Lie 球面幾何学の複素化と実グラスマン多様体の全複素部分多様体

塚田　和美

部分多様体幾何とリー群作用2022

2023年3月28日

序

研究テーマ : **四元数ケーラー多様体の複素部分多様体**

複素微分幾何と四元数微分幾何との相互作用

今回の対象： 実グラスマン多様体 $\widetilde{\mathbf{Gr}}_4(\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}})$

$\boldsymbol{n}$ 次元実ベクトル空間 $\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$ の向き付けられた $\mathbf{4}$ 次元部分空間全体

本研究の主目的： $\widetilde{\mathbf{Gr}}_4(\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}})$ の半分次元全複素部分多様体の構成と
Lie 球面幾何学の複素化と呼ばれるべき幾何学との関連

$\mathbf{H_2}(\mathbb{C}^{\boldsymbol{n}})$： $\mathbb{C}^{\boldsymbol{n}}$ の複素 $\mathbf{2}$ 次元部分空間で標準的な複素内積を制限したとき零となるもの全体

（複素） $\boldsymbol{2n-7}$ 次元複素多様体となり，さらに**正則接触構造**をもつ.

自然な射影　$\mathbf{H_2}(\mathbb{C}^{\boldsymbol{n}}) \to \widetilde{\mathbf{Gr}}_{\mathbf{4}}(\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}})$:ツイスターファイブレーション

複素球面 $\mathbb{C}\boldsymbol{S}^{\boldsymbol{n-3}}$： $\boldsymbol{z_1^2 + z_2^2 + \cdots + z_{n-2}^2 = 1}$ で定義される $\mathbb{C}^{\boldsymbol{n-2}}$ の複素超曲面

$\mathbb{C}\boldsymbol{S}^{\boldsymbol{n-3}}$ の単位接ベクトル束 $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{T}\mathbb{C}\boldsymbol{S}^{\boldsymbol{n-3}})$ は $\mathbf{H_2}(\mathbb{C}^{\boldsymbol{n}})$ への正則埋め込みをもち，その像は $\mathbf{H_2}(\mathbb{C}^{\boldsymbol{n}})$ の開集合となる.

$$
\begin{tikzcd}
& \mathbf{H_2}(\mathbb{C}^{\boldsymbol{n}}) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\mathbb{C}\boldsymbol{S}^{\boldsymbol{n-3}} & & \widetilde{\mathbf{Gr}}_{\mathbf{4}}(\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}).
\end{tikzcd}
$$

<u>右側のファイブレーションについて</u>: $\widetilde{\mathbf{Gr}}_{\mathbf{4}}(\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}})$ の全複素部分多様体から $\mathbf{H_2}(\mathbb{C}^{\boldsymbol{n}})$ へのリフトは，正則はめ込みで $\mathbf{H_2}(\mathbb{C}^{\boldsymbol{n}})$ の正則接触構造に関してルジャンドル部分多様体になる．逆にルジャンドル部分多様体を射影することにより全複素部分多様体が得られる．

<u>左側のファイブレーションについて</u>： $\mathbb{C}\boldsymbol{S}^{\boldsymbol{n-3}}$ の複素超曲面の単位法ベクトル場により $\mathbf{H_2}(\mathbb{C}^{\boldsymbol{n}})$ への正則はめ込みが定まり，正則接触構造に関してルジャンドル部分多様体になる．

ルジャンドル部分多様体の接触幾何学の視点から複素球面 $\mathbb{C}\boldsymbol{S}^{n-3}$ の複素超曲面について論ずることが，Lie 球面幾何学の複素化に相当する幾何学である．

まとめ

$$\text{複素球面の複素超曲面} \;\to\; \mathbf{H_2}(\mathbb{C}^{\boldsymbol{n}}) \text{ のルジャンドル部分多様体}$$

$$\leftrightarrow\; \widetilde{\mathbf{Gr}}_{\mathbf{4}}(\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}) \text{ の全複素部分多様体}$$

本講演の主結果：

$\mathbf{H_2}(\mathbb{C}^{\boldsymbol{n}})$ のルジャンドル部分多様体について，Lie 球面幾何学の複素化の視点より，

○ 曲率球の導入

○ デュパンサイクライドの決定

本講演の構成：

§1 $\mathbf{H_2}(\mathbb{C}^{\boldsymbol{n}})$ の幾何

§2 複素リーマン幾何

§3 Lie 球面幾何学の複素化

§1 $\mathbf{H_2}(\mathbb{C}^{n})$ の幾何

$\mathbf{H_2}(\mathbb{C}^{n})$ の正則接触構造，ルジャンドル部分多様体

$\mathbb{C}^{n}$: 複素ベクトル空間

$\langle\ ,\ \rangle$: $\mathbb{C}^{n}$ の標準的な複素内積．即ち

$$\langle z, w\rangle = \sum_{i=1}^{n} z_i w_i \qquad z, w \in \mathbb{C}^{n}$$

$W \subset \mathbb{C}^{n}$:複素部分空間．　W の任意のベクトル u, v に対して，　$\langle u, v\rangle = 0$ が成り立つとき，W を**等方的部分空間(isotropic subspace)**　という．

$\mathbf{Gr_2}(\mathbb{C}^{\boldsymbol{n}})$ $(\boldsymbol{n} \geq \mathbf{6}\ )$: $\mathbb{C}^{\boldsymbol{n}}$ の複素 $\mathbf{2}$ 次元部分空間全体のなす複素グラスマン多様体, (複素) $\mathbf{2}(\boldsymbol{n}-\mathbf{2})$ 次元複素多様体.

$\mathbf{H_2}(\mathbb{C}^{\boldsymbol{n}})$: $\mathbf{2}$ 次元等方的部分空間全体のなす集合, $\mathbf{Gr_2}(\mathbb{C}^{\boldsymbol{n}})$ の（複素）余次元 $\mathbf{3}$ の複素部分多様体

$\boldsymbol{SO}(\boldsymbol{n}, \mathbb{C})$: 複素内積 $\langle\ ,\ \rangle$ を保つ $\mathbb{C}^{\boldsymbol{n}}$ の複素線形変換で行列式 $\mathbf{1}$ となるもの全体のなす複素 Lie 群

$\boldsymbol{SO}(\boldsymbol{n}, \mathbb{C})$ は $\mathbf{Gr_2}(\mathbb{C}^{\boldsymbol{n}})$ に複素Lie 変換群として作用する．$\mathbf{H_2}(\mathbb{C}^{\boldsymbol{n}})$ はこの作用で不変である．さらに，$\boldsymbol{SO}(\boldsymbol{n}, \mathbb{C})$ は $\mathbf{H_2}(\mathbb{C}^{\boldsymbol{n}})$ に推移的に作用する.

$\underline{\mathbf{H_2}(\mathbb{C}^{\boldsymbol{n}})}$ の幾何学を複素ベクトル束を用いて論ずる.

$\underline{\mathbb{C}^{\boldsymbol{n}}} = \mathbf{Gr_2}(\mathbb{C}^{\boldsymbol{n}}) \times \mathbb{C}^{\boldsymbol{n}}$: $\mathbf{Gr_2}(\mathbb{C}^{\boldsymbol{n}})$ 上の自明束,

$\boldsymbol{E} \subset \underline{\mathbb{C}^{\boldsymbol{n}}}$: **同語反復部分束 (tautological bundle)** とする. 即ち

$$\boldsymbol{E} = \{(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{v}) \in \mathbf{Gr_2}(\mathbb{C}^{\boldsymbol{n}}) \times \mathbb{C}^{\boldsymbol{n}} \mid \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{e}\}$$

$\underline{\mathbb{C}^{\boldsymbol{n}}}/\boldsymbol{E}$: 商ベクトル束， $\boldsymbol{\pi_E} : \underline{\mathbb{C}^{\boldsymbol{n}}} \to \underline{\mathbb{C}^{\boldsymbol{n}}}/\boldsymbol{E}$: 射影

$\mathbf{Hom}_{\mathbb{C}}(\boldsymbol{E}, \underline{\mathbb{C}^{\boldsymbol{n}}}/\boldsymbol{E})$: 各ファイバーにおける複素線形写像からなる複素ベクトル束.

$\boldsymbol{T}\mathbf{Gr_2}(\mathbb{C}^{\boldsymbol{n}}) \cong \mathbf{Hom}_{\mathbb{C}}(\boldsymbol{E}, \underline{\mathbb{C}^{\boldsymbol{n}}}/\boldsymbol{E})$: 複素ベクトル束として同型

多様体 $\boldsymbol{M}$ から $\mathbf{Gr_2}(\mathbb{C}^{\boldsymbol{n}})$ への写像 $\boldsymbol{f}$ 及びその微分 $\boldsymbol{df}$ を ベクトル束の言葉で記述する：

$$\begin{array}{ccc} \text{写像} & & \text{部分ベクトル束} \\ \boldsymbol{f : M \to \mathbf{Gr_2}(\mathbb{C}^n)} & \leftrightarrow & \boldsymbol{E \subset \underline{\mathbb{C}^n} = M \times \mathbb{C}^n} \end{array}$$

$\boldsymbol{df}$ には次の実線形写像が対応する：

$$\boldsymbol{df : TM \to \mathbf{Hom}_{\mathbb{C}}(E, \underline{\mathbb{C}^n}/E)}$$

包含写像 $\boldsymbol{\iota : \mathbf{H_2}(\mathbb{C}^n) \to \mathbf{Gr_2}(\mathbb{C}^n)}$ に適用する.

接ベクトル空間 $\boldsymbol{T_e\mathbf{H_2}(\mathbb{C}^n)}$ の記述:

$$\boldsymbol{T_e\mathbf{H_2}(\mathbb{C}^n) = \{\phi \in \mathbf{Hom}_{\mathbb{C}}(e, \mathbb{C}^n/e) \mid \langle\phi(u), v\rangle + \langle u, \phi(v)\rangle = 0,\ u, v \in e\}}$$

正則接触構造の導入: 複素余次元 $\mathbf{1}$ の接分布 $\boldsymbol{\mathcal{D}}$ を次のように定める：

$\boldsymbol{e} \in \mathrm{H}_2(\mathbb{C}^n)$ で

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_e &= \{\phi \in T_e\mathrm{H}_2(\mathbb{C}^n) \mid \langle \phi(u), v\rangle = 0,\ u, v \in e\} \\ &= \{\phi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(e, \mathbb{C}^n/e) \mid \langle \phi(u), v\rangle = 0,\ u, v \in e\} \end{aligned}$$

$\boldsymbol{\mathcal{D}}$ は $SO(n, \mathbb{C})$ の作用で不変.

命題 1.1 $\boldsymbol{\mathcal{D}}$ は $\mathrm{H}_2(\mathbb{C}^n)$ の正則接触構造となる．また， $SO(n, \mathbb{C})$ は接触構造を保つ変換として作用する.

$SO(n, \mathbb{C})$ の作用による $\mathrm{H}_2(\mathbb{C}^n)$ の変換群を **Lie 接触変換群**とよぶ.

正則接触構造 $\boldsymbol{\mathcal{D}}$ に関する $\mathbf{H_2}(\mathbb{C}^{\boldsymbol{n}})$ のルジャンドル部分多様体について考える.

$\boldsymbol{M}$ を複素多様体とし, その正則はめ込み(holomorphic immersion)

$\boldsymbol{\lambda} : \boldsymbol{M} \to \mathbf{H_2}(\mathbb{C}^{\boldsymbol{n}})$ が $\boldsymbol{\mathcal{D}}$ の積分多様体となるもの

そのようなはめ込まれた複素多様体で最大次元 $(\frac{1}{2}\dim \boldsymbol{\mathcal{D}}\ )$ となるものがルジャンドル部分多様体.

ここで議論されている設定では,

$$\dim \boldsymbol{M} = \frac{1}{2}\dim \boldsymbol{\mathcal{D}} = \frac{1}{2}(\dim \mathbf{H_2}(\mathbb{C}^{\boldsymbol{n}}) - 1) = \boldsymbol{n} - 4.$$

ルジャンドル部分多様体の自然な例 3つ.

例 1.2 (1) 複素2次超曲面 $\boldsymbol{Q^{n-2}}$:

$$\boldsymbol{Q^{n-2} = \{[z] \in \mathbb{C}P^{n-1} \mid z \in \mathbb{C}^n - \{0\}, \quad \langle z, z\rangle = 0\}}$$

$\boldsymbol{\kappa \in Q^{n-2}}$ に対し,

$$\boldsymbol{Q(\kappa) = \{W \in \mathrm{H}_2(\mathbb{C}^n) \mid W \supset \kappa\}}$$

とおく. $\boldsymbol{Q(\kappa)}$ は $\boldsymbol{n-4}$ 次元複素2次超曲面に正則同型. $\boldsymbol{\mathrm{H}_2(\mathbb{C}^n)}$ のルジャンドル部分多様体.

例 1.2 (2) $\boldsymbol{V \subset \mathbb{C}^n}$: 非退化部分空間，$\boldsymbol{V^\perp}$: $\boldsymbol{V}$ の直交補空間

$\mathbf{dim}\,\boldsymbol{V = r+2}$, $\mathbf{dim}\,\boldsymbol{V^\perp = s+2}$ $\boldsymbol{(r, s \geq 1}$, $\boldsymbol{r+s = n-4)}$ とする.

$\boldsymbol{P(V), P(V^\perp)}$ を $\boldsymbol{V, V^\perp}$ の射影空間とし，複素２次超曲面 $\boldsymbol{Q^r, Q^s}$ を次で定める：

$$\boldsymbol{\begin{aligned} Q^r &= P(V) \cap Q^{n-2} = \{[z] \in P(V) \mid \langle z, z \rangle = 0\} \\ Q^s &= P(V^\perp) \cap Q^{n-2} = \{[w] \in P(V^\perp) \mid \langle w, w \rangle = 0\}. \end{aligned}}$$

正則写像 $\boldsymbol{\lambda : Q^r \times Q^s \to \mathrm{H}_2(\mathbb{C}^n)}$ を次で定める：

$$\boldsymbol{\lambda([z], [w]) = \{z, w\}_{\mathbb{C}}}\,.$$

$\boldsymbol{\lambda}$ はルジャンドル埋め込みである.

例 1.2 (3) $\boldsymbol{V}$: $\mathbb{C}^{\boldsymbol{2m}}$ の $\underline{\boldsymbol{m}\ \text{次元等方的部分空間}}$

$\boldsymbol{V}$ の任意の複素 $\mathbf{2}$ 次元部分空間は $\mathbf{H_2}(\mathbb{C}^{\boldsymbol{2m}})$ の元である

$\mathbf{Gr_2}(\boldsymbol{V})$: $\boldsymbol{V}$ の複素 $\mathbf{2}$ 次元部分空間全体のなす複素グラスマン多様体

埋め込み $\boldsymbol{\lambda} : \mathbf{Gr_2}(\boldsymbol{V}) \to \mathbf{H_2}(\mathbb{C}^{\boldsymbol{2m}})$ はルジャンドル部分多様体になる.

§2 複素リーマン幾何

$\langle$ 複素リーマン多様体 $\rangle$

複素多様体 $\boldsymbol{M}$ 上 正則 $(\mathbf{0},\mathbf{2})$ 型対称テンソル場 $\boldsymbol{g}$ が各点で非退化な複素内積を定める時，**正則リーマン計量**と呼ばれる．正則リーマン計量 $\boldsymbol{g}$ を備えた複素多様体 $(\boldsymbol{M},\boldsymbol{g})$ を**複素リーマン多様体** という (cf. Lebrun 1983).

複素座標系 $\boldsymbol{z_1,\cdots,z_m}$ のもとでの表示 : $\boldsymbol{g} = \displaystyle\sum_{i,j=1}^{m} \boldsymbol{g_{ij} dz_i \otimes dz_j}$, ここで，$\boldsymbol{g_{ij}}$ は正則関数，即ち $\bar{\boldsymbol{\partial}}\boldsymbol{g_{ij}} = \mathbf{0}$，また 非退化性により $\mathbf{det}\,(\boldsymbol{g_{ij}}) \neq \mathbf{0}$.

$\boldsymbol{g}_{\mathbb{R}}$： 正則リーマン計量 $\boldsymbol{g}$ の実部． $\boldsymbol{g}_{\mathbb{R}}$ は符号数 $(\boldsymbol{m},\boldsymbol{m})$ をもつ擬リーマン計量で， $\boldsymbol{g}_{\mathbb{R}}(\boldsymbol{JX},\boldsymbol{JY}) = -\boldsymbol{g}_{\mathbb{R}}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$ をみたし($\boldsymbol{J}$ は $\boldsymbol{M}$ の複素構造)

さらに， $\boldsymbol{\nabla}$ を $\boldsymbol{g}_{\mathbb{R}}$ の擬リーマン接続とすると $\boldsymbol{\nabla J = 0}$ をみたす.

このような計量は**アンチ-ケーラー計量**と呼ばれている．アンチ-ケーラー多様体に関する興味深い研究（cf. A.Borowiec et al 2000,N.Koike 2014).

複素リーマン多様体に対して，(実) リーマン幾何学とほぼ同じ基礎理論が展開.

適合する接続(正則アファイン接続)の存在

$\Downarrow$

様々な幾何学的諸量や概念の導入
曲率テンソル，測地線など

$\Downarrow$

幾何学の展開

⟨ 複素リーマン多様体の複素部分多様体論 ⟩

$(\tilde{M}, \tilde{g})$： 複素リーマン多様体

$f : M \to \tilde{M}$： 複素多様体 M から $\tilde{M}$ への正則はめ込み

M の各点 p で，$df(T_pM)$ が $\tilde{g}$ に関して非退化部分空間になっているとき，**非退化部分多様体** という.

この設定で（実）リーマン部分多様体論と同様に，

第２基本形式，**型作用素**などの概念が定義され，**ガウス**，**ワインガルテンの公式**，部分多様体の基本方程式として**ガウス方程式**，**コダッチ方程式**，**リッチ方程式**が導かれる.

〈 **複素球面** 〉

複素ベクトル空間 $\mathbb{C}^{n-2}$ ： 同一視 $T_z\mathbb{C}^{n-2} = \mathbb{C}^{n-2}$ のもと，標準的な複素内積 $\langle\ ,\ \rangle$ から定まる正則リーマン計量 $\displaystyle\sum_{i=1}^{n-2} dz_i \otimes dz_i$ を考える.

$\mathbb{C}^{n-2}$ の超曲面

$$\mathbb{C}S^{n-3} = \left\{ z \in \mathbb{C}^{n-2} \mid \langle z, z\rangle = 1 \right\} : \quad \textbf{複素球面}$$

$z \in \mathbb{C}S^{n-3}$ における $\mathbb{C}S^{n-3}$ の接ベクトル空間

$$T_z\mathbb{C}S^{n-3} = \left\{ X \in T_z\mathbb{C}^{n-2} = \mathbb{C}^{n-2} \mid \langle X, z\rangle = 0 \right\}$$

直交直和分解　　$\mathbb{C}^{n-2} = T_z\mathbb{C}S^{n-3} + \mathbb{C}z$

従って，$\mathbb{C}S^{n-3}$ は $\mathbb{C}^{n-2}$ の非退化部分多様体であり，誘導計量に関して複素リーマン多様体．原点からの位置ベクトル z は z での単位法ベクトル.

誘導計量に適合する正則アファイン接続の曲率テンソル $\boldsymbol{R}$ は

$$\boldsymbol{R(X,Y)Z = \langle Y,Z\rangle X - \langle X,Z\rangle Y}, \qquad \boldsymbol{X,Y,Z \in T_z}\mathbb{C}\boldsymbol{S^{n-3}}$$

$\mathbb{C}\boldsymbol{S^{n-3}}$ の単位接ベクトル束 $\boldsymbol{S(T}\mathbb{C}\boldsymbol{S^{n-3})}$: $\mathbb{C}^{\boldsymbol{n-2}} \times \mathbb{C}^{\boldsymbol{n-2}}$ の余次元 $\boldsymbol{3}$ の複素部分多様体

$$\boldsymbol{S(T}\mathbb{C}\boldsymbol{S^{n-3})} = \left\{ \boldsymbol{(z,\xi)} \in \mathbb{C}^{\boldsymbol{n-2}} \times \mathbb{C}^{\boldsymbol{n-2}} \;\middle|\; \boldsymbol{\langle z,z\rangle = 1, \langle \xi,\xi\rangle = 1, \langle z,\xi\rangle = 0} \right.$$

$\boldsymbol{S(T}\mathbb{C}\boldsymbol{S^{n-3})}$ の余次元 $\boldsymbol{1}$ の接分布 $\boldsymbol{\mathcal{D}}$ を

$$\boldsymbol{\mathcal{D}_{(z_0,\xi_0)}} = \left\{ \boldsymbol{X \in T_{(z_0,\xi_0)}S(T}\mathbb{C}\boldsymbol{S^{n-3})} \;\middle|\; \boldsymbol{\langle dz(X), \xi_0\rangle = 0} \right\}$$

で定めると， $\boldsymbol{\mathcal{D}}$ は $\boldsymbol{S(T}\mathbb{C}\boldsymbol{S^{n-3})}$ の正則接触構造になる．

$(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{\xi}) \in \boldsymbol{S}(\boldsymbol{T}\mathbb{C}\boldsymbol{S}^{\boldsymbol{n-3}})$ に対して，$\left\{{}^t(\boldsymbol{z}, \sqrt{-1}, 0), {}^t(\boldsymbol{\xi}, 0, \sqrt{-1})\right\}_{\mathbb{C}}$ は $\mathbb{C}^{\boldsymbol{n}}$ の等方的部分空間.

$$\begin{array}{rlrl} \psi: & \boldsymbol{S}(\boldsymbol{T}\mathbb{C}\boldsymbol{S}^{\boldsymbol{n-3}}) & \ni & (\boldsymbol{z}, \boldsymbol{\xi}) \\ & \mapsto & & \left\{{}^t(\boldsymbol{z}, \sqrt{-1}, 0), {}^t(\boldsymbol{\xi}, 0, \sqrt{-1})\right\}_{\mathbb{C}} \in \mathbf{H}_2(\mathbb{C}^{\boldsymbol{n}}) \end{array}$$

命題 2.1 ψ は $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{T}\mathbb{C}\boldsymbol{S}^{\boldsymbol{n-3}})$ から $\mathbf{H}_2(\mathbb{C}^{\boldsymbol{n}})$ の開部分多様体への正則同型写像である．さらに正則接触構造を保つ.

$\langle$ 複素球面の超曲面から $\mathbf{H}_2(\mathbb{C}^n)$ へのルジャンドルはめ込みの構成 $\rangle$

$\boldsymbol{M}$ を $\boldsymbol{n-4}$ 次元複素多様体，$\boldsymbol{\varphi : M \to \mathbb{C}S^{n-3}}$ を非退化超曲面はめ込みとする．このとき，単位法ベクトル束 $\boldsymbol{S(T^{\perp}M)}$ から $\boldsymbol{M}$ への射影は $\boldsymbol{2}$ 重被覆になっている．連続な単位法ベクトル場 $\boldsymbol{\xi}$ がとれると仮定する．
このとき

$$\boldsymbol{\hat{\varphi} = (\varphi, \xi) : M \to \mathbb{C}^{n-2} \times \mathbb{C}^{n-2}}$$

とおく． $\boldsymbol{\hat{\varphi}}$ は単位接ベクトル束 $\boldsymbol{S(T\mathbb{C}S^{n-3})}$ への正則はめ込みになる．さらにルジャンドルはめ込みである．

$\psi : S(T\mathbb{C}S^{n-3}) \to \mathbf{H}_2(\mathbb{C}^n)$ ： 中への正則同型写像，　このとき，

$\psi \circ \hat{\varphi} : M \to \mathbf{H}_2(\mathbb{C}^n)$:ルジャンドルはめ込み.

ルジャンドル部分多様体の接触幾何学の視点から複素球面 $\mathbb{C}S^{n-3}$ の複素超曲面について論ずることが，Lie 球面幾何学の複素化に相当する幾何学.

特に，接触変換群 $SO(n, \mathbb{C})$ の作用で不変な幾何学.

課題

$\mathbb{C}S^{n-3}$ の複素超曲面の例の構成とそれらに対応する $\mathbf{H}_2(\mathbb{C}^n)$ のルジャンドル部分多様体，$\widetilde{\mathbf{Gr}}_4(\mathbb{R}^n)$ の全複素部分多様体の幾何学的性質の解明

(実) 単位球面 S^m の超曲面の “複素化 ”

例えば 等質超曲面 ： 半単純擬リーマン対称空間　G/H の複素化 $G^{\mathbb{C}}/H^{\mathbb{C}}$ のイソトロピー表現の軌道（cf. Hahn, N.Koike）

（初歩的例）**超球面の構成**: $\boldsymbol{p} = {}^t(\boldsymbol{p_1}, \cdots, \boldsymbol{p_{n-2}}) \in \mathbb{C}^{n-2}$, $(\boldsymbol{p} \neq \boldsymbol{0})$, $\boldsymbol{c} \in \mathbb{C}$ に対して，$\mathbb{C}\boldsymbol{S}^{n-3}$ の超曲面を次で定める：

$$\boldsymbol{M} = \left\{ \boldsymbol{z} \in \mathbb{C}\boldsymbol{S}^{n-3} \mid \langle \boldsymbol{p}, \boldsymbol{z} \rangle = \boldsymbol{c} \right\}$$

$\boldsymbol{M}$ が非退化超曲面になるための必要十分条件は $\langle \boldsymbol{p}, \boldsymbol{p} \rangle \neq \boldsymbol{c}^2$.

このとき，$\boldsymbol{M}$ には連続な単位法ベクトル場 $\boldsymbol{\zeta}$ を定めることができ，$\boldsymbol{\zeta}$ に関する型作用素 $\boldsymbol{A_\zeta}$ は $\boldsymbol{A_\zeta} = \boldsymbol{\lambda}\mathbf{id}$ ($\boldsymbol{\lambda}$ は複素定数) をみたす.

このような型作用素をもつ非退化超曲面を**超球面**と呼ぶ.

上の事実を受けて次のような超球面を考える：

Case 1. $\langle \boldsymbol{p}, \boldsymbol{p} \rangle = \boldsymbol{1}$, $\boldsymbol{\rho} \in \mathbb{C}$, $\boldsymbol{\rho} \neq \boldsymbol{m\pi}$ $(\boldsymbol{m} \in \mathbb{Z})$ に対し，

$$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{\rho}) = \left\{ \boldsymbol{z} \in \mathbb{C}\boldsymbol{S}^{n-3} \mid \langle \boldsymbol{p}, \boldsymbol{z} \rangle = \cos \boldsymbol{\rho} \right\}$$

単位法ベクトル場 $\boldsymbol{\zeta} = \frac{1}{\sin \boldsymbol{\rho}}(\boldsymbol{p} - \cos \boldsymbol{\rho}\ \boldsymbol{z})$. このとき，主曲率は $\cot \boldsymbol{\rho} = \frac{\cos \boldsymbol{\rho}}{\sin \boldsymbol{\rho}}$.

Case 2. $\langle \boldsymbol{p}, \boldsymbol{p} \rangle = \mathbf{0}$ $(\boldsymbol{p} \neq \mathbf{0})$ に対し，

$$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{p}, \mathbf{1}, +) = \left\{ \boldsymbol{z} \in \mathbb{C}\boldsymbol{S}^{\boldsymbol{n}-\mathbf{3}} \mid \ \langle \boldsymbol{p}, \boldsymbol{z} \rangle = \mathbf{1} \ \right\}$$

単位法ベクトル場 $\boldsymbol{\zeta} = \sqrt{-\mathbf{1}}(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{z})$．このとき，主曲率は $\sqrt{-\mathbf{1}}$.

Case 2 については誘導計量は平坦，ホロ球面に相当する．超球面はこれらで尽くされる．超球面は Lie 球面幾何学を展開する上での基本図形になっている．

これらの超球面のルジャンドルはめ込み $\boldsymbol{\psi} \circ \hat{\boldsymbol{\varphi}} : \boldsymbol{M} \to \mathbf{H}_{\mathbf{2}}(\mathbb{C}^{\boldsymbol{n}})$

$\Rightarrow$ 例 1.2 (1) 複素２次超曲面 $\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{\kappa})$ の開部分集合

§3 Lie 球面幾何学の複素化

例 1.2 (1) の特徴付け

命題 3.1 $\boldsymbol{\lambda : M \to \mathrm{H}_2(\mathbb{C}^n)}$ を $\boldsymbol{n-4\ (\geq 2)}$ 次元複素多様体 $\boldsymbol{M}$ からのルジャンドルはめ込みとする．$\boldsymbol{E}$ を同語反復部分束を引き戻すことにより定まる自明束 $\boldsymbol{\underline{\mathbb{C}^n} = M \times \mathbb{C}^n}$ の正則部分ベクトル束とする．$\boldsymbol{E}$ の正則直線部分束 $\boldsymbol{K}$ で次の条件をみたすものが存在すると仮定する：$\boldsymbol{M}$ の任意の点 $\boldsymbol{p}$, 任意の接ベクトル $\boldsymbol{X \in T_pM}$ に対し，$\boldsymbol{d\lambda(X)k = 0}$, $\boldsymbol{k \in K_p}$ が成立する．ここで，$\boldsymbol{d\lambda(X)}$ を $\boldsymbol{\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(E, \underline{\mathbb{C}^n}/E)}$ の元として捉えている．このとき，正則直線部分束 $\boldsymbol{K}$ の定める複素 $\boldsymbol{2}$ 次超曲面 $\boldsymbol{Q^{n-2}}$ への写像は定値である．その像となる $\boldsymbol{Q^{n-2}}$ の点を $\boldsymbol{\kappa}$ とすると, $\boldsymbol{\lambda}$ の像は $\boldsymbol{Q(\kappa)}$ の開部分多様体になる．

命題 3.1 を受け，(実)Lie 球面幾何学の理論に倣い，ルジャンドル部分多様体に対して曲率球を導入する（cf. [1],[2]）.

定義 3.2 $\boldsymbol{\lambda} : \boldsymbol{M} \to \mathrm{H}_2(\mathbb{C}^{\boldsymbol{n}})$ を $\boldsymbol{n-4}$ 次元複素多様体 $\boldsymbol{M}$ からのルジャンドルはめ込みとし，$\boldsymbol{p}$ を $\boldsymbol{M}$ の点とする．$\boldsymbol{0}$ でない $\boldsymbol{k} \in \boldsymbol{\lambda(p)}$ に対し，$\boldsymbol{0}$ でない接ベクトル $\boldsymbol{X} \in \boldsymbol{T_pM}$ で $\boldsymbol{d\lambda(X)k = 0}$ をみたすものが存在するとき，$[\boldsymbol{k}] \in \boldsymbol{Q^{n-2}}$ を点 $\boldsymbol{p}$ での $\boldsymbol{\lambda}$ の**曲率球 (curvature sphere)** といい，$\boldsymbol{X}$ を $[\boldsymbol{k}]$ に対応する**曲率方向 (a direction of curvature)** という．曲率方向となる接ベクトルのなす部分空間の次元を曲率球 $[\boldsymbol{k}]$ の重複度という.

注:ここでは，$\boldsymbol{Q^{n-2}}$ の元 $\boldsymbol{\kappa}$ と複素 $\boldsymbol{2}$ 次超曲面 $\boldsymbol{Q(\kappa)}$ との同一視のもと曲率球という用語を用いている.

各点 $\boldsymbol{p}$ での曲率球について次のいずれかが成り立つ：

Case 1. 高々 $\boldsymbol{n-4}$ 個の異なる曲率球が存在する.

Case 2. すべての $\boldsymbol{k} \in \boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{p})$ について $[\boldsymbol{k}] \in \boldsymbol{Q}^{\boldsymbol{n-2}}$ は曲率球である.

Case 2 は(実)Lie 球面幾何学では起こらない現象である.

Case 2 の例：**例 1.2** (3) $\mathbf{Gr}_{\mathbf{2}}(\boldsymbol{V})$

曲率球の概念は Lie 接触変換群の作用で不変である．即ち，次が成立する.

命題 3.3 $\boldsymbol{\lambda} : \boldsymbol{M} \to \mathbf{H}_{\mathbf{2}}(\mathbb{C}^{\boldsymbol{n}})$ をルジャンドルはめ込みとし，$\boldsymbol{P}$ を $\boldsymbol{SO}(\boldsymbol{n}, \mathbb{C})$ の元とする．$[\boldsymbol{k}] \in \boldsymbol{Q}^{\boldsymbol{n-2}}$ を点 $\boldsymbol{p}$ での $\boldsymbol{\lambda}$ の曲率球とする．このとき，$\boldsymbol{P}[\boldsymbol{k}]$ はルジャンドルはめ込み $\boldsymbol{P\lambda}$ の点 $\boldsymbol{p}$ での曲率球である．また，$[\boldsymbol{k}], \boldsymbol{P}[\boldsymbol{k}]$ に対応する曲率方向は一致する.

曲率球の性質に着目したルジャンドル部分多様体の特徴付けの問題

命題 3.1 : **重複度 $n-4$ $(=\dim M)$ の唯1つの曲率球**をもつルジャンドル部分多様体の決定

相異なる曲率球を2つもつ場合 ?

（実）Lie 球面幾何学では（追加の条件も課され）**デュパンサイクライド(a cyclide of Dupin)** と呼ばれている対象（cf. [1],[2]）. （実）Lie 球面幾何学の枠組みで Pinkall によって決定されている ([2], Theorem 3).

複素版を考える．デュパンサイクライドの定義：

$\lambda : M \to \mathrm{H}_2(\mathbb{C}^n)$ を $n-4$ 次元複素多様体 M からのルジャンドルはめ込みとする．λ が次の条件 (i),(ii),(iii) をみたすとき，特性数 (r,s) のデュパンサイクライドという：

(i) M の各点で ちょうど 2 つの曲率球 $[k_1],[k_2]$ をもち，それぞれの重複度は r,s，$(r+s=n-4)$．さらに，各 $[k_i]$ $(i=1,2)$ は M から ２次超曲面 Q^{n-2} への正則写像を定めているとする．

(ii) T_i $(i=1,2)$ を各曲率球 $[k_i]$ の曲率方向ベクトルからなる接分布とする．(i) の仮定のもと，T_i は完全積分可能である．

(iii) 各 i $(i=1,2)$ について，T_i の積分多様体上 曲率球 $[k_i]$ は一定である．

例 1.2 (2) は特性数 (s,r) のデュパンサイクライドである．（実）Lie 球面幾何学の場合と同様に $\mathrm{H}_2(\mathbb{C}^n)$ のデュパンサイクライドの分類を得る．

定理 3.4 (1) 特性数 $(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{r})$ の連結デュパンサイクライド $\boldsymbol{\lambda} : \boldsymbol{M} \rightarrow \mathbf{H_2}(\mathbb{C}^{\boldsymbol{n}})$ の像は例 1.2 (2) で示されたデュパンサイクライドに含まれる．

(2) 同じ特性数をもつ $\mathbf{2}$ つのデュパンサイクライドは，局所的に Lie 接触変換で移り合う．

[1] T.E.Cecil : *Lie sphere geometry*, 2nd edn, Springer, New York,2008

[2] U.Pinkall : *Dupin hypersurfaces*, Math.Ann. 270(1985),427-440

[3] 塚田 和美 : *Lie* **球面幾何学の複素化と実グラスマン多様体の全複素部分多様体**, 数理解析研究所講究録 2210（2022）,104-122