathfrak{so}(2m)) \cap \mathfrak{u}(2m)'$$

から従う。

二重佐武図形から見るコンパクト対称三対の非可換性 (1)

例 3. (黒丸の配置から非可換性が導かれる例)

$(G, K_1) = (SO(8), SO(3) \times SO(5)), (G, K_2) = (SO(8), SO(2) \times SO(6))$

Case	Double Satake diagram (S_1, S_2)	Rank	Order
(1)		2	2
(2)		1	4

- $pr_i : \mathfrak{t} \rightarrow \mathfrak{t} \cap \mathfrak{m}_i$, $pr_{12} : \mathfrak{t} \rightarrow \mathfrak{t} \cap (\mathfrak{m}_1 \cap \mathfrak{m}_2)$ 直交射影
- θ_1, θ_2 が可換のときは、二重佐武図形上で、 $pr_{12}(\alpha) = 0$ ならば「 $pr_1(\alpha) = 0$ または $pr_2(\alpha) = 0$ 」が成り立つが、非可換では一般には成り立たない。

二重佐武図形から見るコンパクト対称三対の非可換性 (2)

例 4. (矢印の配置から非可換性が導かれる例)

$(G, K_1) = (SO(8), SO(3) \times SO(5)), (G, K_2) = (SO(8), SO(3) \times SO(5))$

Case	Double Satake diagram (S_1, S_2)		Rank	Order
(1)			3	1
(2)			2	3

- (2) のように矢印で結ばれるルートが S_1 と S_2 で互い違いになると θ_1 と θ_2 は非可換である. θ_1 と θ_2 が可換のときは, このようなことは起こり得ない.

コンパクト対称三対の分類表 (1)

G : 古典型

$(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^{\theta_1}, \mathfrak{g}^{\theta_2})$	Rank	Order	Remark
$(\mathfrak{su}(2m), \mathfrak{so}(2m), \mathfrak{sp}(m))$	$m - 1$	2	
$(\mathfrak{su}(n), \mathfrak{so}(n), \mathfrak{s}(\mathfrak{u}(a) \oplus \mathfrak{u}(b)))$	a	2	$n \geq 2a$
$(\mathfrak{su}(2m), \mathfrak{sp}(m), \mathfrak{s}(\mathfrak{u}(a) \oplus \mathfrak{u}(b)))$	$\begin{bmatrix} a \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{cases} 4 & (a: \text{odd}, m > a), \\ 2 & (\text{otherwise}) \end{cases}$	$m \geq a$
$(\mathfrak{su}(n), \mathfrak{s}(\mathfrak{u}(a) \oplus \mathfrak{u}(b)), \mathfrak{s}(\mathfrak{u}(c) \oplus \mathfrak{u}(d)))$	a	2	$a < c \leq d < b$
$(\mathfrak{so}(n), \mathfrak{so}(a) \oplus \mathfrak{so}(b), \mathfrak{so}(c) \oplus \mathfrak{so}(d))$	a	2	$a < c \leq d < b$
$(\mathfrak{so}(8), \mathfrak{so}(a) \oplus \mathfrak{so}(b), \tilde{\kappa}(\mathfrak{so}(c) \oplus \mathfrak{so}(d)))$	$\begin{cases} 0 & ((a, c) = (1, \{1, 2, 3\})), \\ 1 & ((a, c) = (2, \{2, 3\})), \\ 2 & ((a, c) = (3, 3)) \end{cases}$	$\begin{cases} 2 & ((a, c) = (2, 2)), \\ 3 & ((a, c) = (1, 1), (3, 3)), \\ 4 & ((a, c) = (1, 2), (2, 3)), \\ 6 & ((a, c) = (1, 3)) \end{cases}$	
$(\mathfrak{so}(2m), \mathfrak{so}(a) \oplus \mathfrak{so}(b), \mathfrak{u}(m))$	$\begin{bmatrix} a \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{cases} 4 & (a: \text{odd}, m > a), \\ 2 & (\text{otherwise}) \end{cases}$	$m \geq a$
$(\mathfrak{so}(4m), \mathfrak{u}(2m), \mathfrak{u}(2m)')$	$m - 1$	2	
$(\mathfrak{sp}(n), \mathfrak{u}(n), \mathfrak{sp}(a) \oplus \mathfrak{sp}(b))$	a	2	$n \geq 2a$
$(\mathfrak{sp}(n), \mathfrak{sp}(a) \oplus \mathfrak{sp}(b), \mathfrak{sp}(c) \oplus \mathfrak{sp}(d))$	a	2	$a < c \leq d < b$

コンパクト対称三対の分類表 (2)

G : 例外型

$(\mathfrak{e}_6, \mathfrak{sp}(4), \mathfrak{su}(6) \oplus \mathfrak{su}(2))$	4	2
$(\mathfrak{e}_6, \mathfrak{sp}(4), \mathfrak{so}(10) \oplus \mathfrak{so}(2))$	2	2
$(\mathfrak{e}_6, \mathfrak{sp}(4), \mathfrak{f}_4)$	2	2
$(\mathfrak{e}_6, \mathfrak{su}(6) \oplus \mathfrak{su}(2), \mathfrak{so}(10) \oplus \mathfrak{so}(2))$	2	2
$(\mathfrak{e}_6, \mathfrak{su}(6) \oplus \mathfrak{su}(2), \mathfrak{f}_4)$	1	2
$(\mathfrak{e}_6, \mathfrak{so}(10) \oplus \mathfrak{so}(2), \mathfrak{f}_4)$	1	2
$(\mathfrak{e}_7, \mathfrak{su}(8), \mathfrak{so}(12) \oplus \mathfrak{su}(2))$	4	2
$(\mathfrak{e}_7, \mathfrak{su}(8), \mathfrak{e}_6 \oplus \mathfrak{so}(2))$	3	2
$(\mathfrak{e}_7, \mathfrak{so}(12) \oplus \mathfrak{su}(2), \mathfrak{e}_6 \oplus \mathfrak{so}(2))$	2	2
$(\mathfrak{e}_8, \mathfrak{so}(16), \mathfrak{e}_7 \oplus \mathfrak{su}(2))$	4	2
$(\mathfrak{f}_4, \mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{sp}(3), \mathfrak{so}(9))$	1	2

コンパクト対称三対の標準形 (1)

- $[(G, \theta_1, \theta_2)]$: コンパクト対称三対 (G, θ_1, θ_2) の同型類

定義 (コンパクト対称三対の標準形)

$(G, \tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2) \in [(G, \theta_1, \theta_2)]$: **標準形**

$\stackrel{\text{def}}{\iff} \exists \mathfrak{t} \subset \mathfrak{g}$: 極大可換部分リ一環で次の条件を満たすもの :

- (1) $\mathfrak{t} \cap \tilde{\mathfrak{m}}_i \subset \tilde{\mathfrak{m}}_i$ ($i = 1, 2$) は極大可換部分空間である．特に, $\mathfrak{t}$ は $\tilde{\theta}_i$ 不変である．
- (2) Δ を $\mathfrak{t}$ に関する $\mathfrak{g}$ のルート系, $\sigma_i := -\tilde{\theta}_i|_{\mathfrak{t}}$ としたとき, Δ の基本系で σ_1 基本系かつ σ_2 基本系となるものが存在する．
- (3) $\text{ord}(\tilde{\theta}_1 \tilde{\theta}_2) = \text{ord}(\tilde{\theta}_1 \tilde{\theta}_2|_{\mathfrak{t}}) = \text{ord}(\sigma_1 \sigma_2) (< +\infty)$

- (1), (2) は基本補題で述べた $(G, \tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2)$ の二重佐武図形が書けるための条件
- 二重佐武図形より $\tilde{\theta}_1|_{\mathfrak{t}}$ と $\tilde{\theta}_2|_{\mathfrak{t}}$ が復元できるので, (3) より $(G, \tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2)$ の位数は二重佐武図形上で決まる．

コンパクト対称三対の標準形 (2)

定理 2 (B.-Ikawa).

G を単純とする. コンパクト対称三対の同型類 $[(G, \theta_1, \theta_2)]$ に対して標準形が存在する.

補足:

- 一意性は一般には成り立たないが, 標準形の条件を強めて一意性が成り立つようにできる. しかし, 少なくとも θ_1 と θ_2 が可換な場合を踏まえるとその必要性は無いと考えている.
- ここで, $[(G, \theta_1, \theta_2)]$ 内の標準形らは互いに $\sim$ に関して同値であるが, 強い同値関係 $\equiv$ では同値でないときがあることに注意する.

コンパクト対称三対の標準形 (3)

例： $[(\mathfrak{g}, \theta_1, \theta_2)] = [(\mathfrak{su}(4m), \mathfrak{so}(4m), \mathfrak{s}(\mathfrak{u}(2m) \oplus \mathfrak{u}(2m)))]$

コンパクト対称三対 $(\mathfrak{g}, \theta_1, \theta_2)$, $(\mathfrak{g}, \theta_1, \theta'_2)$ を次で定める：

- $\theta_1(Z) = \bar{Z} \ (Z \in \mathfrak{g})$
- $\theta_2(Z) = E_{2m, 2m} Z E_{2m, 2m} \ (Z \in \mathfrak{g})$
- $\theta'_2 = \text{Ad}(g)\theta_2\text{Ad}(g)^{-1}$, $g = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} E_{2m} & \sqrt{-1}E_{2m} \\ \sqrt{-1}E_{2m} & E_{2m} \end{pmatrix} \in SU(4m)$

このとき、 $(\mathfrak{g}, \theta_1, \theta_2) \sim (\mathfrak{g}, \theta_1, \theta'_2)$ であり、可換性から標準性が従う。

一方で、 $(\mathfrak{g}, \theta_1, \theta_2) \not\sim (\mathfrak{g}, \theta_1, \theta'_2)$ となることが、次の部分リー環の計算結果から従う：

$$\mathfrak{k}_1 \cap \mathfrak{k}_2 = \mathfrak{so}(2m) \oplus \mathfrak{so}(2m) \not\cong \mathfrak{u}(2m) = \mathfrak{k}_1 \cap \mathfrak{k}'_2$$

コンパクト対称三対の標準形 (4)

定理 3 (B.-Ikawa).

G を単純とする. (G, θ_1, θ_2) を標準的なコンパクト対称三対とし, $\mathfrak{t}$ は $\mathfrak{g}$ の極大可換部分リ一環で標準的なものとする. このとき, 次が成り立つ.

- (1) $\mathfrak{t} \cap (\mathfrak{m}_1 \cap \mathfrak{m}_2) =: \mathfrak{a}$ は $\mathfrak{m}_1 \cap \mathfrak{m}_2$ の極大可換部分空間となる. よって,
 $\pi_1 : G \rightarrow G/K_1$ を自然な射影としたとき, $\pi_1(\exp(\mathfrak{a}))(\subset G/K_1)$ は (G, θ_1, θ_2) から得られる Hermann 作用の切断となる.
- (2) (G, θ_1, θ_2) の位数はその同型類の中で最小値をとる. 特に, この値は有限である.

補足: (2) を示すにあたって次の事実は基本となる:

事実

$\sim$ に関して同値なコンパクト対称三対 $(G, \theta_1, \theta_2) \sim (G, \theta'_1, \theta'_2)$ に対して,
 $(\theta_1 \theta_2)^n = \text{id} = (\theta'_1 \theta'_2)^{n+1}$ となる自然数 n が存在すると, $\theta_1 \sim \theta_2$ となる.

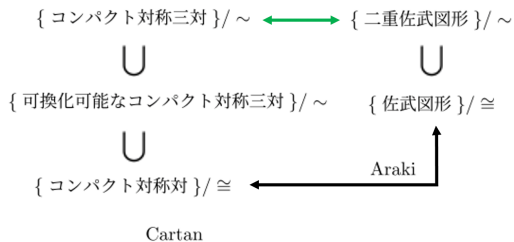
コンパクト対称三対の可換化可能性

- 二重佐武図形によるコンパクト対称三対の分類結果と定理 3, (2) を合わせると, G が単純の場合, コンパクト対称三対の各同型類の可換化可能性を完全に決定できる.
- G が古典型の場合

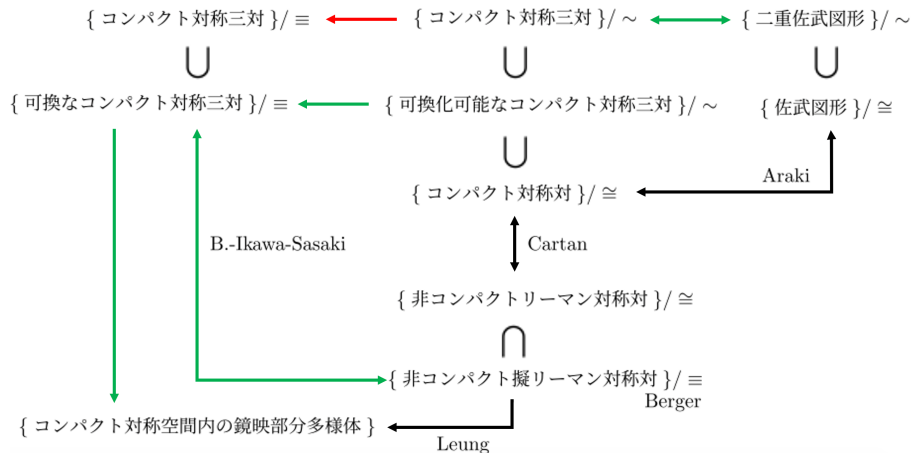
$(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^{\theta_1}, \mathfrak{g}^{\theta_2})$	Rank	Order	Remark
$(\mathfrak{su}(2m), \mathfrak{so}(2m), \mathfrak{sp}(m))$	$m - 1$	2	
$(\mathfrak{su}(n), \mathfrak{so}(n), \mathfrak{s}(\mathfrak{u}(a) \oplus \mathfrak{u}(b)))$	a	2	$n \geq 2a$
$(\mathfrak{su}(2m), \mathfrak{sp}(m), \mathfrak{s}(\mathfrak{u}(a) \oplus \mathfrak{u}(b)))$	$\begin{bmatrix} a \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{cases} 4 & (a: \text{odd}, m > a), \\ 2 & (\text{otherwise}) \end{cases}$	$m \geq a$
$(\mathfrak{su}(n), \mathfrak{s}(\mathfrak{u}(a) \oplus \mathfrak{u}(b)), \mathfrak{s}(\mathfrak{u}(c) \oplus \mathfrak{u}(d)))$	a	2	$a < c \leq d < b$
$(\mathfrak{so}(n), \mathfrak{so}(a) \oplus \mathfrak{so}(b), \mathfrak{so}(c) \oplus \mathfrak{so}(d))$	a	2	$a < c \leq d < b$
$(\mathfrak{so}(8), \mathfrak{so}(a) \oplus \mathfrak{so}(b), \tilde{\kappa}(\mathfrak{so}(c) \oplus \mathfrak{so}(d)))$	$\begin{cases} 0 & ((a, c) = (1, \{1, 2, 3\})), \\ 1 & ((a, c) = (2, \{2, 3\})), \\ 2 & ((a, c) = (3, 3)) \end{cases}$	$\begin{cases} 2 & ((a, c) = (2, 2)), \\ 3 & ((a, c) = (1, 1), (3, 3)), \\ 4 & ((a, c) = (1, 2), (2, 3)), \\ 6 & ((a, c) = (1, 3)) \end{cases}$	
$(\mathfrak{so}(2m), \mathfrak{so}(a) \oplus \mathfrak{so}(b), \mathfrak{u}(m))$	$\begin{bmatrix} a \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{cases} 4 & (a: \text{odd}, m > a), \\ 2 & (\text{otherwise}) \end{cases}$	$m \geq a$
$(\mathfrak{so}(4m), \mathfrak{u}(2m), \mathfrak{u}(2m)')$	$m - 1$	2	
$(\mathfrak{sp}(n), \mathfrak{u}(n), \mathfrak{sp}(a) \oplus \mathfrak{sp}(b))$	a	2	$n \geq 2a$
$(\mathfrak{sp}(n), \mathfrak{sp}(a) \oplus \mathfrak{sp}(b), \mathfrak{sp}(c) \oplus \mathfrak{sp}(d))$	a	2	$a < c \leq d < b$

- G が例外型の場合は, すべての同型類は可換化可能であることが導かれる.

展望と課題 (1)：対称空間論における分類定理



展望と課題 (2)：対称空間論における分類定理



References

- [1] S. Araki, On root systems and an infinitesimal classification of irreducible symmetric spaces, J. Math. Osaka City Univ. **13** (1962), 1–34.
- [2] K. Baba, O. Ikawa and A. Sasaki, A duality between non-compact semisimple symmetric pairs and commutative compact semisimple symmetric triads and its general theory, Differential Geometry and its Application **76** (2021).
- [3] L. Conlon, Classification of affine root systems and applications to the theory of symmetric spaces, Mimeographed Notes, Washington University, St. Louis, Missouri, 1968.
- [4] T. Matsuki, Classification of two involutions on semisimple compact Lie groups and root systems, J. Lie Theory, **12** (2002), 41–68.
- [5] T. Oshima and J. Sekiguchi, The Restricted Root System of a Semisimple Symmetric Pair, Advanced studies in Pure Mathematics **4**, 1984, Group representations and systems of differential equations, 433–487.

Thank you for your attention.