

F -Yang-Mills 接続の不安定性について

馬場 蔵人（東京理科大学）*

概要

Riemann 多様体上の主ファイバー束が定める接続に対して F -Yang-Mills 接続の概念が定義される．この概念は Yang-Mills 接続, p -Yang-Mills 接続, 指数的 Yang-Mills 接続の拡張となっている．本稿では F -Yang-Mills 接続の不安定性について得られた結果, すなわち, Simons (1977) によって与えられた標準球面上の Yang-Mills 接続の不安定性に関する結果を F -Yang-Mills 接続の場合に拡張したものを与える．本研究は新谷一翔氏との共同研究 (arXiv:2301.0429) に基づく．

1 導入

任意の Riemann 多様体上の主ファイバー束の接続の空間には Yang-Mills 汎関数やいくつかの Yang-Mills 型汎関数が導入され, そのような汎関数の臨界点（接続）が研究されてきた．本研究では Dong-Wei ([6]) によって導入された F -Yang-Mills 汎関数およびその臨界点である F -Yang-Mills 接続を扱う．ここで, F は区間 $[0, \infty)$ 上で定義された非負値, 単調増加な C^2 級関数とする． F -Yang-Mills 汎関数は, Yang-Mills 汎関数, p -Yang-Mills 汎関数 ([5]), 指数 Yang-Mills 汎関数 ([14]) の一般化として知られている．

通常の Yang-Mills 接続の理論には多くの研究結果があり, 本研究と密接に関連するのは Yang-Mills 接続に関する不安定性定理 (Simons [16], Kobayashi-Ohnita-Takeuchi [10]) である． F -Yang-Mills 接続の研究は, Yang-Mills 接続に関する結果を拡張することによって進展してきた ([5], [8])．本研究の目的は Simons や Kobayashi-Ohnita-Takeuchi による Yang-Mills 接続の不安定性に関する結果を F -Yang-Mills 接続へ拡張することである．Simons ([16]) は $n > 4$ ならば標準球面 S^n 上で非平坦な Yang-Mills 接続が不安定であることを示した．この結果の F -Yang-Mills 接続に拡張として次を得た：

定理 1.1 ([3, Corollary 4.12]). 次で定義される F の微分 F' の次数 $d_{F'}$ が有限であると仮定する：

$$d_{F'} = \sup_{t \in [0, \infty)} \frac{tF''(t)}{F'(t)}. \quad (1.1)$$

このとき,

$$n > 4d_{F'} + 4, \quad (1.2)$$

ならば, n 次元標準球面 S^n 上の任意の非平坦な F -Yang-Mills 接続は不安定である．

*E-mail: kurando.baba@rs.tus.ac.jp
研究集会「部分多様体幾何とリー群作用 2023～小池直之先生還暦記念研究集会～」

この定理から F -Yang-Mills 接続の不安定性の Simons 型定理を導く上で次数 $d_{F'}$ の有限性の重要性が見てとれる. Yang-Mills 接続 ($F(t) = t$) の場合では $d_{F'} = 0$ となり, 不等式 (1.2) は $n > 4$ となる. よって, 定理 1.1 は Simons のものと一致する. さらに, 定理 1.1 は Chen-Zhou ([5]) による p -Yang-Mills 接続の不安定性定理の一般化にもなっている. 指数関数的 Yang-Mills 接続 ($F(t) = \exp(t)$) の場合は次数 $d_{F'}$ は無限となるのでこの定理は適用できないが, 指数関数的 Yang-Mills 接続の不安定性に関する次のような結果を得た:

定理 1.2 ([3, Proposition 4.14]). $n > 4$ とする. S^n 上の非平坦な指数関数的 Yang-Mills 接続 ∇ に対して, 曲率 R^∇ の (2.4) で定義されるノルムが次の不等式を満たすならば, ∇ は不安定である:

$$\|R^\nabla\| < \sqrt{\frac{n-4}{2}}. \quad (1.3)$$

本稿の構成: 2節では F -Yang-Mills 接続の基本的な内容についてまとめた. 3節は定理 1.1 と定理 1.2 の証明の概要について説明した. 4節では今後の問題について説明した.

2 F -Yang-Mills 接続

M を向きづけられた連結閉 Riemann 多様体とする. G はコンパクト Lie 群でその Lie 環を $\mathfrak{g}$ で表す. G の随伴表現を $\text{Ad}: G \rightarrow \text{GL}(\mathfrak{g})$ で表す. P を M 上の主ファイバー束で構造群が G であるものとする. $X \in \mathfrak{g}$ が生成する P 上の基本ベクトル場を $\hat{X}$ で表す. P 上の Ad 型の $\mathfrak{g}$ に値をもつ 1 形式 A で任意の $X \in \mathfrak{g}$ に対して $A(\hat{X}) = X$ を満たすものを P 上の接続 (もしくは接続 1 形式) とよぶ. P の随伴束を $\mathfrak{g}_P$ で表す:

$$\mathfrak{g}_P = P \times_{\text{Ad}} \mathfrak{g} = (P \times \mathfrak{g})/G. \quad (2.1)$$

非負整数 k に対して, $\Omega^k(\mathfrak{g}_P) = \Lambda^k T^*M \otimes \mathfrak{g}_P$ と書く. P 上の各接続は $\mathfrak{g}_P$ 上の接続を導く. これはまた $\Omega^k(\mathfrak{g}_P)$ 上の接続も導く. $\mathfrak{g}_P$ 上の接続の全体からなる集合 $\mathcal{C}$ は, 付随するベクトル空間が $\Omega^1(\mathfrak{g}_P)$ である (無限次元の) アフィン空間となる. $\mathcal{C}$ の各点における接空間は自然に $\Omega^1(\mathfrak{g}_P)$ と同型となる.

∇ を $\mathfrak{g}_P$ 上の接続とする. ∇ の曲率 2 形式 R^∇ は $\Omega^2(\mathfrak{g}_P)$ の元となる. ∇ に関する共変外微分 $d^\nabla: \Omega^k(\mathfrak{g}_P) \rightarrow \Omega^{k+1}(\mathfrak{g}_P)$ は次のように与えられる:

$$\begin{aligned} d^\nabla \varphi(X_1, \dots, X_{k+1}) &= \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{i+1} \nabla_{X_i} (\varphi(X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_{k+1})) \\ &\quad + \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \varphi([X_i, X_j], X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, \hat{X}_j, \dots, X_{k+1}). \end{aligned} \quad (2.2)$$

次の等式が成り立つことが知られている:

$$d^\nabla R^\nabla = 0. \quad (2.3)$$

この等式は *Bianchi の恒等式* とよばれる. 一般的に $d^\nabla \circ d^\nabla$ は非零である. $R^\nabla = 0$ ならば $d^\nabla \circ d^\nabla = 0$ となることが示される. 曲率 2 形式が零となる接続は **平坦接続** とよばれる.

$\mathfrak{g}_P$ 上で接続に整合するファイバー計量が $\mathfrak{g}$ 上の不変内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ から導かれる (cf. [7, Proposition 5.9.7]). さらに, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ はベクトル空間 $\Omega^k(\mathfrak{g}_P)$ にも内積を導入し, 同じ記号 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ で表すことにする. $\varphi \in \Omega^k(\mathfrak{g}_P)$ に対して,

$$\|\varphi\|^2 = \langle \varphi, \varphi \rangle \quad (2.4)$$

とする。底空間 M 上で点 x ごとの内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ を積分することで、 $\Omega^k(\mathfrak{g}_P)$ 上には次のような内積が定まる：

$$(\varphi, \psi) = \int_M \langle \varphi, \psi \rangle dv, \quad \varphi, \psi \in \Omega^k(\mathfrak{g}_P). \quad (2.5)$$

ただし、 dv は M の Riemann 体積形式を表す。

定義 2.1 ([6, Definitions 3.1 and 3.2]). $F : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ を非負値、単調増加な C^2 級関数とする。 F -Yang-Mills 汎関数 $\mathcal{YM}_F : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}$ は次で定義される：

$$\mathcal{YM}_F(\nabla) = \int_M F\left(\frac{1}{2}\|R^\nabla\|^2\right)dv. \quad (2.6)$$

F -Yang-Mills 汎関数の臨界点（接続） ∇ は F -Yang-Mills 接続とよばれる。

F -Yang-Mills 接続の具体例を与える。

例 2.2. (i) $F(t) = t$ の場合、 F -Yang-Mills 汎関数は通常の Yang-Mills 汎関数 $\mathcal{YM} : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}$ に一致する：

$$\mathcal{YM}(\nabla) = \frac{1}{2} \int_M \|R^\nabla\|^2 dv, \quad (2.7)$$

これは ∇ の全曲率を意味する。この場合の F -Yang-Mills 接続は Yang-Mills 接続である。

(ii) $p \geq 2$ とする。 $F = F_p : t \mapsto (1/p)(2t)^{p/2}$ としたとき、 F_p -Yang-Mills 接続は p -Yang-Mills 接続である (cf. [5])。明らかに、2-Yang-Mills 接続は Yang-Mills 接続である。

(iii) $F = F_e : t \mapsto \exp(t)$ としたとき、 F_e -Yang-Mills 接続は指数的 Yang-Mills 接続である (cf. [14])。

F -Yang-Mills 汎関数 $\mathcal{YM}_F$ の第 1 変分公式を復習する。 δ^∇ を内積 (2.5) に関する d^∇ の形式的な随伴作用素とする。すなわち、 $\varphi \in \Omega^k(\mathfrak{g}_P)$ および $\psi \in \Omega^{k+1}(\mathfrak{g}_P)$ に対して $(d^\nabla \varphi, \psi) = (\varphi, \delta^\nabla \psi)$ である。

定理 2.3 (第 1 変分公式, [6, Lemma 3.1]). $\nabla \in \mathcal{C}$ とする。 ∇^t を $\mathcal{C}$ 内の C^∞ 級曲線で $\nabla^0 = \nabla$ となるものとする。

$$\alpha = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \nabla^t \in \Omega^1(\mathfrak{g}_P) \quad (2.8)$$

と表す。このとき、次が成り立つ：

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \mathcal{YM}_F(\nabla^t) = \int_M \langle \delta^\nabla (F'(\frac{1}{2}\|R^\nabla\|^2)R^\nabla), \alpha \rangle dv. \quad (2.9)$$

(2.9) を用いると $\nabla \in \mathcal{C}$ が F -Yang-Mills 接続であるための必要十分条件は

$$\delta^\nabla (F'(\frac{1}{2}\|R^\nabla\|^2)R^\nabla) = 0. \quad (2.10)$$

である。この方程式は F -Yang-Mills 方程式とよばれる。例えば、 $F(t) = t$ とすると (2.10) は $\delta^\nabla R^\nabla = 0$ と書き換えられる。これは通常の Yang-Mills 方程式として知られている。

定義 2.4. F -Yang-Mills 接続 ∇ が弱安定であるとは、次の不等式が成り立つときをいう：

$$\left. \frac{d^2}{dt^2} \right|_{t=0} \mathcal{YM}_F(\nabla^t) \geq 0. \quad (2.11)$$

ただし、 ∇^t は $\mathcal{C}$ 内の C^∞ 級曲線で $\nabla^0 = \nabla$ となるものとする。 F -Yang-Mills 接続 ∇ が不安定であるとは、 ∇ が弱安定でないときをいう。

任意の平坦接続 ∇ は弱安定な F -Yang-Mills 接続であることが確かめられる．弱安定な F -Yang-Mills 接続で非平坦なものを見つけることは基本的な問題となる．しかし，本研究では F -Yang-Mills 接続の不安定性を問題にしている．実際，定理 1.1 で述べたように底空間が標準球面である場合，平坦接続のみが弱安定な F -Yang-Mills 接続となる．

F -Yang-Mills 汎関数 $\mathcal{YM}_F$ の第 2 変分公式について説明する． $\mathfrak{R}^\nabla : \Omega^1(\mathfrak{g}_P) \rightarrow \Omega^1(\mathfrak{g}_P)$ を ∇ の Weitzenböck 曲率とする（定義については [4, (3.1)] を参照）． $\mathfrak{R}^\nabla$ は次の関係式を満たすことが示される：

$$\langle \mathfrak{R}^\nabla(\alpha), \alpha \rangle = \langle [\alpha \wedge \alpha], R^\nabla \rangle. \quad (2.12)$$

ただし， $[\cdot \wedge \cdot] : \Omega^1(\mathfrak{g}_P) \times \Omega^1(\mathfrak{g}_P) \rightarrow \Omega^2(\mathfrak{g}_P)$ は

$$[\alpha \wedge \beta](X, Y) = [\alpha(X), \beta(Y)] - [\alpha(Y), \beta(X)], \quad X, Y \in \mathfrak{X}(M) = \Gamma(TM). \quad (2.13)$$

で定義される．

F -Yang-Mills 接続 ∇ の指数形式 $\mathcal{I}_\nabla$ を次で定義する：

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_\nabla(\alpha) = & \int_M F''\left(\frac{1}{2}\|R^\nabla\|^2\right) \langle d^\nabla \alpha, R^\nabla \rangle^2 dv \\ & + \int_M F'\left(\frac{1}{2}\|R^\nabla\|^2\right) \{ \langle \mathfrak{R}^\nabla(\alpha), \alpha \rangle + \|d^\nabla \alpha\|^2 \} dv. \end{aligned} \quad (2.14)$$

定理 2.5 (第 2 変分公式, [3, Proposition 3.7]). $\nabla \in \mathcal{C}$ を F -Yang-Mills 接続とする． ∇^t を $\mathcal{C}$ 内の C^∞ 級曲線で $\nabla^0 = \nabla$ となるものとし，

$$\alpha = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \nabla^t \in \Omega^1(\mathfrak{g}_P). \quad (2.15)$$

とする．このとき，次が成り立つ：

$$\left. \frac{d^2}{dt^2} \right|_{t=0} \mathcal{YM}_F(\nabla^t) = \mathcal{I}_\nabla(\alpha). \quad (2.16)$$

(2.16) より， ∇ が弱安定であることとすべての $\alpha \in \Omega^1(\mathfrak{g}_P)$ に対して $\mathcal{I}_\nabla(\alpha) \geq 0$ であることは同値である．

3 標準球面上の F -Yang-Mills 接続の不安定性

はじめに Simons の定理を復習する．

定理 3.1 ([16]). $n > 4$ ならば n 次元の標準球面 S^n 上の非平坦な Yang-Mills 接続はすべて不安定である．

定理 3.1 は Simons ([16]) によって与えられたが，その証明は Bourguignon-Lawson ([4]) によって与えられた．Simons の定理を一般化するために彼らの証明を簡単に復習する．

M^n は Euclid 空間 $\mathbb{R}^N$ ($n < N$) に等長にはめ込まれていると仮定する． $\{E_A\}_{A=1}^N$ を $\mathbb{R}^N$ の標準基底とする．各 $1 \leq A \leq N$ に対して， V_A を $M \subset \mathbb{R}^N$ に関する E_A の接線成分とする．各 $1 \leq A \leq N$ に対して， $\iota_{V_A} R^\nabla$ を次で定義される $\Omega^1(\mathfrak{g}_P)$ の元とする：

$$\iota_{V_A} R^\nabla(X) = R^\nabla(V_A, X), \quad X \in \mathfrak{X}(M). \quad (3.1)$$

注意 3.2. Nayatani-Urakawa ([17]) は、任意の接ベクトル場 V に対して $\iota_V R^\nabla \in \Omega^1(\mathfrak{g}_P)$ の幾何学的な記述を与えている。 $\tilde{V}$ で ∇ に関する V の水平リフトを表し、 $\tilde{V}$ に対応する 1 パラメータ変換群を利用して ∇ を通る $\mathcal{C}$ 内の曲線を構成している。 このとき、 $\iota_V R^\nabla$ はこの曲線の ∇ における速度ベクトルに一致する。

$\mathcal{I}_\nabla(\iota_{V_A} R^\nabla)$ ($A = 1, \dots, N$) の平均 (もしくはトレース)

$$\sum_{A=1}^N \mathcal{I}_\nabla(\iota_{V_A} R^\nabla) \quad (3.2)$$

を考えたとき、次の補題は基本的である。

補題 3.3. 任意の F -Yang-Mills 接続 ∇ に対して、

$$\sum_{A=1}^N \mathcal{I}_\nabla(\iota_{V_A} R^\nabla) < 0, \quad (3.3)$$

が成り立てば、 ∇ は不安定である。

証明. この補題は対偶によって証明される。 ∇ を弱安定な F -Yang-Mills 接続とする。 任意の $\alpha \in \Omega^1(\mathfrak{g}_P)$ に対して $\mathcal{I}_\nabla(\alpha) \geq 0$ である。 特に、 $\alpha = \iota_{V_A} R^\nabla$ を代入すると $\mathcal{I}_\nabla(\iota_{V_A} R^\nabla) \geq 0$ となるので、

$$\sum_{A=1}^N \mathcal{I}_\nabla(\iota_{V_A} R^\nabla) \geq 0. \quad (3.4)$$

したがって、補題が示された。 $\square$

この補題により、任意の非平坦な F -Yang-Mills 接続 ∇ に対して、(3.3) が成り立てば、少なくとも 1 つの $A \in \{1, \dots, N\}$ で F -Yang-Mills 汎関数 $\mathcal{YM}_F$ が $\iota_{V_A} R^\nabla$ 方向に減少していることを示している。

以下では、定理 3.1 の証明を与える。

定理 3.1 の証明 (概要) . 定理 3.1 では $F(t) = t$ の場合を扱う。 S^n を $\mathbb{R}^{n+1}$ 内の単位標準球面とする。 Bourguignon-Lawson ([4, (7.7) Theorem]) は次を示した：

$$\sum_{A=1}^{n+1} \mathcal{I}_\nabla(\iota_{V_A} R^\nabla) = 2(4-n) \int_{S^n} \|R^\nabla\|^2 dv. \quad (3.5)$$

したがって、 $n > 4$ ならば (3.5) の右辺が負となり、補題 3.3 から主張が得られる。 $\square$

Simons の定理を一般化するために、任意の非平坦な F -Yang-Mills 接続 ∇ に対して平均 (3.2) を評価し、(3.3) を満たす ∇ の条件を導出する必要がある。

命題 3.4. ∇ を S^n 上の F -Yang-Mills 接続とする。 このとき、次が成り立つ：

$$\begin{aligned} \sum_{A=1}^{n+1} \mathcal{I}_\nabla(\iota_{V_A} R^\nabla) &= 4 \int_{S^n} F''\left(\frac{1}{2}\|R^\nabla\|^2\right) \|R^\nabla\|^4 dv \\ &\quad + 2(4-n) \int_{S^n} F'\left(\frac{1}{2}\|R^\nabla\|^2\right) \|R^\nabla\|^2 dv. \end{aligned} \quad (3.6)$$

この命題は [3, Theorem 4.3] の特殊な場合である．この定理から (3.6) を導出するためには S^n の Riemann 曲率 R と $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ の第 2 基本形 h が次のように与えられることを利用する：

$$R(X, Y)Z = \langle Z, Y \rangle X - \langle Z, X \rangle Y, \quad h(X, Y) = \langle X, Y \rangle \xi, \quad (3.7)$$

ただし、 X, Y, Z は S^n の接ベクトルとし、 ξ は $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ 上の中心を指す単位法線ベクトル場とする．

平均 (3.6) を評価していくために、 $F'(\|R^\nabla\|^2/2)$ と $F''(\|R^\nabla\|^2/2)$ の関係が鍵になると考える．そこで、 F の微分 F' の次数を次で定義する ([3, Definition 4.8])：

$$d_{F'} = \sup_{t \in [0, \infty)} \frac{tF''(t)}{F'(t)}. \quad (3.8)$$

例 3.5. 例 2.2 で与えられた各関数 F について次数 $d_{F'}$ を求める：(i) $F(t) = t$ の場合、 $d_{F'} = 0$ ．(ii) $p \geq 2$ および $F = F_p$ の場合、 $d_{F'_p} = (p-2)/2$ ．(iii) $F = F_e$ の場合、 $d_{F'_e} = \infty$ ．

導入で述べた定理 1.1 を示す．

定理 3.6 ([3, Corollary 4.12], 定理 1.1). 次数 $d_{F'}$ が有限であると仮定する．

$$n > 4d_{F'} + 4, \quad (3.9)$$

ならば n 次元標準球面 S^n 上の任意の非平坦な F -Yang-Mills 接続は不安定である．

証明 (概要)． ∇ を S^n 上の非平坦な F -Yang-Mills 接続とする． $d_{F'}$ の定義から

$$d_{F'} \geq \frac{\|R^\nabla\|^2}{2} \frac{F''(\|R^\nabla\|^2/2)}{F'(\|R^\nabla\|^2/2)}. \quad (3.10)$$

と表せるので、この不等式と (3.6) から次の不等式が得られる：

$$\sum_{A=1}^N \mathcal{I}_\nabla(\iota_{V_A} R^\nabla) \leq 2(4d_{F'} + 4 - n) \int_{S^n} \|R^\nabla\|^2 dv. \quad (3.11)$$

したがって、定理 3.1 の証明と同様の議論により主張が得られる． $\square$

$F(t) = t$ の場合には $d_{F'} = 0$ が成り立つので定理 3.6 は Simons の定理の拡張である．さらに、定理 3.6 は S^n 上の p -Yang-Mills 接続の不安定性に関する Chen-Zhou ([5]) の結果も拡張している．実際、 $F = F_p$ の場合 (例 2.2, (ii))、不等式 (3.9) は $n > 2p$ となる．このとき任意の非平坦な p -Yang-Mills 接続は不安定である．

一方で、次数 $d_{F'}$ が無限である場合、 F -Yang-Mills 接続の不安定性に関する別種の定理を導くことができる．以下では、 $F = F_e$ (例 2.2, (iii)) の場合で考察する．

任意の指数的 Yang-Mills 接続 ∇ に対して、直接計算により (3.6) は次のように書き換えられる：

$$\sum_{A=1}^{n+1} \mathcal{I}_\nabla(\iota_{V_A} R^\nabla) = 2 \int_{S^n} \exp\left(\frac{1}{2}\|R^\nabla\|^2\right) \|R^\nabla\|^2 \{2\|R^\nabla\|^2 - (n-4)\} dv. \quad (3.12)$$

ここで、命題 3.4 の証明には $d_{F'}$ の有限性を必要としないことに注意する．この等式を利用して導入で述べた定理 1.2 が得られる：

定理 3.7 ([3, Proposition 4.14], 定理 1.2). $n > 4$ とする. S^n 上の非平坦な指数 Yang-Mills 接続 ∇ に対して, 曲率 R^∇ の (2.4) で定義されるノルムが次の不等式を満たすならば, ∇ は不安定である:

$$\|R^\nabla\| < \sqrt{\frac{n-4}{2}}. \quad (3.13)$$

Yang-Mills 理論と調和写像論の間には強い類似性があることが知られている. 今回得られた結果に対応する調和写像論における結果について説明する. F -Yang-Mills 接続の概念の対応物として F 調和写像の概念が Ara ([1]) によって導入された. F 調和写像は調和写像, p 調和写像, 指数的調和写像などの一般化である. さらに, 彼は次のような F 調和写像の不安定性定理を導出した.

定理 3.8 ([1, Theorem 7.1]). M を閉 Riemann 多様体とする. 任意の非定値な F 調和写像 $\phi: M \rightarrow S^n$ に対して, 次の不等式が成り立てば ϕ は不安定である:

$$\int_M \|d\phi\|^2 \left\{ \|d\phi\|^2 F''\left(\frac{1}{2}\|d\phi\|^2\right) + (2-n)F'\left(\frac{1}{2}\|d\phi\|^2\right) \right\} dv < 0. \quad (3.14)$$

ここで, 不等式 (3.14) の左辺は, F 調和写像の設定での平均に対応している ([1, (7.5)] を参照). 一方で, (3.8) で定義した $d_{F'}$ が有限であることを仮定した場合, 次の不等式が成り立つことが示される:

$$\begin{aligned} \int_M \|d\phi\|^2 \left\{ \|d\phi\|^2 F''\left(\frac{1}{2}\|d\phi\|^2\right) + (2-n)F'\left(\frac{1}{2}\|d\phi\|^2\right) \right\} dv \\ \leq \int_M \|d\phi\|^2 F'\left(\frac{1}{2}\|d\phi\|^2\right) \{2d_{F'} + (2-n)\} dv. \end{aligned} \quad (3.15)$$

したがって, 定理 3.6 の対応物として次の定理が得られる:

定理 3.9. 次数 $d_{F'}$ が有限であると仮定する.

$$n > 2d_{F'} + 2, \quad (3.16)$$

ならば, 任意の非定値な F 調和写像 $\phi: M \rightarrow S^n$ は不安定である.

不等式 (3.16) は調和写像の不安定性に関する Leung の定理 ([13]) の拡張である. また, 定理 3.7 の対応物として Koh ([11]) の指数的調和写像の不安定性定理が見つかる.

4 問題と進行中の研究

定理 3.6 の拡張に向けたいくつかの問題を与えたい. 底空間が標準球面の他のものに置き換えたとき, F -Yang-Mills 接続の不安定性定理を見つけることは自然な問題となる. Kobayashi-Ohnita-Takeuchi ([10]) は底空間が既約なコンパクト Riemann 対称空間の場合に Yang-Mills 接続の不安定性を明らかにしている. M を既約なコンパクト Riemann 対称空間で正規計量をもつものとする. $C^\infty(M)$ に作用する M の Laplacian の第 1 固有値を λ_1 で表す. $\Lambda^2 T_x M$ ($x \in M$) 上の Riemann 曲率作用素の最大固有値を μ で表す. Kobayashi-Ohnita-Takeuchi は次の定理を与えた:

定理 4.1 ([10, (7.10) Theorem]). 上記の設定のもとで,

$$\lambda_1 - 1 + 2\mu < 0, \quad (4.1)$$

ならば, M 上の任意の非平坦な Yang-Mills 接続は不安定である.

その後, Shintani ([15]) は不等式 (4.1) を F -Yang-Mills 接続の場合に拡張した:

定理 4.2 ([15]). γ を M の第 1 標準はめ込みに関する形作用素の最大固有値とする. $0 \leq d_{F'} < \infty$ とする. このとき,

$$\lambda_1 - 1 + 2\mu + 4d_{F'} \left\{ (\text{codim}(M) - 1)\gamma + \frac{\lambda_1}{\dim(M)} \right\} < 0, \quad (4.2)$$

ならば, M 上の任意の非平坦な F -Yang-Mills 接続は不安定である.

p -Yang-Mills 接続に関する同様の不等式が Kawagoe ([9]) に見つかる.

上記の議論から, 次の 2 つの問題を与える:

問題 1: 不等式 (4.2) を満たす既約なコンパクト Riemann 対称空間 M を分類せよ.

問題 2: 不等式 (4.2) を満たさない M に対して, M 上の非平坦な弱安定 F -Yang-Mills 接続を与えよ.

不等式 (4.2) は $F(t) = t$ の場合には Kobayashi-Ohnita-Takeuchi のものと一致する. よって, この場合では上記の 2 つの問題は彼らによって解決された ([10, (7.11) Theorem]). 彼らの結果によれば S^n ($n > 4$), Cayley 射影平面 $F_4/Spin(9)$ および E_6/F_4 のみが (4.1) を満たす既約なコンパクト Riemann 対称空間である. さらに, Laquer ([12]) は標準接続が S^n ($n > 4$), $F_4/Spin(9)$ および E_6/F_4 以外の既約なコンパクト Riemann 対称空間上で弱安定な Yang-Mills 接続であることを示した. したがって, $F(t) = t$ の場合, 上記の問題は完全に解決されている. 上記の問題は関数 F が一般の場合で意味をもつ.

最後に, 問題 1 を解決するための現在進行中の研究を説明する. 不等式 (4.2) は不等式 (4.1) の十分条件を与えている. したがって, $F_4/Spin(9)$ および E_6/F_4 に対する F -Yang-Mills 接続の不安定性定理を明らかにしたい. 問題 1 を解決する上での難しさの 1 つは不等式 (4.2) における γ の正確な値を決定することにある. 現時点では問題 1 の部分的な解答として次の定理をあげる:

定理 4.3 ([2]). $0 \leq d_{F'} < 1/6$ ならば $F_4/Spin(9)$ 上の任意の非平坦な F -Yang-Mills 接続は不安定である.

参考文献

- [1] M. Ara, “Geometry of F -Harmonic Maps”, Kodai. Math. J., **22** (1999), 243–263.
- [2] K. Baba, “On instability of F -Yang-Mills connections over irreducible symmetric R -spaces”, submitted.
- [3] K. Baba, K. Shintani, “A Simons type condition for instability of F -Yang-Mills connections”, arXiv:2301.0429.

- [4] J. P. Bourguignon, H. B. Lawson, Jr. “Stability and Isolation Phenomena for Yang-Mills Fields”, *Commun. Math. Phys.*, **79**, (1981), 189–230.
- [5] Q. Chen, Z.-R. Zhou, “On Gap Properties and Instabilities of p -Yang-Mills Fields”, *Cand. J. Math.*, **59**, (2007), 1245–1259.
- [6] Y. Dong, S. W. Wei, “On Vanishing Theorems for Vector Bundle Valued p -Forms and their Applications”, *Commun. Math. Phys.*, **304**, (2011), 329–368.
- [7] M. Hamilton, “Mathematical Gauge Theory”, Springer Cham, 2017.
- [8] G.-Y. Jia, Z.-R. Zhou, “Stabilities of F -Yang-Mills Fields on Submanifolds”, *ARCHIVUM TATHEMATICUM* **49**, (2013), 125–139.
- [9] J. Kawagoe, “Instability of p -Yang-Mills fields on submanifolds”, Master thesis (supervisor: M. S. Tanaka), Tokyo University of Science, March 2015.
- [10] S. Kobayashi, Y. Ohnita and M. Takeuchi, “On instability of Yang-Mills connections”, *Math. Z.*, **193**, (1986), 165–189.
- [11] S. E. Koh, “A nonexistence theorem for stable exponentially harmonic maps”, *Bull. Korean Math Soc.*, **32** (1995), 211–214.
- [12] H. T. Laquer, “Stability properties of the Yang-Mills functional near the canonical connection”, *Mich. Math. J.*, **31** (1984), 139–159.
- [13] P. F. Leung, “On the stability of harmonic maps”, *Harmonic Maps, Lecture Notes in Mathematics*, **949**, Springer Verlag, 1982, 122–129.
- [14] F. Matsuura, H. Urakawa, “On exponential Yang-Mills connections”, *Journal of Geometry and Physics*, **17** (1995), 73–89.
- [15] K. Shintani, “Weakly stability of F -Yang-Mills connections”, Master thesis (supervisor: K. Baba), Tokyo University of Science, March 2022.
- [16] J. Simons, “Gauge Fields”, *Tokyo Symposium on Minimal Submanifolds and Geodesics*, 1977.
- [17] S. Nayatani, H. Urakawa, “Morse indices of Yang-Mills connections over the unit sphere”, *Compositio Mathematica*, **98** (1995), 177–192.