

The H/Q-correspondence and a generalization of the supergravity c-map

長谷川和志 (金沢大学人間社会研究域)

1 序.

Haydys により四元数ケーラー多様体からそれと同次元の超ケーラー多様体を構成する方法が与えられており, この構成法は QK/HK-対応と呼ばれている (quaternionic Kähler/hyper-Kähler-対応, [8]). この構成は, [2] において, 計量が不定値な場合に拡張されている. 同じく, [8] ではその逆の超ケーラー多様体から四元数ケーラー多様体を構成する方法も与えられており, HK/QK-対応と呼ばれている. [6] において, QK/HK-対応を四元数多様体と超複素多様体の場合へ一般化し, Q/H-対応 (quaternionic /hypercomplex-対応と呼んでいる. 例として, この Q/H-対応を四元数 Hopf 多様体に適用でき, 超複素 Hopf 多様体を得ることができる. 超複素 Hopf 多様体は位相的な理由で超ケーラー構造を許容しないので, Q/H-対応は既知の QK/HK-対応を真に一般化したものといえる. 本稿では, ある種の超複素多様体から同次元の四元数多様体を構成する方法を [7] に基づき報告する. これは HK/QK-対応 ([3, 9]) の一般化であり, H/Q-対応と呼んでいる. なお, 後述する例 10, 11 のように, H/Q-対応は超ケーラー構造を許容しない超複素多様体にも適用できるものである. また, H/Q-対応の応用として射影的特殊複素多様体 (projective special complex manifold) とよばれるある種の複素多様体から四元数多様体を構成することも説明する.

2 諸定義等

まず, 四元数多様体等の定義から始める.

定義 1. 多様体 M において, Q は階数 3 の $\text{End}(TM)$ の部分束であり, M の各点の近傍で定義された Q の局所枠 (I_1, I_2, I_3) で, $I_1^2 = I_2^2 = I_3^2 = -\text{id}$, $I_1 I_2 = -I_2 I_1 = I_3$ を満たすものが存在し, かつ M の捩れの無い接続 ∇ で Q を保つものが存在するとき (M, Q) を **四元数多様体**という.

以下, 四元数多様体 M の次元は $\dim M \geq 8$ を満たすとする. 上のような (I_1, I_2, I_3) を Q の許容枠といい, ∇ を四元数接続という. なお, 四元数接続は Q に対して一意的では

ないことに注意する ([4]). (擬) リーマン計量 g が四元数多様体 (M, Q) 上の Q -エルミート計量でありその Levi-Civita 接続が Q の四元数接続であるとき, (M, Q, g) は (擬) **四元数ケーラー多様体**とよばれる.

定義 2. $(M, H = (I_1, I_2, I_3))$ が I_1, I_2, I_3 は M の複素構造であり, $I_1 I_2 = -I_2 I_1 = I_3$ を満たすとき, (M, H) を**超複素多様体**という.

超複素多様体上には, I_1, I_2, I_3 を平行とする, 振れないアファイン接続が唯一存在する. この接続を**小島接続**という. したがって, 小島接続は $Q = \langle I_1, I_2, I_3 \rangle$ の四元数接続であり, 超複素多様体 $(M, H = (I_1, I_2, I_3))$ は $(M, Q = \langle I_1, I_2, I_3 \rangle)$ とみて四元数多様体となる. また, (擬) リーマン計量 g が I_1, I_2, I_3 に関してケーラー的であるとき, $(M, g, H = (I_1, I_2, I_3))$ は (擬) **超ケーラー多様体**とよばれる. 明らかに, (擬) 超ケーラー多様体の Levi-Civita 接続は小島接続と一致する. 主結果を述べるために, 2つ言葉を定義しておく.

定義 3. 超複素多様体 M において, ベクトル場 Z が $L_Z I_1 = 0, L_Z I_2 = -2I_3$ を満たすとき, Z を**回転ベクトル場**という.

定義 4. 超複素多様体 M において, 小島接続 ∇^0 に対して $\nabla^0 V = \text{id}$ を満たすベクトル場 V が存在するとき, M を**錘的超複素多様体**という. また, V を**オイラーベクトル場**という.

例 5. 四元数多様体上の $\mathbb{R}^{>0} \times \text{SO}(3)$ -束である *Swann* 束は錘的超複素多様体である.

なお, 錘的超複素多様体において, V をオイラーベクトル場とすると, $I_1 V$ は回転ベクトル場となる.

3 主結果

$(M, H := (I_1, I_2, I_3))$ を回転ベクトル場 Z をもつ超複素多様体とし, Θ を閉 2 次形式で $L_Z \Theta = 0$ を満たすとする. M 上の関数 f を $df = -\iota_Z \Theta$ を満たす関数とし, $f_1 := f - (1/2)\Theta(Z, I_1 Z)$ は M の各点において非零とする. $\pi: P \rightarrow M$ を主 $U(1)$ -束とし, η をその曲率 $d\eta$ が

$$d\eta = \pi^* \left(\Theta - \frac{1}{2} d((\iota_Z \Theta) \circ I_1) \right) \quad (1)$$

を満たすような接続形式とする ($[(1/2\pi)\Theta] \in H_{dR}^2(M, \mathbb{Z})$ と仮定すると, (1) を満たす (P, η) は存在する). $\tilde{M} := \mathbb{H}^* \times P$ とし ($\mathbb{H}^* = \mathbb{H} \setminus \{0\}$), $\tilde{M}$ のベクトル場 $V_1 = e_1^L - Z_1$ を考える. ここで, e_1^L は $\mathbb{H}^*$ の左不変ベクトル場で $(e_1^L)_1 = i \in \mathbb{H}$ となるものであり, $Z_1 = Z^{h_\eta} + (\pi^* f_1) X_P$ である (Z^{h_η} は Z の水平持ち上げ. X_P は $\eta(X_P) = 1$ を満たす P の基本ベクトル場). V_1 の積分曲線のなす空間 $\tilde{M}/\langle V_1 \rangle$ を $\hat{M}$ と表し, 商写像 $\tilde{\pi}: \tilde{M} \rightarrow \hat{M}$ は C^∞ な沈め込みであると仮定する.

定理 6. $\hat{M}$ は錘的超複素構造 $(\hat{H}, V)$ を持つ.

証明の概略. まず, $\tilde{M}$ 上の $(1, 1)$ -テンソル $\tilde{I}_1, \tilde{I}_2, \tilde{I}_3$ で $\text{Ker } I_\alpha = \langle V_1 \rangle$ であり $T\mathbb{H}^* \oplus \text{Ker } \eta$ 上で四元数の関係式を満たすものを定める. 次に, $L_{V_1} \tilde{I}_\alpha = 0$ を示すことで, $\hat{M}$ が超複素多様体構造が誘導されることをみる. 最後に, $V = \tilde{\pi}_*(e_0^R)$ がこの超複素構造に関してオイラー的となることを示す (e_0^R は $(e_0^R)_1 = 1$ である $\mathbb{H}^*$ 上の右不変ベクトル場). $\square$

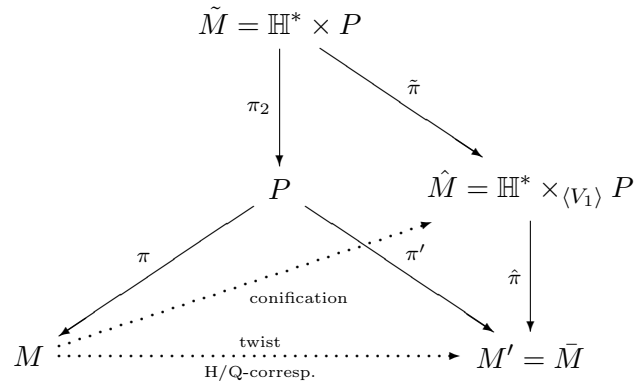
さらに, $\mathcal{D} := \langle V, I_1 V, I_2 V, I_3 V \rangle$ は $\hat{M}$ 上の積分可能な接分布となる. この葉層空間 $\hat{M}/\mathcal{D}$ を $\bar{M}$ とし, 商写像 $\hat{\pi}: \hat{M} \rightarrow \bar{M}$ は C^∞ な沈め込みであると仮定する.

定理 7. $\bar{M}$ は四元数構造 $\bar{Q}$ を持つ.

証明の概略. まず, $\hat{\pi}$ の局所切断 $s: U(\subset \bar{M}) \rightarrow \hat{M}$ が概四元数構造 $\bar{Q}$ を与えることをみる. なお, この $\bar{Q}$ は仮定より切断 s の取り方によらない. そして, $\hat{M}$ の小島接続を用いて, $\bar{Q}$ に対する四元数接続 $\bar{\nabla}$ を与える. $\square$

上の定理は, "infinitesimal" な仮定のもとでの主張であるが, P 上のベクトル場 Z_1 が P の自由な $U(1)$ -作用を生成するならば次の主張を得る.

定理 8. 上記の記号のもと, Z_1 が P の自由な $U(1)$ -作用を生成すると仮定する. このとき, 超複素多様体 $\hat{M}$ は $\bar{M}$ 上の随伴束 $\mathbb{H}^* \times_{\langle V_1 \rangle} P$ であり, 四元数多様体 $\bar{M}$ は M の Swann による $\text{twist}([11])$ によって得られる多様体に位相的に一致する. 以下の図を参照のこと.



4 例.

$(M, H = (I_1, I_2, I_3), g)$ を超ケーラー多様体とし, Z を $L_Z g = 0$ を満たす回転ベクトル場とする. Θ を (g, I_1) に関するケーラー形式とすると, $(P$ なども適切にとることで) 四元数多様体ケーラー多様体 $(\bar{M}, \bar{Q}, \bar{g})$ が得られる. これは HK/QK-対応と呼ばれる ([9] 等). これに倣い, 定理 8 における四元数多様体の構成法を H/Q-対応とよぶ. H/Q-対応は HK/QK-対応を一般化したものであるが, 以下, H/Q-対応の例をあげる.

例 9. 錐的超複素多様体 $(M, H = (I_1, I_2, I_3))$ 上で $f_1 = f = 1$, $\Theta = 0$ とし, 自明束 $P = M \times S^1$ とその上の自明な接続を考える. $Z := I_1 V$ は回転的であることが分かるので, H/Q -対応が適用できる. このとき, 得られる四元数多様体は $(\bar{M} \cong M, \bar{Q} = \langle H \rangle = \langle I_1, I_2, I_3 \rangle)$ となる.

これはいわば自明な例であるが, HK/QK -対応の場合には Θ は I_1 に関するケーラー形式として選ぶので, これは HK/QK -対応では扱うことが出来ない例である.

例 10. $A \in \text{Sp}(n)$, $\lambda > 1$ とする. $M := (\mathbb{H}^n \setminus \{0\}) / \langle \lambda A \rangle$ は超複素 Hopf 多様体とよばれる. $q \in \text{Sp}(1)$ で $q \neq \pm 1$ とする. q の $\text{Sp}(1)$ での中心化群 $U_q(1)$ は $U(1)$ と同型であることに注意し, 自明束 $P = M \times U_q(1)$, $\Theta = 0$ を考えると, 四元数 Hopf 多様体 $\bar{M} = (\mathbb{H}^n \setminus \{0\}) / \langle \lambda A R_q \rangle$ が得られる (R_q は q による $\mathbb{H}^n \setminus \{0\}$ の右作用を表す). なお, 超複素 Hopf 多様体は超ケーラー構造を許容しない.

この例 10 は例 9 を援用して得られる. 以下の図において, 左の縦のラインが例 9 であり, 右の縦のラインが超複素四元数 Hopf 多様体に H/Q -対応を適用したものである. ここで, $/\langle \lambda A \rangle$ 等是对应する元が生成する離散群の作用に関する商写像とする. 下図の「2 階と 3 階」部分が可換であることより, 例 10 が得られる.

$$\begin{array}{ccc}
\overline{\mathbb{H}^n \setminus \{0\}} \cong \mathbb{H}^n \setminus \{0\} & \xrightarrow{/\langle \lambda A R_q \rangle} & \bar{M} \\
\uparrow \tilde{\pi}' & & \uparrow \pi' \\
\tilde{P} = \mathbb{H}^n \setminus \{0\} \times U_q(1) & \xrightarrow{/\langle \lambda A \rangle} & P = M \times U_q(1) \\
\downarrow \tilde{\pi} & & \downarrow \pi \\
\mathbb{H}^n \setminus \{0\} & \xrightarrow{/\langle \lambda A \rangle} & M
\end{array}$$

Example 9 (conical)

Example 10 (Hopf)

もう一つ, 超ケーラー構造を持ち得ない例を紹介する.

例 11. 一般に, コンパクトな Lie 群は必要ならば適当な次元のトーラスと直積をとることで左不変な超複素構造を持つことが知られている ([10]). 特に $SU(3) =: G$ はトーラスと直積をとらずにそれ自身が左不変な超複素構造 H を持つ. 特に, この超複素構造は錐的である. よって, 自明束 $G \times U(1)$ で自明な接続を考えることで, 例 9 の方法で H/Q -対応が使え, この場合 $\bar{G} \cong G$ であり, $\bar{Q} = \langle H \rangle$ となる. また, $l: G \rightarrow G/U(2) (\cong \mathbb{C}P^2)$ を射影とする. P として $S^5 \rightarrow \mathbb{C}P^2$ の l による引き戻し束, Θ として $\mathbb{C}P^2$ のケーラー形式の l による引き戻しを考えることでも, H/Q -対応が適用できる. この場合も多様体として $\bar{G} \cong G$ であるが, $\bar{G}$ の四元数構造は $\langle H \rangle$ とは異なる. なお, ここで考えている

SU(3) 上の超複素構造 H に対して超ケーラー的となるようなリーマン計量は SU(3) 上には存在しない．以下の図を参考のこと．

$$\begin{array}{ccccc}
 & & P = l^\# S^5 \cong \mathrm{SU}(3) \times \mathrm{U}(1) & & \\
 & \swarrow & \downarrow & \searrow & \\
 \mathrm{SU}(3) = G & \cdots \cdots \cdots & & \cdots \cdots \cdots & \bar{G} \\
 \downarrow l \text{ 射影} & & & & \downarrow l^\# \\
 \mathrm{SU}(3)/\mathrm{U}(2) \cong \mathbb{C}P^2 & \xleftarrow{\text{Hopf fibration}} & S^5 & &
 \end{array}$$

$H/Q\text{-corresp.}$

5 supergravity c-map の一般化

HK/QK-対応の重要な応用例として supergravity c-map とよばれる射影的特殊ケーラー多様体から四元数ケーラー多様体を構成する方法がある．この節では，これを一般化した主張を述べる．

定義 12. 複素多様体 (N, J) 上で ∇ を捩じれない平坦接続， ξ を N 上のベクトル場とする． $d^\nabla J = 0$, $\nabla \xi = \mathrm{id}$, $L_\xi J = 0$ を満たすとき， (N, J, ∇, ξ) が**錐的特殊複素多様体**という．

N の接束 $TN =: M$ に， $(1, 1)$ -テンソル (I_1, I_2, I_3) を以下のように定める：

$$\begin{aligned}
 I_1(X^{h\nabla} + Y^v) &= (JX)^{h\nabla} - (JY)^v, \\
 I_2(X^{h\nabla} + Y^v) &= Y^{h\nabla} - X^v, \\
 I_3(X^{h\nabla} + Y^v) &= (JY)^{h\nabla} + (JX)^v
 \end{aligned}$$

ここで， $X^{h\nabla} + Y^v \in TM$ である．なお， $X^{h\nabla}$ は $X \in TN$ の ∇ -水平持ち上げで， X^v は $X \in TN$ の垂直持ち上げである．

補題 13. (I_1, I_2, I_3) は超複素構造となり， $Z^M := 2(J\xi)^{h\nabla}$ は回転的となる．

定理 14 (Generalized rigid c-map) 超複素多様体 $(M = TN, (I_1, I_2, I_3))$ の小島接続はリッチ平坦である．

(N, J, ∇, ξ) が錐的特殊複素多様体であり， N 上のベクトル場 $\xi - \sqrt{-1}J\xi$ が自由な $\mathbb{C}^*$ -作用を生成するとき，商空間 $\bar{N} = N/\mathbb{C}^*$ には $p_* \circ J = \bar{J} \circ p_*$ を満たす $\bar{N}$ の複素構造 $\bar{J}$ が考えられる．

定義 15. (N, J, ∇, ξ) を錐的特殊複素多様体とすると、 $\xi - \sqrt{-1}J\xi$ が $\mathbb{C}^*$ -作用を生成し、 $p: N \rightarrow \bar{N}$ がこの作用に関して主 $\mathbb{C}^*$ -束となると $(\bar{N}, \bar{J})$ を射影的特殊複素多様体という。

ここで、接続

$$\nabla' := \nabla - \frac{1}{2}J(\nabla J)$$

とすると、 $\nabla' J = 0$ であり $L_\xi \nabla' = 0$ 及び $L_{J\xi} \nabla' = 0$ が示せる。したがって、 N 上の接続形式 η で $\text{Ker } \eta$ が J -不変となるものを取ると、 $\bar{N}$ で複素接続 $\bar{\nabla}'^\eta$ が定義できる。なお、 $\text{Ker } \eta$ が J -不変であることと η が $(1, 0)$ 型であることは同値である。当然ながら、この複素接続 $\bar{\nabla}'^\eta$ は接続形式 η の取り方に依存するが、次が示せる。

命題 16. $\bar{\nabla}'^\eta$ の定める c -射影構造は N の $(1, 0)$ 型の接続形式の取り方によらない。

ここで、振れない2つの複素接続 ∇^1, ∇^2 が **c-射影同値** であるとは、複素多様体上の1-形式 θ で、

$$\nabla_X^1 Y = \nabla_X^2 Y + \theta(X)Y + \theta(Y)X - \theta(JX)JY - \theta(JY)JX$$

を満たすものが存在することをいう (X, Y はベクトル場)。c-射影同値であることは複素多様体上の複素接続全体の集合上の同値関係であるがその同値類を **c-射影構造** という。以下、命題 16 をふまえ、 $[\bar{\nabla}'^\eta]$ を $\mathcal{P}$ と表す。

g が錐的特殊複素多様体 (N, J, ∇, ξ) のケーラー計量であり、そのケーラー形式 ω が $\nabla\omega = 0$ を満たし、 g の Levi-Civita 接続 D が $D\xi = \text{id}$ を満たすとき $(N, J, g, \omega, \nabla, \xi)$ を錐的特殊ケーラー多様体という。この場合、 $(\bar{N}, \bar{J})$ はケーラー構造を有するが、それを射影的特殊ケーラー多様体という。つまり、錐的特殊ケーラー多様体から商空間 $\bar{N}$ にはケーラー構造が誘導されるが、より一般の状況である錐的特殊複素多様体からは商空間には c-射影構造が誘導されることになる。

補題 13 より、錐的特殊複素多様体 N の接束 $M := TN$ は H/Q -対応が適用できるような超複素多様体である。よって、 H/Q -対応における同様な仮定を課すと、すなわち、主 $U(1)$ -bundle $\pi: P \rightarrow M$ とその上の接続形式 η でその曲率形式が

$$d\eta = \pi^* \left(\Theta - \frac{1}{2} d((\iota_Z \Theta) \circ I_1) \right).$$

を満たすものを考え、 $f_1 := f - (1/2)\Theta(Z, I_1 Z)$ は M の各点で 0 にならないとし、 $Z_1 = Z^{h_\eta} + f_1 X_P$ は P 上の自由な $U(1)$ -作用を生成するとすれば次が得られる。

定理 17 (Generalized supergravity c-map) $2n$ -次元の射影的特殊複素多様体 $(\bar{N}, \bar{J}, \mathcal{P})$ に対して、 $(2n+4)$ -次元の葉層構造をもちその葉層空間が $\bar{N}$ に一致するような $4(n+1)$ -次元の四元数多様体 $\bar{M} = \overline{TN}$ が構成できる。

まとめると、以下のような図式で表せる。既知の supergravity c-map は射影的特殊ケーラー多様体とよばれるケーラー多様体から四元数ケーラー多様体を構成するものであるが、今回得た定理 17 (Generalized supergravity c-map) は c-射影構造が与えられたある種の複素多様体 (射影的特殊複素多様体) から四元数多様体を構成するものとなっている。

$$\begin{array}{ccccc}
(P, \eta) & & & & \\
\downarrow U(1) & & & & \\
(N, J, \nabla, \xi) & \xrightarrow{\text{rigid c-map}} & M = TN & \xrightarrow{\text{conification}} & \hat{M} \\
\downarrow & & \searrow \text{H/Q-corresp.} & & \downarrow \hat{\pi} \\
(\bar{N}, \bar{J}, \mathcal{P}_{\bar{\nabla}'}) & \xrightarrow{\text{generalized supergravity c-map}} & \bar{M} = \hat{M}/\mathcal{D} & &
\end{array}$$

射影的特殊複素多様体は1次の斉次関数 $F_0, \dots, F_n$ を用いて局所的に $U \subset \mathbb{C}^{n+1}$ 上で正則1次微分形式 $\alpha = \sum_0^n F_i dz_i$ ($\det \left(\text{Im} \frac{\partial F_i}{\partial z_j} \right) \neq 0$) ($(z_0, \dots, z_n)$ は $\mathbb{C}^{n+1}$ の標準座標系) で表せることが知られている ([1]). ちなみに, 射影的特殊複素多様体として最も簡単なものといってよいであろう $\mathbb{C}P^n$ は, $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ で定義された

$$\alpha = - \sum_{i=0}^n \sqrt{-1} z^i dz^i$$

により得られる. また, 例えば, 正則1次微分形式として

$$\alpha = g dz_0 - \sqrt{-1} \sum_{i=1}^n z_i dz_i, \quad g = -\sqrt{-1} z_1^l / z_0^{l-1} (l \neq 1)$$

を考えると, $d\alpha \neq 0$ なので射影的特殊ケーラー多様体ではないものが得られる. 現状 ([7]) では, このなように射影的特殊ケーラー多様体を誘導しないような具体例しか与えられていないが, 今後はよりの多くの例を構成するとともに, [5] における c-射影構造をもった複素多様体から四元数多様体を構成する四元数 Feix-Kaledin-構成との関連, すなわち Generalized supergravity c-map と四元数 F-K-構成との関連も明らかにしたいと考えている.

参考文献

- [1] D. Alekseevsky, V. Cortés and C. Devchand, *Special complex manifolds*, J. Geom. Phys. 42 (2002), 85–105.
- [2] D. Alekseevsky, V. Cortés, M. Dyckmanns and T. Mohaupt, *Quaternionic Kähler metrics associated with special Kähler manifolds*, J. Geom. Phys. 92 (2015), 271–287.
- [3] D. Alekseevsky, V. Cortés and T. Mohaupt, *Conification of Kähler and hyper-Kähler manifolds*, Comm. Math. Phys. 324 (2013), 637–655.
- [4] D. Alekseevsky and S. Marchiafava, *Quaternionic structures on a manifold and subordinated structures*, Ann. Mat. Pura Appl. (4) 171 (1996), 205–273.

- [5] A. Borówka and D. Calderbank, *Projective geometry and the quaternionic Feix-Kaledin construction*, Trans. Amer. Math. Soc., 372 (2019), 4729–4760.
- [6] V. Cortés and K. Hasegawa, *The quaternionic/hypercomplex-correspondence*, Osaka J. Math., 58 (2021), 213–238.
- [7] V. Cortés and K. Hasegawa, *The H/Q -correspondence and a generalization of the supergravity c -map*, Tohoku Math. J., to appear. (arXiv:2207.09013)
- [8] A. Haydys, *Hyper-Kähler and quaternionic Kähler manifolds with S^1 -symmetries*, J. Geom. Phys. 58 (2008), 293–306.
- [9] N. Hitchin, *On the hyperkähler/quaternion Kähler correspondence*, Comm. Math. Phys. 324 (2013), 77–106,
- [10] D. Joyce, *Compact hypercomplex and quaternionic manifolds*, J. Differential Geometry, 35 (1992), 743–761.
- [11] A. Swann, *Twisting hermitian and hypercomplex geometries*, Duke Math. J. 155 (2010), 403–431.