

ワープ積多様体上の平均曲率流の グラフ保存性及び時間大域的存在

藤原 尚俊 (東京理科大学) *

概要

閉リーマン多様体と開区間, その開区間上の正値関数によって定義されるワープ積多様体上の超曲面の平均曲率流を考える. 特に閉リーマン多様体上のグラフとして与えられるワープ積多様体上の超曲面について, そのグラフ性が平均曲率流によって保たれる条件や時間大域的に解が存在する条件を調べ, その際の解の振る舞いについて説明する.

1 平均曲率流

n 次元閉多様体 M と $n+1$ 次元完備リーマン多様体 $(\overline{M}, g)$ に対して, 滑らかな写像 $F: M \times [0, T) \rightarrow \overline{M}$ を考え, $F_t = F(\cdot, t): M \rightarrow \overline{M}$ が埋め込みであるとする. その像を $M_t = F_t(M)$ とし, $\{M_t\}_{t \in [0, T)}$ が平均曲率流であるとは, 次の偏微分方程式

$$\frac{\partial F}{\partial t} = -H_t N_t, \quad (1.1)$$

を満たすことをいう. ここで N_t, H_t はそれぞれ超曲面 M_t の単位法ベクトル場と平均曲率である. 埋め込まれる多様体 M の次元が 1 のとき, 特に曲線短縮流と呼ばれる. これは一般に平均曲率流に対して成立する等式

$$\frac{d}{dt} \text{Vol}(M_t) = - \int_M H_t^2 d\mu_t$$

から超曲面 M_t の体積 (曲線の長さ) $\text{Vol}(M_t)$ が減少することに由来する. 平均曲率流方程式 (1.1) の初期値問題は解が一意的に短時間存在することが知られており, さらに次の命題が成立する.

命題 1.1 区間 $[0, T)$ を平均曲率流が存在する極大の区間とする. T を極大存在時間とよび, $T < \infty$ ならば, 第二基本形式のノルム $|A_t|$ の上限は発散する:

$$\sup_{M \times [0, T)} |A_t| = \infty.$$

この命題から逆に, $|A_t|$ が時間 t によらずに一様に有界となるならば, $T = \infty$ となることが従う. このとき解は時間大域的に存在するという.

* 部分多様体幾何とリー群作用 2023 記録集

例 1.2 (n 次元球面) $n + 1$ 次元ユークリッド空間内の n 次元球面を初期条件とする平均曲率流は, 半径を $R(t)$ としたとき以下の式で与えられる:

$$R(t) = \sqrt{R(0)^2 - 2nt}, \quad t \in [0, R(0)^2/2n).$$

すなわち球面の形を保ったまま変形し, その球面の時刻 t での半径は $R(t)$ で与えられる. このとき極大存在時間は $T = R(0)^2/2n$ であり, 球面は原点につぶれてしまう. 球面の第二基本形式のノルムは $|A_t| = \sqrt{n}/R(t)$ であるため, $t \rightarrow T$ で発散することが確かめられる.

平均曲率流方程式 (1.1) は 2 階放物型偏微分方程式であり, 超曲面は局所的にある関数のグラフとして表せることから, 次の比較原理が成り立つことが知られている (cf. [12, Lemma 3.2]).

補題 1.3 (比較原理) $\{M_t\}_{t \in [0, t_0)}, \{N_t\}_{t \in [0, t_0)}$ を平均曲率流とする. もし M_0 と N_0 が交わらなければ, M_t と N_t は常に交わらない.

例 1.2 と比較原理から, ユークリッド空間内の閉超曲面を初期値にもつ平均曲率流は有限時間しか存在できないことが従う. 特に, 強凸超曲面を初期値にもつ平均曲率流は球面と同様の振る舞いをするのが Huisken によって示されている.

定理 1.4 (Huisken [11]) $n + 1$ 次元ユークリッド空間 ($n \geq 2$) 内の強凸超曲面を発する MCF は強凸性を保ったまま 1 点に収縮する.

平面上の埋め込まれた閉曲線については, Gage-Hamilton と Grayson による次の結果が知られている.

定理 1.5 (Gage-Hamilton [6], Grayson [8]) 平面上の埋め込まれた閉曲線は曲線短縮流で変形したとき途中で凸曲線になり, さらに凸性を保ちながら有限時間で 1 点に収縮する.

より一般のリーマン多様体内の平均曲率流及び曲線短縮流の結果については, Huisken [12], Grayson [9], Gage [7] などがある. 本研究では, 特にワープ積多様体内の平均曲率流および曲線短縮流を考えていく.

2 ワープ積多様体

次にワープ積多様体を定義する. (M, g_M) を n 次元の閉リーマン多様体とし, $r: I \rightarrow (0, \infty)$ を開区間 I 上の滑らかな正值関数とする. このとき

$$\begin{cases} \overline{M} = M \times I \\ \overline{g} = r(z)^2 g_M + dz \otimes dz \end{cases}$$

と定め, $(\overline{M}, \overline{g})$ をワープ積多様体, 関数 r をワープ関数とよぶ. ワープ積多様体は積多様体や定曲率空間を含むように一般化されたリーマン多様体と考えられる. 曲面の場合について具体的

に考えると $\overline{M} = \mathbb{S}^1 \times I$ としてリーマン計量は

$$\bar{g} = r(z)^2 d\theta \otimes d\theta + dz \otimes dz$$

によって与えられることから, ガウス曲率は $\bar{K} = -r''(z)/r(z)$ で与えられる. よって以下のように $r: I \rightarrow \mathbb{R}$ を定めるとガウス曲率一定曲面を得る:

- $I = (0, \infty)$, $r(z) = z$ のとき, ガウス曲率 $\bar{K} \equiv 0$.
- $I = (-\pi/\sqrt{k}, \pi/\sqrt{k})$, $r(z) = \cos \sqrt{k}z$ のとき, ガウス曲率 $\bar{K} \equiv k > 0$.
- $I = (-\infty, \infty)$, $r(z) = e^{\sqrt{k}z}$ のとき, ガウス曲率 $\bar{K} \equiv -k < 0$.

次にワープ積多様体上の平均曲率流として, ユークリッド空間内の球面に対応する例を考える.

例 2.1 (Parallel) ワープ積多様体 $\overline{M}$ 上の超曲面 $M \times \{z_0\}$ を Parallel とよぶ. Parallel の平均曲率は $z_0 \in I$ の値のみで決まり, $nr'(z_0)/r(z_0)$ となる. このとき Parallel を初期条件とする平均曲率流は, Parallel の位置を $z(t) \in I$ として

$$\frac{dz}{dt}(t) = -n \frac{r'}{r}(z(t)), \quad z(0) = z_0$$

によって定まる. 狭義単調増加なワープ関数 $r: (-\infty, a) \rightarrow (0, \infty)$ に対して $\sup_{z \in (-\infty, a)} r'(z)/r(z) < \infty$ が成り立つとき, $T = \infty$ が従う.

補題 2.2 ワープ関数 $r: (-\infty, a) \rightarrow (0, \infty)$ がある正数 $\alpha > 0$ に対して

$$r'(z) > 0, \quad r(z)r''(z) - (1 + \alpha)r'(z)^2 \geq 0$$

を満たすならば, 任意の $-\infty < z_2 < z_1 < a$ に対して

$$\frac{r'}{r}(z_2) - \frac{r'}{r}(z_1) \leq -\alpha(z_1 - z_2) \frac{r'}{r}(z_1) \frac{r'}{r}(z_2),$$

が成立する. 特に r'/r は単調増加で, $z \rightarrow -\infty$ のとき 0 に収束する.

補題 2.3 (Parallel とワープ関数) ワープ関数 $r: (-\infty, a) \rightarrow (0, \infty)$ が補題 2.2 と同様の仮定を満たすならば, 例 2.1 で定まる parallel を発する平均曲率流は時間大域的に存在する. さらに異なる二つの parallel を発する平均曲率流 $\{z_1(t)\}_{t \in [0, \infty)}$, $\{z_2(t)\}_{t \in [0, \infty)}$ に対して, $z_1(0) - z_2(0) > 0$ とすると, 次の不等式が成立する:

$$0 < z_1(t) - z_2(t) \leq (z_1(0) - z_2(0)) \left(\frac{r(z_2(t))}{r(z_2(0))} \right)^\alpha.$$

この補題から, ワープ関数 r が $r(z) \rightarrow 0$ ($z \rightarrow -\infty$) ならば, 異なる二つの parallel を発する平均曲率流に対して, その間の距離 $z_1(t) - z_2(t)$ は $t \rightarrow \infty$ で 0 に収束する.

3 ワープ積多様体上のグラフ

ワープ積多様体 $(\overline{M}, \bar{g})$ 上の超曲面 S がグラフであることを次のように定義する.

定義 3.1 (Angle function とグラフ) 超曲面 S の単位法ベクトル場を N , ワープ積多様体 $\overline{M} = M \times I$ の I 方向の座標基底を ∂_z とする. このとき, S 上の関数 $\Theta: S \rightarrow [-1, 1]$ を

$$\Theta = \bar{g}(N, \partial_z)$$

と定め, angle function とよぶ. さらに超曲面 S がグラフであるとは angle function が常に正値, すなわち $\Theta > 0$ であることと定義する.

ワープ積多様体上の平均曲率流 $\{M_t\}_{t \in [0, T]}$ に対して, angle function が各時刻 t について $\Theta_t = \bar{g}(N_t, \partial_z)$ と定まる. このとき平均曲率流がグラフを保つことを次のように定義する.

定義 3.2 平均曲率流がグラフ性を保つとは,

$$\Theta_0 > 0 \text{ ならば } \Theta_t > 0 \ (t < T)$$

が成り立つことである.

ユークリッド空間内のグラフ超曲面の平均曲率流については, Ecker-Huisken [2, 3] によって研究されている. ワープ積多様体内のグラフ超曲面の平均曲率流については, Borisenko-Miquel [1] や Huang-Zhan-Zhou [10] によって調べられている. また筆者は [4] において, 回転面上のグラフで表される曲線に関する曲線短縮流を調べた. 本研究は [4] の結果をワープ積多様体上の曲線短縮流及び平均曲率流へ拡張することを試みたものである.

4 主結果

以下に述べる主結果は [5] において得られた結果であり, 平均曲率流のグラフ保存性と時間大域的存在についての主張である. 埋め込む多様体 M の次元 n について, $n = 1$ と $n \geq 2$ の場合で状況が異なるため, それぞれの場合に分けて述べることにする.

4.1 グラフ保存性

定理 4.1 ($n = 1$ の場合) 任意のワープ関数 $r: I \rightarrow (0, \infty)$ に対して, 曲線短縮流はグラフ性を保つ. 特に狭義単調増加なワープ関数 $r: (-\infty, a) \rightarrow (0, \infty)$ が $rr'' - 2r'^2 \geq 0$ を満たすならば, ある正の定数 C が存在して, angle function に対して $\Theta_t \geq C > 0$ が成り立つ.

定理 4.2 ($n \geq 2$ の場合) ワープ関数 $r: (-\infty, a) \rightarrow (0, \infty)$ と (M, g_M) の Ricci 曲率 Ric_M がある定数 ρ と $\alpha > 1$ に対して次の条件を満たすとする:

$$\begin{aligned} \text{Ric}_M &\geq n\rho g_M, \quad r' > 0, \\ rr'' - (1 + \alpha)r'^2 + \rho &\geq \max\{\rho, 0\}. \end{aligned}$$

このとき上述の定数 $\alpha > 1$ に対して, 初期条件

$$\min_{p \in M_0} \Theta_0(p) > \alpha^{-1/2}$$

を満たす平均曲率流はグラフ性を保ち、ある正の定数 C に対して $\Theta_t \geq C$ が成立する。

グラフ保存性の証明には、angle function Θ_t の評価をする必要がある。そのため Θ_t の発展方程式を求めると次のようになる。

補題 4.3 Θ_t の発展方程式は以下で与えられる: $n = 1$ のとき,

$$(\partial_t - \Delta) \Theta_t = \frac{rr'' - 2r'^2}{r^2} \Theta_t (1 - \Theta_t^2) + \left(\frac{r'}{r} \Theta_t - \kappa_t \right)^2 \Theta_t.$$

$n \geq 2$ のとき,

$$\begin{aligned} (\partial_t - \Delta) \Theta_t &= 2 \frac{r'}{r} \langle \nabla \Theta_t, E_z \rangle - 2 \frac{r'}{r} H_t + |A_t|^2 \Theta_t \\ &\quad + n \frac{r'^2}{r^2} \Theta_t + \frac{\Theta_t (1 - \Theta_t^2)}{r^2} \{ n (rr'' - r'^2) + \text{Ric}_M(v_M, v_M) \}, \end{aligned}$$

ただし v_M は

$$v_M = \frac{N_M}{|N_M|_M}, \quad N_M = \sum_{k=1}^n \langle N, E_k \rangle E_k,$$

と定義され、もし $|N_M|_M = 0$ ならば $v_M = 0$ と定める。 N_M は単位法ベクトル場 N の M 方向の接成分である (E_k は TM の局所正規直交標構)。

$n = 1$ のとき、上の Θ_t の発展方程式に対して最小値の原理の議論を用いることでグラフ保存性及び Θ_t の評価が得られる。 $n \geq 2$ の場合は、 Θ_t の発展方程式に Θ_t を含まない項 $-2(r'/r)H_t$ があることから評価を導くことがうまくできない。そのため Huang-Zhan-Zhou [10] では Θ_t^2 を用いることでその困難を回避している。本研究でも同様の計算を行うことによって、次の補題を得る。

補題 4.4 $f_t = \Theta_t^2$ と定めると、以下の不等式が成立する:

$$(\partial_t - \Delta) f_t \geq \left\langle \nabla f_t, \frac{2r'}{r} E_z - \frac{\nabla f_t}{2f_t} \right\rangle + \frac{2n(1 - f_t)}{r^2} \{ r'^2 (\alpha f_t - 1) + c f_t \}.$$

ここで $\mu(t) = \min_{p \in M} f_t(p)$ と定義すると、補題 4.4 から

$$\frac{d\mu}{dt} \geq \frac{2n(1 - \mu)}{r^2} \{ r'^2 (\alpha \mu - 1) + c \mu \} > 0$$

が成り立つので、 μ は単調増加である。したがって、定理 4.2 が証明される。

4.2 時間大域的存在

定理 4.5 ($n = 1$ のとき) $r: (-\infty, a) \rightarrow (0, \infty)$ を狭義単調増加なワープ関数とし、曲線短縮流に対して初期曲線がグラフであると仮定する。このとき次が成立する:

(i) $\sup_{z \in (-\infty, a)} r'(z)/r(z) < \infty$ が成り立つならば、 $T = \infty$ 。

(ii)狭義単調増加なワープ関数 r が $rr'' - 2r'^2 \geq 0$ を満たすと仮定する. このとき $T = \infty$ であり, 曲率 κ_t に対して

$$\kappa_t \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow \infty)$$

が成り立つ. さらに任意の $i \geq 1$ に対して $\sup_{z \in I} |r^{(i)}(z)/r(z)| < \infty$ ならば, 曲率の高階微分についても同様に

$$|\partial_s^{(i)} \kappa_t| \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow \infty)$$

が成立する.

定理 4.6 ($n \geq 2$ のとき) グラフ保存性のときと同様に, ワープ関数 $r: (-\infty, a) \rightarrow (0, \infty)$ と (M, g_M) の Ricci 曲率 Ric_M がある定数 ρ と $\alpha > 1$ に対して次の条件を満たすとする:

$$\begin{aligned} \text{Ric}_M &\geq n\rho g_M, \quad r' > 0, \\ rr'' - (1 + \alpha)r'^2 + \rho &\geq \max\{\rho, 0\}. \end{aligned}$$

上述の $r(z)$ に関する条件内の定数 $\alpha > 1$ に対して, 初期条件

$$\min_{p \in M_0} \Theta_0(p) > \alpha^{-1/2}$$

を満たす平均曲率流 $\{M_t\}_{t \in [0, T]}$ はグラフ性を保ち, $T = \infty$. さらに,

$$R_M = 0, \quad \frac{r^{(i)}(z)}{r(z)} \rightarrow 0 \quad (z \rightarrow -\infty) \quad (i \geq 2)$$

と仮定すると, 任意の $i \geq 0$ に対して $|\nabla^i A_t| \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow \infty)$ が成り立つ.

時間大域的存在を示すためには, 曲率 κ_t , $|A_t|$ の評価が必要になる. もし曲率の一樣有界性を得ることができれば, 命題 1.1 を用いることで $T = \infty$ が従う. しかし曲率そのものの評価を行うことは難しいため, グラフの傾きに関する量 ($v_t = \Theta_t^{-1}$ と定める) と曲率を合わせて考える. 以下で定義される関数 $\mathfrak{g}_t$ は Ecker-Huisken [3] によって用いられた.

補題 4.7 上で述べた $v_t = \Theta_t^{-1}$ について, ある $t_0 \in (0, T]$ に対して $\sup_{(p, t) \in M \times [0, t_0]} v_t(p) < \infty$ が成り立つとする. このとき $\mathfrak{g}_t$ を次のように定義する;

$$\mathfrak{g}_t = \varphi(v_t)|A_t|^2, \quad \varphi(v) = \frac{v^2}{1 - kv^2}, \quad k = \frac{1}{2 \sup_{(p, t) \in M \times [0, t_0]} v_t(p)^2}.$$

この $\mathfrak{g}_t$ に対して $M \times [0, t_0)$ 上で次の不等式が成立する: $n = 1$ のとき,

$$(\partial_t - \Delta)\mathfrak{g}_t \leq -2k\mathfrak{g}_t^2 + \frac{4r'}{r} \frac{\sqrt{\varphi}}{v_t^3} \mathfrak{g}_t^{3/2} - \left[\frac{rr'' - 2r'^2}{r^2} \left(v_t - \frac{1}{v_t} \right) \frac{2\varphi}{v_t^3} + 2 \frac{r''}{r} \right] \mathfrak{g}_t.$$

$n \geq 2$ のとき,

$$\begin{aligned} (\partial_t - \Delta)\mathfrak{g}_t &\leq -2k\mathfrak{g}_t^2 + 4\sqrt{n} \frac{r'}{r} \frac{\sqrt{\varphi}}{v_t} \mathfrak{g}_t^{3/2} + 4\sqrt{\varphi} |\overline{\nabla R}| \sqrt{\mathfrak{g}_t} \\ &\quad + \left[-\frac{2}{r^2} \frac{\varphi}{v_t^3} \{n(rr'' - r'^2) + \text{Ric}_M(v_M, v_M)\} \left(v_t - \frac{1}{v_t} \right) + 2\overline{\text{Ric}}(N, N) + 8|\overline{R}| \right] \mathfrak{g}_t. \end{aligned}$$

定理 4.5 と定理 4.6 における仮定とグラフ保存性の結果から、関数 v_t は一様有界であることが従う。よって、補題 4.7 において $t_0 = T$ ととることができ、 g_t が一様有界になることから $T = \infty$ が得られる。時間大域的な存在がわかると、超曲面 (曲線) の曲率について $g_t \rightarrow 0$ ($t \rightarrow \infty$) を示すことができる。すなわち、 $\kappa_t, |A_t| \rightarrow 0$ ($t \rightarrow \infty$) が従う。曲率が 0 に収束することから、曲率の高階微分も帰納的に 0 に収束することも従う。曲率及びその高階微分が 0 に収束することはグラフ超曲面が parallel の形に滑らかに近づいていくことを意味している。すなわち、グラフ超曲面は parallel を発する平均曲率流と同様に時間大域的に存在し、グラフの中でも一番効率的な形である parallel に近づいていくということがわかった。

参考文献

- [1] A. A. Borisenko and V. Miquel. Mean curvature flow of graphs in warped products. Trans. Amer. Math. Soc. **364**(9) (2012), 4551-4587.
- [2] K. Ecker and G. Huisken. Mean curvature evolution of entire graphs. Ann. Math. **130**(3) (1989), 453-471.
- [3] K. Ecker and G. Huisken. Interior estimates for hypersurfaces moving by mean curvature. Invent. Math. **105**(1) (1991), 547-569.
- [4] N. Fujihara. Curve shortening flows on rotational surfaces generated by monotone convex functions. Kyushu J. Math. **77** (2023), 179-190.
- [5] N. Fujihara. Mean curvature flows of graphs sliding off to infinity in warped product manifolds. arXiv preprint arXiv:2309.16449. (2023)
- [6] M. Gage and R. S. Hamilton. The heat equation shrinking convex plane curves. J. Differential Geom. **23**(1) (1986), 69-96.
- [7] M. Gage. Curve shortening on surfaces. Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. **23**(2) (1990), 229-256.
- [8] M. A. Grayson. The heat equation shrinks embedded plane curves to round points. J. Differential Geom. **26**(2) (1987), 285-314.
- [9] M. A. Grayson. Shortening embedded curves. Ann. Math. **129**(1) (1989), 71-111.
- [10] Z. Huang, Z. Zhang, and H. Zhou. Mean curvature flows of closed hypersurfaces in warped product manifolds. Math. Res. Lett. **26**(5) (2019), 1393-1413.
- [11] G. Huisken. Flow by mean curvature of convex surfaces into spheres. J. Differential Geom. **20**(1) (1984), 237-266.
- [12] G. Huisken. Contracting convex hypersurfaces in Riemannian manifolds by their mean curvature. Invent. Math. **84**(3) (1986), 463-480.