

triality automorphism の場合の σ 作用の軌道の幾何学

井川 治

京都工芸繊維大学

2023 年 3 月 27 日

間下克哉氏（法政大学）との共同研究

目次

- ① 目的
- ② 定義： σ 作用と Cartan 埋め込み
- ③ σ 作用の軌道
- ④ σ 作用と Cartan 埋め込みの関係
- ⑤ σ 作用と Hermann 作用
- ⑥ 先行研究
- ⑦ triality automorphism(既知の事実)
- ⑧ 部分多様体論の復習
- ⑨ 主結果 1
- ⑩ 極小軌道と極小 Cartan 埋め込み
- ⑪ 主結果 2: Austere Cartan 埋め込み
- ⑫ 今後の課題

$G = Spin(8) = [SO(8) = SO(\mathbb{O})$ の普遍被覆群] (28 次元)

σ : triality automorphism (G の位数 3 の外部自己同型, 八元数 $\mathbb{O}$ を用いて構成される)

この σ による σ 作用の軌道の幾何学が知りたい

軌道空間は? どの軌道が極小/austere/弱鏡映か?

♡ 以下, 8 頁まで「この方面で残っているのは上の問題だけ」ということを説明 ♡

定義： σ 作用と Cartan 埋め込み

G : compact 連結 Lie 群, σ : 自己同型

- $G \curvearrowright G; g \cdot x = gx\sigma(g^{-1})$: σ 作用

$\sigma = 1 \Rightarrow \sigma$ -作用=随伴作用, $G = \bigcup_{g \in G} gAg^{-1}$ (極大トーラス $A \subset G$.)

一般に, 極大トーラス $A \subset F(\sigma, G)_0 \Rightarrow G = \bigcup_{g \in G} gA\sigma(g^{-1})$

- $G \rightarrow G; g \mapsto g\sigma(g^{-1})$ は埋め込みを誘導する：

$F : G/F(\sigma, G) \hookrightarrow G; gF(\sigma, G) \mapsto g\sigma(g^{-1})$: Cartan 埋め込み (間下, 1992~)

σ 作用の軌道

G : compact 連結 Lie 群, σ : 自己同型, τ_a : 内部, $\sigma_a := \tau_a \circ \sigma$

一般には σ と σ_a は位数すら異なる

O_x^a : σ_a 作用の x を通る軌道, O_x^e : σ 作用の x を通る軌道

$$\begin{aligned} O_x^a &= \{gx\sigma_a(g) \mid g \in G\} = \{gx\tau_a(\sigma(g)) \mid g \in G\} = \{gxa\sigma(g)a^{-1} \mid g \in G\} \\ &= \{g(xa)\sigma(g) \mid g \in G\}a^{-1} = O_{xa}^e a^{-1} \end{aligned}$$

$$O_{xa}^e \cong O_x^a \quad \text{特に} \quad O_a^e \cong O_e^a$$

σ 作用と Cartan 埋め込みの関係

G : compact 連結 Lie 群, σ : 自己同型写像

$\{\sigma$ 作用の x を通る軌道 $\mid \sigma$: 自己同型写像, $x \in G\}$

$= \{\sigma$ の定める Cartan 埋め込みの像 $\mid \sigma$: 自己同型写像 $\}$

さらに, G : 単連結のとき

$= \{\text{作用の } x \text{ を通る軌道} \mid \sigma : \text{Dynkin 図形の合同変換}, x \in A \subset F(\sigma, G)\}$

G : 単連結 $\Rightarrow \forall \sigma'$: 自己同型, $\exists a \in G, \sigma : \text{Dynkin 図形の合同変換から誘導される自己同型}$ s.t. $\sigma' := \tau_a \circ \sigma$.

σ 作用の軌道を調べるためには, σ は G の Dynkin 図形の合同変換の誘導する (非自明) 自己同型と仮定してよい

σ 作用と Hermann 作用

U : compact 連結 Lie 群. θ_1, θ_2 : 対合, $K_i := F(\theta_i, U)$, $K_1 \curvearrowright U/K_2$: Hermann 作用

$\theta_1 = \theta_2 \Rightarrow$ Hermann 作用 = compact 対称空間へのイソトロピー作用

(1) σ 作用 $G \curvearrowright G; g \cdot x = gx\sigma(g^{-1})$ は Hermann 作用

(2) $\theta_1\theta_2 = \theta_2\theta_1 \Leftrightarrow \sigma^2 = 1$

証明 (1) $U := G \times G, \theta_1(g, h) := (\sigma^{-1}(h), \sigma(g)), \theta_2(g, h) := (h, g)$

$K_1 = \{(g, \sigma(g))\}, K_2 = \{(g, g)\}, U/K_2 \leftrightarrow G; (a, b)K_2 \leftrightarrow ab^{-1}$

$K_1 \curvearrowright U/K_2; (g, \sigma(g))(a, b)K_2 = (ga, \sigma(g)b)K_2 \leftrightarrow g(ab^{-1})\sigma(g^{-1})$

(2) $\theta_1\theta_2 = \theta_2\theta_1 \Leftrightarrow (\sigma^{-1}(g), \sigma(h)) = (\sigma(g), \sigma^{-1}(h)) \Leftrightarrow \sigma^2 = 1$

□

σ 作用と Hermann 作用に関する先行研究

σ : 内部 $\Rightarrow \sigma = 1$ の場合に帰着

$\theta_1\theta_2 = \theta_2\theta_1$ の場合の Hermann 作用の軌道の幾何 (σ 作用以外) I (2011)

$\theta_1\theta_2 \neq \theta_2\theta_1$ の場合の Hermann 作用の軌道の幾何 (σ 作用以外) 大野

σ が対合の場合の σ 作用の軌道の幾何 I (2018)

位数 3 以上の外部自己同型 σ に対する σ 作用の軌道の幾何を知りたい

G が compact 単連結単純 Lie 群の場合は,
 $G = Spin(8)$, $\sigma = \text{triality automorphism}$ の場合のみ残った

$Spin(8)$ の triality automorphism (既知の事実)

$G = Spin(8) = [SO(8) = SO(\mathbb{O})$ の普遍被覆群] (28 次元)

σ : triality automorphism (G の位数 3 の外部自己同型, 八元数 $\mathbb{O}$ を用いて構成される)

$$F(\sigma, G) = \{g \in G \mid \sigma(g) = g\} = G_2 \quad (\dim G_2 = 14)$$

$$\sigma\text{-作用: } g \cdot x = gx\sigma(g^{-1})$$

最大次元軌道の余次元=2 (余等質性 2 の作用)

$$A = \exp \mathfrak{a}: \text{極大トーラス} \subset G_2 \quad (\dim A = 2)$$

σ 作用の軌道を調べるためには, 軌道の始点は A の点としてよい

部分多様体論の復習

$M^n \subset \tilde{M}$: Riemannian 部分多様体, h : 第二基本形式, A : 形作用素, m : 平均曲率

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + h(X, Y), \quad \langle A^\xi(X), Y \rangle = \langle h(X, Y), \xi \rangle, \quad m = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n h(e_i, e_i)$$

austere [Harvey-Lawson, 1982] A^ξ の固有値の集合が重複度も含めて -1 倍で不変

全測地的 $h = 0 \Rightarrow$ austere $\Rightarrow$ 極小 $m = 0 (\Leftrightarrow \text{tr}(A^\xi) = 0 \quad (\forall \xi))$

弱鏡映: (I-酒井-田崎, 2001) $\forall x \in M, \xi \in T_x^\perp(M), \tilde{M}$ の等長変換 $\exists \varphi_\xi$ s.t.
 $\varphi_\xi(x) = x, (d\varphi_\xi)_x(\xi) = -\xi, \varphi_\xi(M) = M$. [このとき, $(d\varphi_\xi)_x^{-1} A^\xi (d\varphi_\xi)_x = -A^\xi$]

(鏡映, Leung, 1974 $\Rightarrow$) 弱鏡映 $\Rightarrow$ austere

主結果 1

$G = Spin(8) \supset F(\sigma, G) = G_2 \supset A = \exp \mathfrak{a}$: 極大トーラス

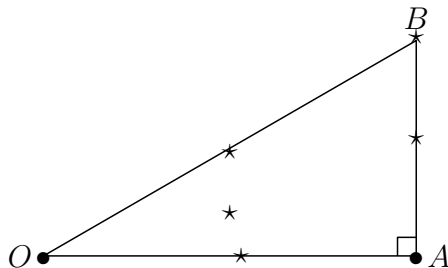
写像 $(\mathfrak{a} \ni H \mapsto O_H := O_{\exp 2H}^\sigma \in \text{軌道空間})$ は全射

定理 (I-間下)

σ 作用の軌道空間 = $30^\circ, 60^\circ$ の直角三角形 $\triangle OAB \subset \mathfrak{a}$ の周及び内部

O_O, O_A は弱鏡映軌道

★: *austere* ではない極小軌道
極小軌道はこの 7 個で尽きる



主結果 1(続)

- 全測地的軌道は存在しない ($\sigma^3 = 1$ だから)
- $\triangle OAB$ の内点 $\Leftrightarrow$ 正則軌道 (最大次元の軌道)
- $\triangle OAB$ の周上の点 $\Leftrightarrow$ 特異軌道
- 辺上の極小軌道は辺の midpoint ではない
- 内点の極小軌道は $\triangle OAB$ の重心ではない
- 同一の辺上の二つの軌道は軌道同値, 二つの内点に対応する軌道も軌道同値

H	O	A	B	OA 上	OB 上	AB 上	内点
$\text{codim}(O_H)$	14	6	8	4	4	4	2

極小軌道と極小 Cartan 埋め込みとの関係

$G = Spin(8)$, $\sigma = \text{triality automorphism}$.

$O_H = O_H^\sigma : \text{極小軌道 } (H \in \triangle OAB) \cong F(G/G^{\sigma'}) \quad (\exists \sigma': \text{自己同型})$

問題 σ' は有限位数か？ (♡ 由緒正しいものは有限か?♡)

答え σ' が有限位数 $\Leftrightarrow H = O, A, B$ ($\Leftarrow$ の証明はやさしい. $\Rightarrow$ は対偶)

Table: 極小軌道と合同な Cartan 埋め込みを定める自己同型の位数

O	A	B	その他 (辺, 内点)
3	6	3	∞

極小軌道と極小 Cartan 埋め込みとの関係 (続)

H が辺 OA , OB または AB 上の極小軌道るとき, σ' が無限位数となることの証明には円分体の議論を用いる (♡ ガロア理論は使わない♡)

H が $\triangle OAB$ の内点るとき, σ' が無限位数となることを示すのに, Risa / Asir を用いて Gröbner 基底の計算をした

もう少し詳しい証明の方針

O_H を極小軌道とし, O_H と合同な Cartan 埋め込みを定める自己同型を σ' とする.
 σ' は H から定まる内部自己同型と σ との合成.

$H \in \triangle OAB \subset \mathfrak{a}$ は極小条件で特徴づけられる. $\{A, B\}$ は $\mathfrak{a}$ の基底. たとえば H が辺 OA 上にあるとき, $H = tA$ が極小になるための条件は, $x = \cos \frac{\pi t}{6}$ がある (奇数次の項がない 6 次) 代数方程式を満たすこと. 一方, σ' が有限位数となるための必要十分条件は, t が有理数になること. よって, 元の問題は次のように言い換えられる:

極小軌道と極小 Cartan 埋め込みとの関係 (続)

問題 $x = \cos \frac{\pi t}{6}$ がある具体的な奇数次の項はない 6 次代数方程式を満たすとき ($\Leftrightarrow$ 軌道が極小),
 t は有理数 ($\Leftrightarrow \sigma'$: 有限位数) か?

円分体の理論を用いると次がわかる. 一方, $x = \cos(2q\pi/p)$ (p, q : 互いに素) が代数方程式

$$x^6 + Ax^4 + Bx^2 + C = 0$$

を満たせば, A, B, C, D はある関係式を満たさねばならない.

極小条件の方程式は, この関係式を満たさない. よって σ' は無限位数.

H が線分 OA 上にあるときや線分 AB 上にあるときも同様の問題に帰着される. H が $\triangle OAB$ の内点にあるときは, 二変数の代数方程式が出てくるので, 問題はより難しくなる.

主結果 2: Austere Cartan 埋め込み

定理 (I-間下)

G : compact 連結単純 Lie 群, σ : 自己同型

Cartan 埋め込みの像が $F(G/G_\sigma) \subset G$ が “austere” $\Rightarrow \sigma$: 有限位数

注意. “austere” を “極小” に置き換えた主張は成り立たない

有限位数の自己同型の誘導する Austere Cartan 埋め込みの分類 (木村-間下, 2022)

これと合わせて austere Cartan 埋め込みの分類ができた.

結果的に σ の位数は 2, 3, 4 または 6 (♡ 下と関係するか?♡)

参考: 球面内の等径超曲面の異なる主曲率の個数 1, 2, 3, 4, 6, Münzner, 1980

今後の課題

- 非可換の場合を含んだ Hermann 作用の一般論の構築.

可換の場合：compact 対称三対 $\rightsquigarrow$ 対称三対 $\rightsquigarrow$ 軌道空間，個々の軌道の性質

非可換の場合：二重佐武図形，compact 対称三対の標準形 (馬場氏との共同研究) はこの方面

- Hermann 作用と無限次元 Lie 環の関係

σ 作用の場合は無限次元 Lie 環と密接に関係

- どの軌道が biharmonic か？ [参考] 大野-酒井-浦川

メモ付き参考文献 (1)

-  O. Goertsches and G. Thorbergsson, On the geometry of orbits of Hermann actions, *Geom. Dedicata*, **129** (2007), 101–118.
Hermann 作用の軌道の幾何学を扱った初めての論文
-  R. Harvey and H. B. Lawson, Jr., Calibrated geometries, *Acta Math.* **148** (1982), 47–157.
austere 部分多様体の概念 (calibration の概念)
-  R. Hermann, Totally geodesic orbits of groups of isometries. *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A 65 = Indag. Math.* **24** (1962), 291–298.
Hermann 作用の概念. Hermann 作用は変分完備であることを示し, Morse 理論を対称空間へ応用した
-  O. Ikawa, T. Sakai and H. Tasaki, Weakly reflective submanifolds and austere submanifolds, *J. Math. Soc. Japan* **61** (2009), 437–481.
弱鏡映部分多様体の概念

メモ付き参考文献 (2)

-  O. Ikawa, The geometry of symmetric triads and orbit spaces of Hermann actions, J. Math. Soc. Japan **63** (2011), 79–136.
対称三対の概念を定義し、分類．これを用いて可換な Hermann 作用の軌道空間と個々の軌道の性質を調べた
-  O. Ikawa, σ -actions and symmetric triads, Tohoku Math. J. (2018), 547–565.
 σ が対合の場合の σ 作用の軌道の幾何学．この場合にも対称三対が使える
-  T. Kimura and K. Mashimo, Classification of Cartan embeddings which are austere submanifolds, Hokkaido Math. J. (2022), 1–23.
有限位数の自己同型から誘導される Cartan 埋め込みのうちで austere になるものの分類．勝手な自己同型は Dynkin 図形の合同変換から誘導される自己同型と内部自己同型の合成であることを用いる．実は有限位数の仮定は不要

メモ付き参考文献 (3)



K. Mashimo, On the stability of Cartan embeddings of compact symmetric spaces. Arch. Math. (Basel) 58 (1992), no. 5, 500 – 508. ; Cartan embeddings of compact Riemannian 3-symmetric spaces, Tokyo J. Math. **19** (1996), 353–364; Stability of Cartan embeddings. (Japanese) Homogeneous structures and theory of submanifolds (Japanese) (Kyoto, 1998). Sūrikaiseikikenkyūsho Kōkyūroku No. 1069 (1998), 53 – 62.

Cartan 埋め込みに関する一連の研究. Cartan 埋め込みという言葉はもともとは対合 σ から埋め込みが構成される場合に限られていた. 一般の自己同型写像から構成される埋め込みも Cartan 埋め込みという言葉を使うようになったのはこれの一連の論文からだと思われる.



S. Ohno, T. Sakai and H. Urakawa, Biharmonic homogeneous submanifolds in compact symmetric spaces and compact Lie groups, Hiroshima Math. J. 可換な Hermann 作用の軌道の特別なものうち bi-harmonic 部分多様体となるための条件を重複度付き対称三対の言葉で書いた.

メモ付き参考文献 (4)

-  S. Ohno, Geometric properties of orbits of Hermann actions, <https://arxiv.org/abs/2101.00765> to appear in Tokyo J. Math.
非可換 Hermann 作用の軌道空間と個々の軌道の性質
-  Y. Sakane, Homogeneous Einstein metrics on flag manifolds. Towards 100 years after Sophus Lie (Kazan, 1998). Lobachevskii J. Math. 4 (1999), 71 – 87.
compact 連結 Lie 群 G をその極大トーラス T で割った等質空間上の G -不変 Einstein 計量を Gröbner 基底を用いて構成した