パラエルミート対称空間と擬エルミート対称空間の双対性について

杉本恭司（すぎもときょうじ）
東京理科大学理工学研究科

「部分多様体幾何とリー群作用2022」

1. はじめに.

・Definition 1.

・G:連結Lie群, L:Gの閉部分群, $\sigma(\neq id_G)\in Inv(G)$.

・$(G/L,\sigma)$:対称空間 $\overset{}{\underset{def.}{\Longleftrightarrow}}$ $(G^\sigma)_0\subset L\subset G^\sigma$.

・但し, $G^\sigma=\{x\in G\mid \sigma(x)=x\}$, $(G^\sigma)_0$:単位連結成分.

Definition 2.

- $(G/L, \sigma)$: 対称空間.
- G/L : para-Hermite (resp. 擬Hermite)

$\underset{\text{def.}}{\iff}$ G-不変para複素構造 (resp. 複素構造) と, G-不変para-Hermite計量 (resp. 擬Hermite計量) を兼ね備えている.

- para-Hermite対称空間をPAHSS,
- 擬Hermite対称空間をPSHSS と略記する.

・C^∞-mfd M に対して，M上の para複素構造 I とは，
M上の$(1,1)$-テンソル場であって(1)〜(3)をみたすもの：

(1) $I^2 = id.$

(2) $\dim T_p^+M = \dim T_p^-M$ for ${}^\forall p \in M.$

但し，$T_p^\pm M = \{ u \in T_pM \mid I_p(u) = \pm u \}.$

(3) $[IX, IY] - I[IX, Y] - I[X, IY] + [X, Y] = 0$ for ${}^\forall X, Y \in \mathfrak{X}(M).$

・また，M上の para-Hermite計量 g とは，M上の擬Riemann計量で，

(4) $g(IX, Y) + g(X, IY) = 0$ for ${}^\forall X, Y \in \mathfrak{X}(M).$

を満たすものをいう．

· **Remark**

· $(G/L, \sigma, I, g)$: PAHSSとする.

(1) para-Hermite計量 g はニュートラル計量.

(2) $\omega(X, Y) := g(X, IY)$ $(X, Y \in G/L)$ は G/L 上のシンプレクティック形式.

(3) $T^{\pm} : G/L \ni p \longmapsto T_p^{\pm} G/L$ は完全可積分.

・例1（一葉双曲面の高次元化）

・$G := SL(p+q,\mathbb{R})\ (1 \leqq p \leqq q)$, $\mathfrak{g} := \mathrm{Lie}(G) = \mathfrak{sl}(p+q,\mathbb{R})$.

・$Z := \frac{1}{p+q}\begin{pmatrix} qE_p & O \\ O & -pE_q \end{pmatrix} \in \mathfrak{g}$, $M := \mathrm{Ad}G(Z) = G/C_G(Z)$

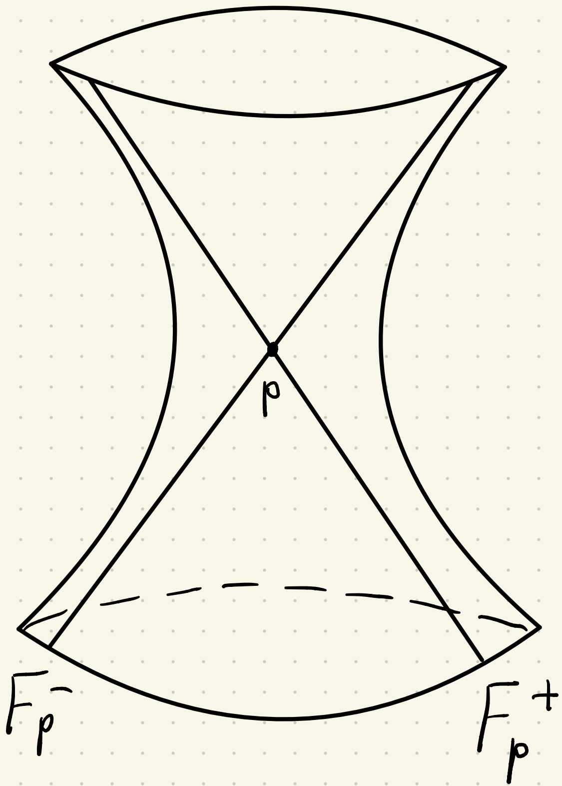
とすると，M は PAHSS になる：

・$\sigma := A_{\exp\sqrt{-1}\pi Z}$, $I_o := \mathrm{ad}Z|_{\mathfrak{u}}$, $g_o := B_{\mathfrak{g}}|_{\mathfrak{u}\times\mathfrak{u}}$.

・但し，o は G/L の原点，$\mathfrak{u} := \{X \in \mathfrak{g} \mid \sigma_*(X) = -X\}$,

$B_{\mathfrak{g}}$ は $\mathfrak{g}$ の Killing 形式.

・$p = q = 1$ のとき，M は一葉双曲面.



・各点を通る母線 $F_p^{\pm}$ が
2本存在する.

・$F_p^{\pm}$ はそれぞれ $T^{\pm}$ の p を通る
極大連結積分多様体.

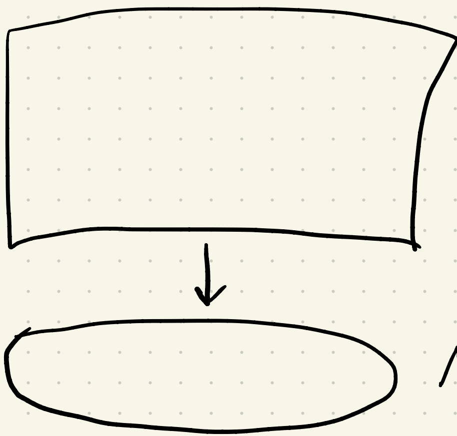
・$I_p(u) = \begin{cases} u & \cdots \quad u \in T_pF_p^+, \\ -u & \cdots \quad u \in T_pF_p^- . \end{cases}$

$SL(2,\mathbb{R})/S(GL(1,\mathbb{R})\times GL(1,\mathbb{R}))$

・例2(対称R空間の余接束)

・Riemann対称空間のイソトロピー表現の軌道で、対称空間になっているものを対称R空間という.

・対称R空間の余接束はPAHSSになる
(cf. Nagano, Takeuchi, Kaneyuki-Kozai)



$T^*N \cong G/L$

$N = K/(K\cap L) \cong G/P$

· Lemma 1 (Kaneyuki-Kozai).

· $(G/L, \sigma, I, \mathfrak{g})$：概効果的半単純なAHSS, $\mathfrak{g} := \mathrm{Lie}(G)$,
$\mathfrak{g} = \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{u}$: σ_*に関する標準分解.
$\exists^1 Z \in \mathfrak{z}(\mathfrak{l})$ s.t. $\begin{cases} (1)\ \mathfrak{l} = c_{\mathfrak{g}}(Z) = \{X \in \mathfrak{g} \mid [X, Z] = 0\}, \\ (2)\ I_0 = \mathrm{ad} Z|_{\mathfrak{u}}. \end{cases}$

· このZをG/Lの特性元という.

· $L = C_G(Z)$のとき, G/Lを双曲軌道型という.

・Lemma 2 (Shapiro).

・$(\bar{G}/\bar{L}, \bar{\sigma}, J, h)$:概効果的半単純PSHSS, $\bar{\mathfrak{g}} := \mathrm{Lie}(\bar{G})$,
$\bar{\mathfrak{g}} = \bar{\mathfrak{l}} \oplus \bar{\mathfrak{u}}$: $\bar{\sigma}_*$ に関する $\bar{\mathfrak{g}}$ の標準分解.

・$\exists^1 S \in \mathfrak{z}(\bar{\mathfrak{l}})$ s.t. $\bar{L} = C_{\bar{G}}(S) = C_{\bar{G}}(S)_0$, $J_0 = \mathrm{ad}\,S|_{\bar{\mathfrak{u}}}$.

・2. para実形.

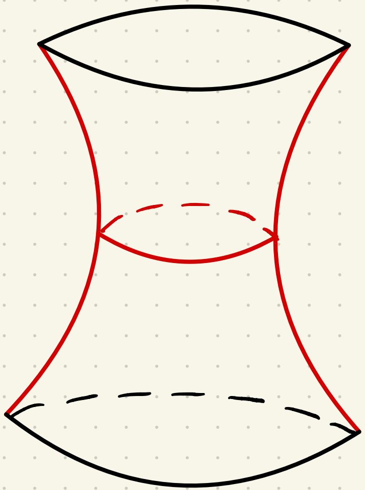
・Definition 3.

(M, I), (M', I') : para複素多様体, $f : M \to M'$ を C^∞ 写像.

$$\begin{cases} \cdot f : \text{para正則} \overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} (df)_p \circ I_p = I_{f(p)} \circ (df)_p \\ \cdot f : \text{反para正則} \overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} (df)_p \circ I_p = -I_{f(p)} \circ (df)_p \end{cases}$$

・PAHSS G/L の対合的反para正則等長変換の固定点集合の連結成分をpara実形という.

・例3.



$$SL(2,\mathbb{R}) / S(GL(1,\mathbb{R}) \times GL(1,\mathbb{R})) =: G/L$$

・赤線はそれぞれ一葉双曲面の para実形.

・双曲線は,

$$\Xi : xL \longmapsto (JxJ^{-1})L, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

の固定点集合.

・S^1 は

$$\Phi : xL \longmapsto {}^t x^{-1} L$$

の固定点集合.

・Remark.

(1) 対合的反para正則等長変換の固定点集合は連結とは限らない.

(2) 任意のpara実形は原点を含むあるpara実形と合同.

(3) 双曲軌道型効果的半単純PAHSSには, コンパクトなpara実形が一意的に存在する(対称R空間).

(4) (3)の非コンパクト双対も一意的に存在し, コンパクトなものと直交するようにとれる.

Proposition 1.

- $(G/L, \sigma, I, g)$：双曲軌道型効果的半単純PAHSS,
- $g_0 = \lambda B_{\mathfrak{g}}|_{\mathfrak{g}^{-\sigma_*} \times \mathfrak{g}^{-\sigma_*}}$ $(\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$, $o \in R \subset G/L$ とする.

次の(1)と(2)は同値：

(1) R は para実形.

(2) R は閉連結完備全測地的Lagrange部分多様体で, 誘導計量が非退化.

・Theorem 1.

・非退化Jordan triple systemから構成される擬Riemann対称R空間は、ある双曲軌道型効果的半単純PAHSSのpara実形として実現でき、その逆も成り立つ.

・Remark.

$\boxed{\text{対称R空間}} \longleftrightarrow \boxed{\text{コンパクトJTS}} \subset \boxed{\text{非退化JTS}}$

・3. 双対性.

・Lie群 G：絶対単純 $\overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}$ $\mathrm{Lie}(G)$ の複素化が単純.

・以下, PAHSSといえば, <u>双曲軌道型効果的絶対単純</u>であるとし, PSHSSといえば, <u>効果的絶対単純</u>であるとする.

・Remark

・このとき, PAHSS, PSHSS の para-Hermite計量, 擬Hermite計量は, 定数倍の差を除いて一意である.

・$G, \bar{G}$：連結絶対単純Lie群 with $Z(G), Z(\bar{G})$：自明

・$\mathcal{P}(G)$：PAHSS G/L とそのpara実形 R の組 $(G/L, R)$ の全体,

・$\mathcal{R}(\bar{G})$：PSHSS $\bar{G}/\bar{L}$ とその実形 Q の組 $(\bar{G}/\bar{L}, Q)$ の全体.

・$\mathfrak{g}, \bar{\mathfrak{g}}$：絶対単純Lie代数.

・$d\mathcal{P}(\mathfrak{g})$：$\mathfrak{g}$ の半単純元 Z で $\mathrm{ad}Z$ の固有値が $0, \pm 1$ なるものと, $\xi \in \mathrm{Inv}(\mathfrak{g})$ で, $\xi(Z) = -Z$ なるものの組 (Z, ξ) 全体.

・$d\mathcal{R}(\bar{\mathfrak{g}})$：$\bar{\mathfrak{g}}$ の半単純元 S で $\mathrm{ad}S$ の固有値が $0, \pm\sqrt{-1}$ なるものと, $\eta \in \mathrm{Inv}(\bar{\mathfrak{g}})$ で, $\eta(S) = -S$ なるものの組 (S, η) 全体.

- $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$：複素単純Lie代数.

- $dP(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$：$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$の実形$\mathfrak{g}$と，$(Z, \xi) \in dP(\mathfrak{g})$の三つ組$(\mathfrak{g}, Z, \xi)$の全体.
- $dR(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$：$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$の実形$\bar{\mathfrak{g}}$と，$(S, \eta) \in dR(\bar{\mathfrak{g}})$の三つ組$(\bar{\mathfrak{g}}, S, \eta)$の全体.

Definition 4.

(1). $(G/L_1, R_1), (G/L_2, R_2) \in \mathcal{P}(G)$ に対して,

$$(G/L_1, R_1) \simeq (G/L_2, R_2) \underset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} {}^{\exists}\Phi : G/L_1 \longrightarrow G/L_2 : \text{para正則相似変換}$$

$$\Phi(R_1) = R_2.$$

(2) $(Z_1, \xi_1), (Z_2, \xi_2) \in d\mathcal{P}(\mathfrak{g})$ に対して,

$$(Z_1, \xi_1) \sim (Z_2, \xi_2) \underset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} {}^{\exists}\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{g}) \text{ s.t. } \varphi(Z_1) = Z_2,\ \varphi \circ \xi_1 \circ \varphi^{-1} = \xi_2.$$

(3) $(\mathfrak{g}_1, Z_1, \xi_1), (\mathfrak{g}_2, Z_2, \xi_2) \in d\mathcal{P}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ に対して,

$$(\mathfrak{g}_1, Z_1, \xi_1) \sim (\mathfrak{g}_2, Z_2, \xi_2) \underset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} {}^{\exists}\varphi : \mathfrak{g}_1 \longrightarrow \mathfrak{g}_2 : \text{同型 s.t.}$$

$$\varphi(Z_1) = Z_2,\ \varphi \circ \xi_1 \circ \varphi^{-1} = \xi_2.$$

・$R(\overline{G})$, $dR(\overline{\mathfrak{g}})$, $dR(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$にも、同様にして同値関係を定義する. 次を得る:

$$
\begin{tikzcd}
d\mathcal{P}(\mathfrak{g})/\sim \arrow[r, "\text{inj.}", "F_1"'] \arrow[d, leftrightarrow, "\text{bij.}"', "F_{pr}"] & d\mathcal{P}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})/\sim \arrow[r, leftrightarrow, "\text{bij.}", "F"'] & dR(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})/\sim & dR(\overline{\mathfrak{g}})/\sim \arrow[l, "\text{inj.}"', "F_2"] \arrow[d, leftrightarrow, "F_r"', "\text{bij.}"] \\
\mathcal{P}(G)/\simeq \arrow[ur, dashed] & & & R(\overline{G})/\simeq \arrow[ul, dashed]
\end{tikzcd}
$$

for ${}^\forall\mathfrak{g}, \overline{\mathfrak{g}}$: $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$の実形.

・Remark.

・各絶対単純Lie代数 $\mathfrak{g}, \bar{\mathfrak{g}}$ に対して, $dP(\mathfrak{g})/\sim$, $dR(\bar{\mathfrak{g}})/\sim$ を決定すれば, PAHSS, PSHSS の para実形, 実形の分類を得る (Boumuki, Shimokawa-S.).

$F: dP(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})/\sim \longrightarrow dR(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})/\sim$ について.

· **Proposition 2.**

· $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$: 複素単純Lie代数.

(1) $f: dP(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}) \longrightarrow dR(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$, $(\mathfrak{g}, Z, \xi) \longmapsto (\bar{\mathfrak{g}}, S, \eta)$,

$\bar{\mathfrak{g}} := \mathfrak{g}^{\xi} \oplus \sqrt{-1}\,\mathfrak{g}^{-\xi}$, $S := -\sqrt{-1}\,Z$, $\eta := \xi_{\mathbb{C}}|_{\bar{\mathfrak{g}}}$

は全単射. 但し, $\xi_{\mathbb{C}}$ は ξ の $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ への複素化.

(2) $F: dP(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})/\sim \longrightarrow dR(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})/\sim$, $[(\mathfrak{g}, Z, \xi)] \longmapsto [f(\mathfrak{g}, Z, \xi)]$

は well-defined で, 全単射.

- **Theorem 2.**
  - $(G/L, R) \in \mathcal{P}(G)$, $o \in R$ とする.
  - ${}^{\exists}(\bar{G}/L, Q) \in \mathcal{R}(\bar{G})$, $o \in Q$ s.t. Q は R と同変微分同型.
  - この逆も成り立つ.

· Outline of proof.

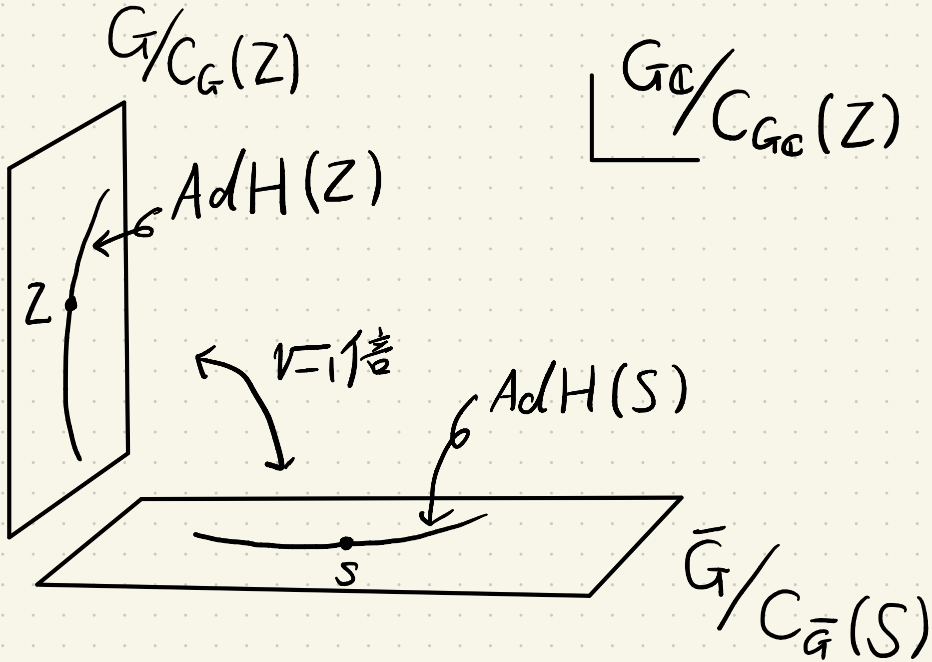
· Ξ : R に同伴した G/L の対合的反para正則等長変換とする.

· $^{\exists 1}\hat{\xi} \in \mathrm{Inv}(G)$ s.t. $\hat{\xi}(L) = L$, $\Xi(xL) = \hat{\xi}(x)L$, $\xi(Z) = -Z$.
但し, Z : G/L の特性元, $\xi := \hat{\xi}_*$.

· $H := (G^{\hat{\xi}})_0$, $\mathfrak{g} := \mathrm{Lie}(G)$ とし, $(\bar{\mathfrak{g}}, S, \eta) := f(\mathfrak{g}, Z, \xi)$,
$\bar{G} := \mathrm{Int}(\bar{\mathfrak{g}})$ とする. このとき, $\bar{G}/C_{\bar{G}}(S)$ はPSHSS.

· η から $\bar{G}/C_{\bar{G}}(S)$ の原点を固定する対合的反正則等長変換を誘導でき, その固定点集合を Q とする.

・このとき，R と Q は H 同変微分同型になる． $\square$



・$G_{\mathbb{C}}$：G，$\bar{G}$ の複素化．

Remark.

- $G_{\mathbb{C}}/C_{G_{\mathbb{C}}}(Z) = G_{\mathbb{C}}/C_{G_{\mathbb{C}}}(S)$ は para-Hermite かつ擬Hermite.

$$
\begin{tikzcd}
G/C_G(Z) \arrow[dr, "\text{実形}"] & \\
& G_{\mathbb{C}}/C_{G_{\mathbb{C}}}(Z) \\
\bar{G}/C_{\bar{G}}(S) \arrow[ur, "\text{para実形}"'] &
\end{tikzcd}
$$

· Proposition 3.

· $\sigma := \exp\sqrt{-1}\pi\,\mathrm{ad}\,Z \in \mathrm{Inv}(\mathfrak{g})$ とする.

(1) $\bar{G}/C_{\bar{G}}(S)$: 非コンパクト型Hermite対称空間

$\iff \xi\circ\sigma$: $\mathfrak{g}$ の Cartan対合.

(2) $\bar{G}/C_{\bar{G}}(S)$: コンパクト型Hermite対称空間

$\iff \xi$: $\mathfrak{g}$ の Cartan対合.

·例4.

(1). $1 \leqq p \leqq q$.

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & \overset{\text{PAHSS}}{SL(p+q,\mathbb{R})/S(GL(p,\mathbb{R})\times GL(q,\mathbb{R}))}. \\
SO(p,q)_0/(SO(p)\times SO(q)) \arrow[ur, "\text{para実形}"] \arrow[dr, "\text{実形}"'] & \\
 & \overset{\text{PSHSS}}{SU(p,q)/S(U(p)\times U(q))}.
\end{tikzcd}
$$

(2). $1 \leqq i \leqq p-1,\ p+1 \leqq j \leqq n-1$

$$
\begin{tikzcd}
 & \text{PAHSS} \\
 & SL(p+q,\mathbb{R}) / S(GL(i+j-p,\mathbb{R}) \times GL(2p+q-i-j,\mathbb{R})) \\
SO(p,q)_0 / (SO(i,j-p)_0 \times SO(p-i,n-j)_0) \arrow[ur, "\text{para実形}"] \arrow[dr, "\text{実形}"'] & \\
 & \text{PSHSS} \\
 & SU(p,q) / S(U(i,j-p) \times U(p-i,n-j))
\end{tikzcd}
$$

(3) $2 \leqq n,\ 1 \leqq i < (n/2)+1$

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & \text{PAHSS} \\
 & SL(2n,\mathbb{R})/S(GL(2i,\mathbb{R}) \times GL(2(n-i),\mathbb{R})) \\
Sp(n,\mathbb{R})/(Sp(i,\mathbb{R}) \times Sp(n-i,\mathbb{R})) \arrow[ur, "\text{para実形}"] \arrow[dr, "\text{実形}"'] & \\
 & \text{PSHSS} \\
 & SU(n,n)/S(U(i,i) \times U(n-i,n-i))
\end{tikzcd}
$$

ご清聴ありがとうございました.