結合的グラスマン多様体の部分多様体

佐々木優

東京工業高等専門学校

2023/03/28

部分多様体幾何とリー群作用 2022

東京理科大学

神楽坂キャンパス

森戸記念館第 1 フォーラム

本日の内容

本講演では，次の内容を紹介する．

- 6 次元球面 S^6 の部分多様体から結合的グラスマン多様体 $G_{\mathbb{H}}(\mathbb{O})$ へのはめ込み
- これらのはめ込みの，$G_{\mathbb{H}}(\mathbb{O})$ における四元数ケーラー構造に関する性質
- $G_{\mathbb{H}}(\mathbb{O})$ におけるイソトロピー群作用の軌道の，四元数ケーラー構造に関する性質

目次：

1. 結合的グラスマン多様体
2. S^6 の部分多様体と結合的グラスマン多様体
3. 結合的グラスマン多様体におけるイソトロピー群作用の軌道
4. 今後の課題

1. 結合的グラスマン多様体

四元数ケーラー多様体

Definition 1.1

(M, g) : $4n$ 次元リーマン多様体 $(n \geq 2)$, $\quad Q \subset \mathrm{End}\, TM$: 3 次元部分束

(M, Q, g) が次の条件を満たすとき，(M, Q, g) を四元数ケーラー多様体という．

(i) 各 $x \in M$ に対して，x の近傍 U および U 上の局所枠場 $\{I, J, K\}$ で次を満たすものが存在する．

$$I^2 = J^2 = K^2 = -\mathrm{id}, \quad IJ = -JI = K, \quad JK = -KJ = I, \quad KI = -IK = J.$$

(ii) 各 $x \in M, I \in Q_x, X, Y \in T_x M$ に対して

$$g(IX, Y) + g(X, IY) = 0.$$

(iii) Q は g のリーマン接続に関して平行．

四元数対称空間

- Wolf により，Ricci 曲率が 0 でない四元数ケーラー多様体で，対称空間になるものが分類されている．
- これらの対称空間を四元数対称空間と呼ぶ．
- 既約コンパクト四元数対称空間 $M = G/K$ は次のいずれかになる．

G	K	$\dim M$	$\mathrm{rank} M$		G	K	$\dim M$	$\mathrm{rank} M$
$Sp(n+1)$	$Sp(1) \times Sp(n)$	$4n\ (n \geq 2)$	1		G_2	$SO(4)$	8	2
$SU(n+2)$	$S(U(2) \times U(n))$	$4n\ (n \geq 2)$	2		F_4	$Sp(1) \cdot Sp(3)$	28	4
$SO(7)$	$SO(4) \times SO(3)$	12	3		E_6	$Sp(1) \cdot SU(6)$	40	4
$SO(n+4)$	$SO(4) \times SO(n)$	$4n\ (n \geq 3)$	4		E_7	$Sp(1) \cdot Spin(12)$	64	4
					E_8	$Sp(1) \cdot E_7$	112	4

本講演では，

G 型コンパクト対称空間 $G_2/SO(4)$ を考える．

八元数 $\mathbb{O}$

Definition 1.2

8 次元ベクトル空間 $\mathbb{O} = \sum_{i=0}^{7} \mathbb{R} e_i$ に，次のように積を定めたものを八元数 $\mathbb{O}$ という．

(1) e_0 は積の単位元．e_0 を 1 と記す．

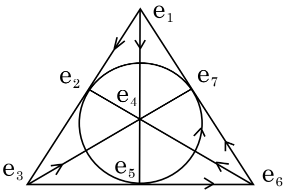
(2) 各 $1 \leq i \neq j \leq 7$ に対して，

$$e_i e_j = -e_j e_i, \quad e_i^2 = -1.$$

(3) 分配則

(4) 積を右図のように定める．

(ex : $e_1 e_2 = e_3, e_1 e_4 = e_5, \cdots$)



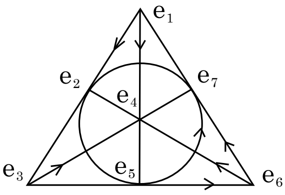
- $\mathrm{Im}\mathbb{O} = \sum_{i=1}^{7} \mathbb{R} e_i$ と定める．
- $\mathbb{O}$ では，結合則が成り立たない．

$$\text{(ex)} \qquad (e_1 e_2) e_4 = e_3 e_4 = e_7, \quad e_1 (e_2 e_4) = e_1(-e_6) = -e_7.$$

結合的グラスマン多様体

- 例えば，$\mathrm{Im}\mathbb{H} = \sum_{i=1}^{3} \mathbb{R}e_i$ では結合則が成り立つ．

$$\text{(ex)} \quad (e_1 e_2)e_3 = e_3 e_3 = -1,$$
$$e_1(e_2 e_3) = e_1 e_1 = -1.$$



Definition 1.3

- $\mathrm{Im}\mathbb{O}$ の 3 次元部分空間 V に対して，V 上で結合則が成り立つとき，V を結合的部分空間という．
- 結合的部分空間全体による集合を，結合的グラスマン多様体 $G_{\mathbb{H}}(\mathbb{O})$ という．(Harvey-Lawson, 82)

例外型コンパクトリー群 G_2

Definition 1.4

- $\mathbb{O}$ の線形変換で，$\mathbb{O}$ の積に関して準同型になっているものを，$\mathbb{O}$ の自己同型という．
- $\mathbb{O}$ の自己同型全体による群を，例外型コンパクトリー群 G_2 という．

- 結合的部分空間 V，$u, v, w \in V$，$g \in G_2$ に対して，

$$\Big(g(u)g(v)\Big)g(w) = g\Big((uv)(w)\Big) = g\Big(u(vw)\Big) = g(u)\Big(g(v)g(w)\Big).$$

であることから，$g(V)$ は結合的部分空間となる．

Proposition 1.5 (Harvey-Lawson, 82)

任意の結合的部分空間 V_1, V_2 に対して，$g(V_1) = V_2$ を満たす $g \in G_2$ が存在する．

- G_2 は $G_{\mathbb{H}}(\mathbb{O})$ へ推移的に作用する．とくに，

$$G_{\mathbb{H}}(\mathbb{O}) = \bigcup_{g \in G_2} g(\mathrm{Im}\mathbb{H}).$$

- $\{g \in G_2 \; ; \; g(\mathrm{Im}\mathbb{H}) \subset \mathrm{Im}\mathbb{H}\} \cong (Sp(1) \times Sp(1))/\mathbb{Z}_2 = SO(4)$ となり，

$$G_{\mathbb{H}}(\mathbb{O}) = G_2/SO(4).$$

- したがって，$G_{\mathbb{H}}(\mathbb{O})$ は G 型コンパクト対称空間になり，$\dim G_{\mathbb{H}}(\mathbb{O}) = 8$ となる．

- $\mathbb{R}^n$ の k 次元部分空間全体によるグラスマン多様体を $G_k(\mathbb{R}^n)$ と記すと，

$$G_{\mathbb{H}}(\mathbb{O}) \subset G_3(\mathbb{R}^7).$$

このとき，$G_{\mathbb{H}}(\mathbb{O})$ は $G_3(\mathbb{R}^7)$ の全測地的部分多様体となっている．

2. 6 次元球面 S^6 と結合的グラスマン多様体 $G_{\mathbb{H}}(\mathbb{O})$

S^6 の概エルミート構造

- 八元数 $\mathbb{O}$ の標準内積 (,) を次で定める.

$$(x,y)=\sum_{i=0}^{7}x_iy_i \qquad \left(x=\sum_{i=0}^{7}x_ie_i,\ y=\sum_{i=0}^{7}y_ie_i\in\mathbb{O}\right).$$

Definition 2.1

$S^6:=\{x\in\mathrm{Im}\mathbb{O}\ ;\ |x|=1\}$

- 各 $x\in S^6$ に対して, $T_xS^6=\{y\in\mathrm{Im}\mathbb{O}\ ;\ (x,y)=0\}$.
- 各 $x\in S^6$ について次が成り立っている.

(i) $x^2=-1$,

(ii) 任意の $y\in\mathbb{O}$ に対して, $x(xy)=(xx)y$,

(iii) 任意の $y,z\in\mathbb{O}$ に対して, $(xy,xz)=(y,z)$.

- これより, 任意の $y\in T_xS^6$ について,
  - $(x,xy)=(1,y)=0$ より $xy\in T_xS^6$,
  - $x(xy)=(xx)y=-y$.

- $J_x : T_xS^6 \to T_xS^6$; $y \mapsto xy$ とすれば，

$$J^2(y) = J(J(y)) = J(xy) = x(xy) = (xx)y = -y \quad (y \in T_xM).$$

  であるので，J は S^6 の概複素構造になる．
  J は非可積分であり，S^6 は概複素多様体となる．

- $\mathbb{O}$ の標準内積を S^6 へ制限して得られるリーマン計量を $(\ ,\ )$ とかく．
  任意の $y, z \in T_xS^6$ に対して

$$(xy, z) = (y, -xz) = -(y, xz)$$

  より，$(Jy, z) + (y, Jz) = 0$ となるので $(S^6, J, (\ ,\ ))$ は概エルミート多様体．

S^6 の部分多様体

Definition 2.2

$N \subset S^6$：部分多様体

(i) N が全実 $\overset{\text{def}}{\iff}$ 各 $x \in N$ に対して，$J(T_xN) \perp T_xN$.

(ii) N がラグランジュ部分多様体 $\overset{\text{def}}{\iff}$ N は totally real かつ $\dim \overset{N}{\cancel{M}} = 3$.

(iii) N が概複素 $\overset{\text{def}}{\iff}$ 各 $x \in N$ に対して，$J(T_xN) \subset T_xN$.

(iv) N が CR 部分多様体 $\overset{\text{def}}{\iff}$ N の接分布 V, W で次を満たすものが存在する.

$$V \perp W, \quad V + W = TN, \quad J(V) \subset V, \quad J(W) \perp TN$$

S^6 のラグランジュ部分多様体

- N を S^6 のラグランジュ部分多様体とする．
  このとき，N は S^6 の極小部分多様体になることが知られている．

- 各 $x \in N$ について，接空間 T_xN の T_xS^6 における直交補空間 $(T_xN)^\perp$ は，結合的部分空間．
  次の ϕ_L を考える．

$$\phi_L \ : \ N \to G_{\mathbb{H}}(\mathbb{O}) \ ; \ x \mapsto (T_xN)^\perp.$$

Theorem 2.3 (Enoyoshi-Tsukada, 20)

$\phi_L : N \to G_{\mathbb{H}}(\mathbb{O})$ は調和写像．

$\rightarrow$ S^6 のその他のクラスの部分多様体に関して，ϕ_L のような $G_{\mathbb{H}}(\mathbb{O})$ への良い性質を持ったガウス写像を構成したい．

S^6 の概複素部分多様体

Theorem 2.4 (Gray, 69)

N を S^6 の概複素部分多様体とする．このとき， $\dim N = 2$ となる．
さらに，N は S^6 の極小部分多様体となる．

- 任意のコンパクトリーマン面は，S^6 の概複素部分多様体として実現できることが知られている (Bryant, 82).

Lemma 2.5

任意の $x \in \mathrm{Im}\mathbb{O}$ $(x \neq 0)$ および $\mathrm{Im}\mathbb{O}$ の 2 次元部分空間 V について，

$$x \perp V, \qquad x(V) \subset V$$

が成り立つならば，$\mathbb{R}x + V$ は結合的部分空間となる．

(ex) $x = e_1, V = \mathbb{R}e_2 + \mathbb{R}e_3$ とすれば，$\mathbb{R}x + V = \mathrm{Im}\mathbb{H} \in G_{\mathbb{H}}(\mathbb{O})$ となる．

- 概複素部分多様体 $N \subset S^6$ について，各 $x \in N$ と T_xN は補題の仮定を満たす．
  したがって，$\mathbb{R}x + T_xN$ は結合的部分空間．
- 次の ϕ_C を考える．(Obata's spherical Gauss map の 1 つ)

$$\phi_C : N \to G_{\mathbb{H}}(\mathbb{O})\ ;\ x \mapsto \mathbb{R}x + T_xN$$

Proposition 2.6

$\phi_C : N \to G_{\mathbb{H}}(\mathbb{O})$ は調和写像．

(証明)

- N が極小部分多様体であるとき，Obata's spherical Gauss map

$$\phi : N \to G_3(\mathbb{R}^7)\ ;\ x \mapsto \mathbb{R}x + T_xN$$

  は調和写像になる (Chen-Lue, 07).
- $\phi(N) \subset G_{\mathbb{H}}(\mathbb{O})$ および $G_{\mathbb{H}}(\mathbb{O})$ が $G_3(\mathbb{R}^7)$ の全測地的部分多様体であることから ϕ_C は調和写像．

Definition 2.7

(M, Q, g) : 四元数ケーラー多様体， N : 多様体， $f : N \to M$: はめ込み，
f^*Q : f による Q の引き戻し束.
(i) f が概複素はめこみ $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ 次を満たす切断 $I \in \Gamma(f^*Q)$ が存在する.

$$I^2 = -\mathrm{id}, \qquad I(df(TN)) \subset df(TN).$$

(ii) 概複素はめ込み f と f の概複素構造 $I \in \Gamma(f^*Q)$ に対して $Q_I := \{J \in f^*Q\ ;\ IJ = -JI\}$ とおく.
f が全複素はめ込み $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ 各 $x \in N, J \in Q_I$ に対して次が成り立つ.

$$J(df(TN)) \perp df(TN).$$

- 全複素はめ込みの概複素構造は，可積分になることが知られている.

Theorem 2.8 (S)

$\phi_C : N \to G_{\mathbb{H}}(\mathbb{O})$ は調和写像. さらに，ϕ_C がはめ込みならば， ϕ_C は全複素はめ込み.

S^6 の CR 部分多様体

- $N \subset S^6$: 3 次元 CR 部分多様体
  N の接分布 V, W で次を満たすものが存在する.
  $$V \perp W, \quad V + W = TN, \quad J(V) \subset V, \quad J(W) \perp TN.$$
  このとき， $\dim V = 2, \dim W = 1.$
- 各 $x \in N$ および V_x は，補題の仮定を満たす．したがって，$\mathbb{R}x + V_x$ は結合的部分空間.
  次の ϕ_{CR} を考える.
  $$\phi_{CR} : N \to G_{\mathbb{H}}(\mathbb{O}) \; ; \; x \mapsto \mathbb{R}x + V_x$$

Definition 2.9 (Bejancu,78)

(M, I, g) : ケーラー多様体，　N : 多様体，　$f : N \to M$, はめこみ
f が CR はめ込み $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ N 上の接分布 V, W で次を満たすものが存在する．

$$V + W = TN, \quad df(V) \perp df(W), \quad I(df(V)) \subset df(V), \quad I(df(W)) \perp df(TN).$$

- ケーラー多様体の超曲面は，CR 部分多様体の典型例になっている．

Definition 2.10

(M, Q, g) : 四元数ケーラー多様体，　N : 多様体，　$f : N \to M$, はめ込み
f が CR はめ込み $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ 切断 $I \in \Gamma(f^*Q)$ および N 上の接分布 V, W で次を満たすものが存在する．

$$I^2 = -\mathrm{id}, \quad V + W = TN, \quad df(V) \perp df(W), \quad I(df(V)) \subset df(V), \quad I(df(W)) \perp df(TN).$$

- 四元数ケーラー多様体の超曲面は，必ずしも CR 部分多様体になるとは限らない．

Corollary 2.11 (S)

$\phi_{CR} : N \to S^6$ がはめ込みならば，ϕ_{CR} は CR はめこみ．

まとめ

これまでの結果をまとめると

$$\begin{array}{lcl} N \subset S^6 \text{ が概複素} & \Longrightarrow & \phi_C \text{ は全複素かつ調和写像} \\ N \subset S^6 \text{ が 3 次元 } CR & \Longrightarrow & \phi_{CR} \text{ は } CR \\ N \subset S^6 \text{ がラグランジュ} & \Longrightarrow & \phi_L \text{ は調和写像} \end{array}$$

- $N \subset S^6$ をラグランジュ部分多様体とし，

$$\phi_L : N \to S^6 \;;\; x \mapsto (T_x N)^{\perp}.$$

一般に，各 $I \in \phi_L^* Q$ に対して

$$I(df(TN)) \not\subset df(TN) \quad \text{かつ} \quad I(df(TN)) \not\subset (df(TN))^{\perp}.$$

$d\phi_L$ $d\phi_L$ $d\phi_L$ $d\phi_L$

例：CR はめ込み

- $H \subset G_2$ を $Sp(1)$ と同型なある部分群とする．
  S^6 における H-軌道 $N := H(\frac{1}{3}e_2 + \frac{2\sqrt{2}}{3}e_4)$ は 3 次元 CR 部分多様体 (Mashimo, 85).

- $\phi_{CR} : N \to G_{\mathbb{H}}(\mathbb{O})$ は $I \in \Gamma(\phi_{CR}^* Q)$ により CR はめ込みになる．
  $Q_I = \{J \in \phi_{CR}^* Q \ ; \ IJ = -JI\}$ とおく．このとき，各 $x \in N$ および $J \in (Q_I)_x$ に対して

$$J(\underset{d\phi_{CR}}{df}(T_x N)) \perp \underset{d\phi_{CR}}{df}(T_x N).$$

- これは，全複素はめ込みにおいて，Q_I が持つ性質と同じ性質を持つ．

このはめ込みは，“全 CR はめ込み”であるといえる．

"全 CR はめ込み"

Definition 2.12

(M, Q, g)：四元数ケーラー多様体，　N：多様体，
$f : N \to M$: $I \in \Gamma(f^*Q)$ を CR 構造とする CR はめ込み，　$Q_I := \{J \in f^*Q \ ; \ IJ = -JI\}$
f が全 CR はめ込み
$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ 各 $x \in N$ および $J \in (Q_I)_x$ に対して，次を満たす T_xN の部分空間 V, W が存在し，

$$V + W = T_xN, \quad df(V) \perp df(W), \quad J(df(V)) \subset df(V), \quad J(df(W)) \perp df(T_xN)$$

$\dim V$ は $x \in N, J \in (Q_I)_x$ の取り方によらず一定.

- 全複素はめ込みは，全 CR はめ込みの特別な場合である.
- 先ほどの ϕ_{CR} は，全 CR はめ込みのひとつ.
- その他に，全 CR はめ込みの例は存在するか？

3. 結合的グラスマン多様体 $G_{\mathbb{H}}(\mathbb{O})$ におけるイソトロピー群作用

四元数対称空間への群作用

- $(M, \tilde{Q}, g)$：コンパクト四元数対称空間，G：M の等長変換群の単位連結成分
  $Q := \bigcup_{p \in M} \{A \in \tilde{Q}_p \,;\, A^2 = -\mathrm{id}\}$：$M$ のツイスター空間
  $\pi : Q \to M \,;\, A_p \mapsto p$：自然な射影．$Q$ は M 上の S^2 束になる．

- $o \in M$，　K：$o \in M$ における G の イソトロピー群
  $\mathfrak{g}, \mathfrak{k}$：$G, K$ のリー環，$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{m}$：標準分解，$\mathfrak{m} = T_o M$.

- 四元数構造の定義から，各 $I \in \tilde{Q}_o$ について $I(T_o M) \subset T_o M$.
  $\mathfrak{k}$ の 3 次元イデアル $\mathfrak{s}$ で，$\mathrm{ad}\mathfrak{s}|_{\mathfrak{m}} = \tilde{Q}_o$ となるものが存在する．
  $S(\mathfrak{s}) := \{A \in \mathfrak{s} \,;\, (\mathrm{ad}A|_{\mathfrak{m}})^2 = -\mathrm{id}\} = \{A \in \mathfrak{s} \,;\, |A| = 1\} = Q_o$

- $\mathfrak{k} = \mathfrak{s} + \mathfrak{k}_0 + \mathfrak{z}(\mathfrak{k})$，$\mathfrak{k}$ のイデアルと中心による分解　$\pi_{\mathfrak{s}} : \mathfrak{k} \to \mathfrak{s}$，直交射影
  $\mathfrak{s}$ は $\mathfrak{k}$ のイデアルなので，$\mathfrak{k}$ が $\mathfrak{s}$ に表現を持つ．
  $\mathfrak{s}$ の T_oM への表現を，M 全体に G 不変に広げて，四元数構造が定まっている．

- $p = g(o)$ $(g \in G)$.
  $T_pK(p)$ を調べるために，$g^{-1}(T_pK(p)) = T_o(g^{-1}Kg)(o)$ を考える

- $H := (g^{-1}Kg) \cap K$ とすれば $(g^{-1}Kg)(o) \cong K/H$
  H_0 : H の単位連結成分，$\mathfrak{h}$: H のリー環
  $\mathfrak{h}$ が $\mathfrak{s}$ に表現を持つので，H_0 が $\mathfrak{s}$ へ作用している．

- とくに，H_0 は $S(\mathfrak{s})$ に作用する．$S(\mathfrak{s}) = S^2$ なので作用の仕方は次のいずれか．

  (i) 自明，　(ii) $U(1)$-作用（回転），　(iii) $SO(3)$-作用 (推移的)

  H_0-作用による不動点は

  (i) $S(\mathfrak{s})$，　(ii) 対蹠的な 2 点，　(iii) なし

  $\pi_{\mathfrak{s}}(\mathfrak{h})$ は次のよう．

  $$\text{(i) } \pi_{\mathfrak{s}}(\mathfrak{h}) = \{0\}, \qquad \text{(ii) } \dim \pi_{\mathfrak{s}}(\mathfrak{h}) = 1, \qquad \text{(iii) } \pi_{\mathfrak{s}}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{s}.$$

- これらの類別により，イソトロピー群作用の軌道を I 型，II 型，III 型に分ける．

各型の軌道について

I 型，II 型について次のはめ込みを考える．

$$f : K/H_0 \to K/H = (g^{-1}Kg)(o)\ ;\ k(H_0) \to g^{-1}kg(o).$$

Lemma 3.1

- I 型の軌道について，$S^2 = S(\mathfrak{s})$ の各元に対して，K-不変切断 $I \in \Gamma(f^*Q)$ が定まる．
- II 型の軌道について，符号の自由度を除いて，K-不変切断 $I \in \Gamma(f^*Q)$ が定まる．
  $Q_I := \{J \in f^*Q\ ;\ IJ = -JI\}$ とすれば，K が Q_I に推移的に作用する．

Lemma 3.2

III 型の軌道 $N = K(p)$ について，Q の N への制限束 $\bar{Q}$ へ，K が推移的に作用する．

$G_H(\mathbb{O})$ におけるイソトロピー群

- $o := \mathrm{Im}\mathbb{H} \in G_{\mathbb{H}}(\mathbb{O})$ とし，r_o を o に関する鏡映とする．$r_o \in G_2$ となり

$$K := \{g \in G_2 \ ; \ g(o) = o\} = \{g \in G_2 \ ; \ gr_o = r_o g\}.$$

r_o による内部自己同型により K は G_2 の対称部分群になる．$G_{\mathbb{H}}(\mathbb{O}) \cong G_2/K$.

- 準同型 $\phi : Sp(1) \times Sp(1) \to G_2$ を次で定める．

$$\phi(p,q)(x + ye_4) = qx\bar{q} + (py\bar{q})e_4 \qquad \left(p, q \in Sp(1), \quad x \in \sum_{i=1}^{3} \mathbb{R}e_i, y \in \sum_{i=0}^{3} \mathbb{R}e_i\right)$$

$\phi(Sp(1) \times Sp(1)) = K$ となり $K \cong SO(4)$. よって，$G_{\mathbb{H}}(\mathbb{O}) = G_2/SO(4)$.

- E_{ij} : (i,j)-成文が 1, そのほかの成分が 0 の 7 次正方行列．$G_{ij} = E_{ij} - E_{ji}$ とおく．

- $\mathfrak{g}_2$ は次の各元により張られる．ただし，$\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$ は $\lambda + \mu + \nu = 0$.

$$
\begin{aligned}
&W_1(\lambda,\mu,\nu) = \lambda G_{23} + \mu G_{45} + \nu G_{67}, && W_2(\lambda,\mu,\nu) = -\lambda G_{13} - \mu G_{46} + \nu G_{57}, \\
&W_3(\lambda,\mu,\nu) = \lambda G_{12} + \mu G_{47} + \nu G_{56}, && \\
&W_4(\lambda,\mu,\nu) = \lambda G_{14} - \mu G_{27} - \nu G_{36}, && W_5(\lambda,\mu,\nu) = -\lambda G_{15} + \mu G_{26} - \nu G_{37}, \\
&W_6(\lambda,\mu,\nu) = \lambda G_{16} + \mu G_{25} + \nu G_{34}, && W_7(\lambda,\mu,\nu) = -\lambda G_{17} - \mu G_{24} + \nu G_{35}.
\end{aligned}
$$

- $W_i := \{W_i(\lambda,\mu,\nu)\ ;\ \lambda + \mu + \nu = 0\}$ とおく．

- $\mathfrak{g}_2 = \mathfrak{k} + \mathfrak{m}$ を標準分解とすれば

$$
\mathfrak{k} = W_1 + W_2 + W_3, \qquad \mathfrak{m} = W_4 + W_5 + W_6 + W_7.
$$

- $\mathfrak{m}$ の各元は，次の形の元 W を用いて $\left(\begin{array}{c|c} & -{}^tW \\ \hline W & \end{array}\right)$ のように与えられる．

$$\mathbb{R}\left(\begin{array}{ccc} \lambda_1 & & \\ & & \\ \hline & & -\nu_1 \\ & -\mu_1 & \end{array}\right) + \mathbb{R}\left(\begin{array}{ccc} & & \nu_2 \\ & \mu_2 & \\ \hline \lambda_2 & & \\ & & \end{array}\right) + \mathbb{R}\left(\begin{array}{ccc} & -\mu_3 & \\ & & \nu_3 \\ \hline & & \\ -\lambda_3 & & \end{array}\right) + \mathbb{R}\left(\begin{array}{ccc} & & \\ \lambda_4 & & \\ \hline & -\mu_4 & \\ & & \nu_4 \end{array}\right)$$

- 四元数構造 $\tilde{Q}$ は，次の $\mathfrak{s} \subset \mathfrak{k}$ により与えられる．

$$\mathfrak{s} = \mathbb{R}W_1(0,1,-1) + \mathbb{R}W_2(0,1,-1) + \mathbb{R}W_3(0,1,-1)$$

$$= \left\{ \left(\begin{array}{c|c} & \\ \hline & A \end{array}\right) \; ; \; A \in \mathbb{R}\left(\begin{array}{cc|cc} & -1 & & \\ 1 & & & \\ \hline & & & 1 \\ & & -1 & \end{array}\right) + \mathbb{R}\left(\begin{array}{cc|cc} & -1 & & \\ 1 & & & \\ \hline & & & 1 \\ & & -1 & \end{array}\right) + \mathbb{R}\left(\begin{array}{cc|cc} & -1 & & \\ 1 & & & \\ \hline & & & 1 \\ & & -1 & \end{array}\right) \right\}$$

- $W_1(0,1,-1), W_2(0,1,-1), W_3(0,1,-1)$ は，それぞれ W_4, W_5, W_6, W_7 を互いに交換している．

極大平坦トーラス

- イソトロピー群作用の各軌道は，全測地的極大平坦トーラスと交わる．
- $\mathfrak{a} := W_7 \subset \mathfrak{m}$ は $\mathfrak{m}$ の極大可換部分空間となる．対応する $G_{\mathbb{H}}(\mathbb{O})$ 上の全測地的極大平坦トーラス A は次のよう．

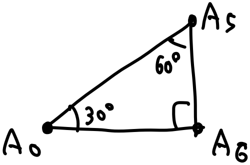
$$A = \left\{ a(\theta,\psi) = \mathrm{span}_{\mathbb{R}} \left\{ \begin{matrix} \cos(2\theta+\psi)e_1 + \sin(2\theta+\psi)e_5, \\ \cos(\theta+\psi)e_2 + \sin(\theta+\psi)e_6, \\ \cos\theta e_3 - \sin\theta e_7 \end{matrix} \right\} \ ; \ \begin{matrix} 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}, \\ 0 \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}, \\ 3\theta + 2\psi \leq \pi. \end{matrix} \right\}$$

- $G_{\mathbb{H}}(\mathbb{O})$ において，$\mathfrak{s}$ の正規直交基底を I, J, K とすれば，次の直交直和分解が成り立つ．

$$\mathfrak{m} = \mathfrak{a} + I(\mathfrak{a}) + J(\mathfrak{a}) + K(\mathfrak{a})$$

- このような四元数対称空間は，$G_{\mathbb{H}}(\mathbb{O})$ 以外に次がある．

$$SU(4)/S(U(2)\times U(2)), \quad SO(7)/S(O(3)\times O(4)), \quad SO(8)/S(O(4)\times O(4))$$

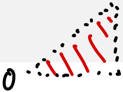


- A の部分集合 A_i を次で定める.

$$
\begin{aligned}
A_0 &= \{a(0,0)\},\\
A_1 &= \{a(\theta,\psi)\ ;\ 0<\theta<\frac{\pi}{3},\ 0<\psi<\frac{\pi}{2},\ 3\theta+2\psi<\pi\},\\
A_2 &= \{a(\theta,0)\ ;\ 0<\theta<\frac{\pi}{3}\},\\
A_3 &= \{a(0,\psi)\ ;\ 0<\psi<\frac{\pi}{2}\},\\
A_4 &= \{a(\theta,\psi)\ ;\ 0<\theta<\frac{\pi}{3},\ 0<\psi<\frac{\pi}{2},\ 3\theta+2\psi=\pi\},\\
A_5 &= \{a(0,\frac{\pi}{2})\},\\
A_6 &= \{a(\frac{\pi}{3},0)\}.
\end{aligned}
$$

- $A=\bigsqcup_{i=0}^{6} A_i$ となり，各 A_i 上で K 軌道の軌道型は変わらない.

$p \in A_1$ について



- $p = g(o) \in A_1$ $(g \in G_2)$ を通る K-軌道は主軌道．とくに，$\dim K(p) = 6$.
- $H := K \cap g^{-1}Kg$ とすれば，$H \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.
  $\mathfrak{h}$ を H のリー環とすれば $\mathfrak{h} = \{0\}$. とくに，$\pi_{\mathfrak{s}}(\mathfrak{h}) = \{0\}$. よって，$K(p)$ は I 型の軌道になる．
- $\mathfrak{a} = W_7$ より $T_o(g^{-1}Kg)(o) = W_4 + W_5 + W_6$. とくに，任意の $I \in \mathfrak{s}$ について

$$V \perp W = T_o(g^{-1}Kg)(o), \quad V \perp W, \quad I(V) \subset V, \quad I(W) \subset (T_o(g^{-1}Kg)(o))^{\perp}$$

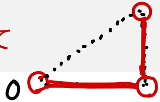
  を満たす部分空間 $V, W \subset T_o(gKg^{-1})(o)$ $(\dim V = 4, \dim W = 2)$ が存在する．

Proposition 3.3 (S)

K-軌道 $K(p)$ は，次を満たす K 同変はめ込み $f : S^3 \times S^3/\mathbb{Z}_2 \to G_{\mathbb{H}}(\mathbb{O})$ の像になる．

1. f^*Q の K-不変切断が S^2 の元と 1 対 1 に対応する．
2. 各 K-不変切断 I により，f は CR はめ込みになる．

$p \in A_2, A_4$ について



- $p = g(o) \in A_2, A_4$ を通る K-軌道について $\dim K(p) = 5$.
- $H := K \cap g^{-1}Kg$ とすれば，$H = U(1) \times \mathbb{Z}_2$. $\dim \mathfrak{h} = 1$ かつ $\pi_{\mathfrak{s}}(\mathfrak{h}) = 1$ となる．
  よって，$K(p)$ は II 型の軌道である．

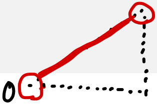
Proposition 3.4 (S)

K-軌道 $K(p)$ は，全 CR はめ込み $f : S^2 \times S^3 \to G_{\mathbb{H}}(\mathbb{O})$ の像である．

- $T_o(g^{-1}Kg)(o) = \mathbb{R}W_4(-2,1,1) + W_5 + W_6$
- $I(W_5 + W_6) \subset W_5 + W_6$ を満たす $I \in \mathfrak{s}$ が，f の CR 構造を与える．
  $I(\mathbb{R}W_4(-2,1,1)) \subset \mathfrak{a} \subset (T_o(g^{-1}Kg)(o))^{\perp}$ が成り立つ．
- 各 $J \in \{A \in \mathfrak{s}\ ;\ IA = -AI\}$ について，$J(\mathfrak{a}) \subset W_5 + W_6$.
  $W_5 + W_6$ における $J(\mathfrak{a})$ の直行補空間を U とすれば，

$$J\Big(\mathbb{R}W_4(-2,1,1) + U\Big) \subset \mathbb{R}W_4(-2,1,1) + U.$$

$p \in A_3$ について



- $p = g(o) \in A_3$ を通る K-軌道について $\dim K(p) = 5$.
- $H := K \cap g^{-1}Kg$ とすれば，$H = U(1) \times \mathbb{Z}_2$. $\dim \mathfrak{h} = 1$ かつ $\pi_{\mathfrak{s}}(\mathfrak{h}) = 1$ となる．
  よって，$K(p)$ は II 型の軌道である．

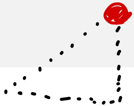
Proposition 3.5 (S)

K-軌道 $K(p)$ は，全 CR はめ込み $f : (S^3 \times S^3)/U(1) \to G_{\mathbb{H}}(\mathbb{O})$ の像である．

- $T_o(g^{-1}Kg)(o) = W_4 + W_5 + \mathbb{R}W_6(1, -1, 0)$
- $I(W_4 + W_5) \subset W_4 + W_5$ を満たす $I \in \mathfrak{s}$ が，f の CR 構造を与える．
  $I(\mathbb{R}W_6(1, -1, 0)) \subset \mathfrak{a} \subset (T_o(g^{-1}Kg)(o))^{\perp}$ が成り立つ．
- 各 $J \in \{A \in \mathfrak{s}\ ;\ IA = -AI\}$ について，$J(\mathfrak{a}) \subset W_4 + W_5$.
  $W_4 + W_5$ における $J(\mathfrak{a})$ の直行補空間を U とすれば，

$$J\Big(\mathbb{R}W_6(1, -1, 0) + U\Big) \subset \mathbb{R}W_6(1, -1, 0) + U.$$

$p \in A_5 = \{a(0, \frac{\pi}{2})\}$



- $p = g(o) \in A_5$ を通る K-軌道について $\dim K(p) = 4$.
- $K(p)$ は極地.

  とくに，全測地的部分多様体になっている.

Proposition 3.6 (Enoyoshi-Tsukada, 19)

K-軌道 $K(p)$ は，全複素はめ込み $f : S^2 \times S^2 \to G_{\mathbb{H}}(\mathbb{O})$ の像である.

- $T_o(gKg^{-1})(o) = W_4 + W_5$
- $I(W_4 + W_5) \subset W_4 + W_5$ を満たす $I \in \mathfrak{s}$ により複素構造が入る.
- 各 $J \in \{A \in \mathfrak{s}\ ;\ AI = -IA\}$ について,

$$J(W_4 + W_5) \subset W_6 + W_7$$

  となり，$J(T_o(g^{-1}Kg)(o)) \subset (T_o(g^{-1}Kg)(o))^{\perp}$.

$p \in A_6 = \{a(\frac{\pi}{3}, 0)\}$

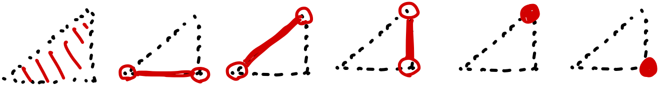
- $p = g(o) \in A_6$ を通る K-軌道について $\dim K(p) = 3$. とくに，$K(p) \cong Sp(1)/\mathbb{Z}_2$.
- $H := K \cap g^{-1}Kg \cong Sp(1)$ となり，$\mathfrak{h} \cong \mathfrak{sp}(1)$.
  とくに，$\pi_{\mathfrak{s}}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{s}$ となり，$K(p)$ は III 型の K-軌道.

- $T_o(gKg^{-1})(o) = \mathbb{R}W_4(-2, 1, 1) + \mathbb{R}W_5(1, -2, 1) + \mathbb{R}W_6(1, 1, -2)$.
  各 $I \in \mathfrak{s}$ について，
$$I\Big(T_o(g^{-1}Kg)(o)\Big) \not\subset T_o(g^{-1}Kg)(o), \qquad I\Big(T_o(g^{-1}Kg)(o)\Big) \not\subset (T_o(g^{-1}Kg)(o))^{\perp}.$$
- 四元数構造に関して良い性質（全複素や全 CR，四元数部分多様体など）をもっていない...

まとめ

- 結合的グラスマン多様体 $G_{\mathbb{H}}(\mathbb{O})$ における等長変換群のイソトロピー群作用の軌道型は 6 種.

	A_1 I	A_2 II	A_3 II	A_4 II	A_5 II	A_6 III
dim	6	5	5	5	4	3
軌道型	主軌道				極地, 全測地的 部分多様体	S^3
	全 CR はめこみ	全 CR はめこみ	全 CR はめこみ	全 CR はめこみ	全複素 はめこみ (Enoyoshi- Tsukada, 19)	



今後の課題

各四元数対称空間において，

- 等長変換群のイソトロピー群作用の軌道の四元数構造に関する性質.
- Hermann 作用の軌道の四元数構造に関する性質.

四元数ケーラー多様体では，ツイスター空間を用いて部分多様体を調べる研究がある.
とくに，全複素部分多様体はツイスター空間のルジャンドル部分多様体から構成される.

- 全 CR 部分多様体は，ツイスター空間のどのような部分多様体と関係を持つか？

$\dim G_{\mathbb{H}}(\mathbb{O}) = 8$ であったが，

- $\mathrm{Im}\mathbb{O}$ の 4 次元部分多様体から $G_{\mathbb{H}}(\mathbb{O})$ への全複素はめ込みは構成できるか ？
  (例：coassociative submanifold $N \subset \mathrm{Im}\mathbb{O}$. $(T_x N)^\perp$ は結合的部分空間であり，$\dim N = 4$.
  ガウス写像 $N \to G_{\mathbb{H}}(\mathbb{O})$; $x \mapsto (T_x N)^\perp$ はどんな性質を持つか？)

S^6 の概複素部分多様体が，Hashimoto-Taniguchi-Udagawa により詳しく調べられている.

- どのような概複素部分多様体ならば，今回の調和写像が安定になるか，不安定になるか？

ご清聴ありがとうございました！！