

Hypersurfaces in complex-Riemannian geometry

木村真琴 (茨城大学) *

部分多様体幾何とリー群作用 2023

1 序文

リーマン多様体の部分多様体論および超曲面論において、盛んに研究されてきたのは、まず (1) 球面の部分多様体および超曲面で、特に「等径超曲面」は Segre, Levi-Civita や E.Cartan に始まり、広く研究されてきた (cf. [4, 6])。 (2) 複素射影空間においては、複素部分多様体と全実部分多様体、特に Lagrange 部分多様体が良い部分多様体として研究されてきた一方、実超曲面についても多く研究されてきた (cf. [5, 10, 16])。 (3) 四元数射影空間においては、その四元数 Kähler 構造について不変な部分多様体は全測地的であることが知られている。そして「全複素部分多様体」が、良い性質を持った部分多様体として研究されてきた (cf. [17, 19])。さらに、四元数対称空間の (半分次元) 全複素部分多様体が興味深い研究対象として考えられる。

最近、塚田和美氏が複素球面 $\mathbb{C}S^n$ の複素超曲面から、(向きつけられた) 実 Grassmann 多様体 $\tilde{G}_4(\mathbb{R}^{n+4})$ の (四元数 Kähler 構造に関する) twistor 空間を介して、 $\tilde{G}_4(\mathbb{R}^{n+4})$ の構成法を研究された [18]。そして、複素球面の複素超曲面について興味深い具体例を通じて、更なる研究が期待されている。ここでは、まず複素球面の「等径複素超曲面」を定義し、その例をいくつか提示する。複素球面は、他にも (i) Stein 多様体であって、(ii) 完備 Ricci flat 計量 (Stenzel 計量 [15]) が構成されている。これらの観点からも興味深い研究対象であると考えられる。

さらに、複素球面の実超曲面についても、非平坦複素空間形の実超曲面と同様な研究が期待できる。ここでは、いくつかの例を提示した。さらに、その他の四元数対称空間の全複素部分多様体についても同様の研究が期待される。

2 複素リーマン幾何

定義 2.1 [13] $(M, (\cdot, \cdot))$: 複素リーマン多様体

$\Leftrightarrow$

* 本研究は JSPS 科研費 JP20K03575 の助成を受けたものです。

M : 複素多様体, $(\cdot, \cdot)_z : T_z^{(1,0)} M \times T_z^{(1,0)} M \rightarrow \mathbb{C} \ (\forall z \in M)$: 正則・非退化・対称テンソル場

$(M, (\cdot, \cdot))$: 複素リーマン多様体について, $\langle \cdot, \cdot \rangle = \operatorname{Re}(\cdot, \cdot)$ は Anti-Kähler 計量, すなわち $\langle \cdot, \cdot \rangle$: 符号 (n, n) の不定値計量で $\langle JX, JY \rangle = -\langle X, Y \rangle$.

定義 2.2 (M, J) : 複素多様体

- ∇ : 複素接続 $\Leftrightarrow \nabla$: torsion free, $\nabla J = 0$,
- 複素接続 ∇ : 正則 $\Leftrightarrow Z, W$ 正則ベクトル場に対して, $\nabla_Z W$: 正則

複素リーマン多様体上, 「計量的」な正則アファイン接続 ∇ がただ 1 つ存在する。

例 2.3 $\mathbb{C}^n$

$$z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n,$$

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^n \ni w = (w_1, \dots, w_n) &\leftrightarrow \\ w_1 \left(\frac{\partial}{\partial z_1} \right)_z + \dots + w_n \left(\frac{\partial}{\partial z_n} \right)_z &\in T_z^{(1,0)} \mathbb{C}^n, \\ (z, w) &= z_1 w_1 + \dots + z_n w_n. \end{aligned}$$

例 2.4 $\mathbb{C}^n$ の「非退化」複素部分多様体.

例 2.5 複素球面

$\mathbb{CS}^n(1) = \{z \in \mathbb{C}^{n+1} \mid (z, z) = 1\}$ は $\mathbb{C}^{n+1}$ の非退化複素超曲面で, 複素リーマン多様体。等質空間としては

$$\mathbb{CS}^n = SO(n+1, \mathbb{C}) / SO(n, \mathbb{C}).$$

複素球面 $\mathbb{CS}^n$ は (実) 球面 $\mathbb{S}^n$ の (余) 接束と同一視できて, 常微分方程式の解を用いて, (正定値) 完備 Ricci flat Kähler 計量が構成できる (Stenzel 計量 [15]).

命題 2.6 非退化複素部分多様体 $\widetilde{M}$: 複素リーマン多様体, M : 複素多様体, $f: M \rightarrow \widetilde{M}$: 非退化正則 immersion,

$$f^{-1}T^{(1,0)}\widetilde{M} = f_*(T^{(1,0)}M) \oplus N^{(1,0)}M.$$

について、次が成り立つ。

$$\text{Gauss formula: } X, Y \in \mathfrak{X}_M^{(1,0)}, \quad \widetilde{\nabla}_X Y = f_*(\nabla_X Y) + \sigma(X, Y),$$

$$\text{Weingarten formula: } X \in \mathfrak{X}_M^{(1,0)}, N \in \mathfrak{X}_{NM}^{(1,0)}, \quad \widetilde{\nabla}_X N = -f_*(A_N X) + \nabla_X^\perp N.$$

さらに

$$X, Y \in \mathfrak{X}_M^{(1,0)}, N \in \mathfrak{X}_{NM}^{(1,0)},$$

$$\begin{aligned} (\sigma(X, Y), N) &= (A_N X, Y), \\ A_N J &= J A_N. \end{aligned}$$

例 2.7 Veronese 曲面

正則 immersion

$$\begin{aligned} \mathbb{CS}^2 \ni z \mapsto z {}^t z \in \text{Sym}_1(3, \mathbb{C}) \\ = \{Z \in M(3, \mathbb{C}) \mid {}^t Z = Z, \text{ trace } Z = 1\} \cong \mathbb{C}^5 \end{aligned}$$

の像は, 中心 $E_3/3$, 半径 $\sqrt{2/3}$ の複素球面 $\mathbb{CS}^4$ に含まれる非退化複素曲面である。

3 複素球面の複素超曲面

$\widetilde{M}^{n+1}$: 複素リーマン多様体, M^n : 複素多様体, $f: M \rightarrow \widetilde{M}$: 非退化正則 immersion について

$$N_z \in N_z^{(1,0)} M, \quad (N_z, N_z) = 1 \quad (\forall z \in M)$$

が, 向きを除いて一意に定まる (単位法ベクトル)。

以下、形作用素 $A = A_N$ とする・

定義 3.1 実空間形上の等径関数

$\widetilde{M}^{n+1}$: 実空間形において、非一定微分可能関数 $F: \widetilde{M} \rightarrow \mathbb{R}$ は、次をみたすとき等径的であるという: $\exists T, S: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$: 微分可能,

$$|\text{grad } F|^2 = T \circ F, \quad \Delta F = S \circ F.$$

このとき、実空間形上の等径関数 $F: \widetilde{M} \rightarrow \mathbb{R}$ について、 F の各レベル超曲面 $F^{-1}(c)$ ($c \in \mathbb{R}$) の主曲率は一定である。([6])

定義 3.2 複素球面上の等径関数

複素球面上の非一定正則関数 $F: \mathbb{CS}^n \rightarrow \mathbb{C}$ は、以下の条件をみたすとき等径的であるという: $\exists T, S: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$: 正則,

$$(\text{grad } F, \text{grad } F) = T \circ F, \quad \Delta F = S \circ F.$$

ここで、 grad や Δ はそれぞれ、 $\mathbb{CS}^n$ の複素内積に関する正則関数の勾配ベクトル場や Hessian の trace を表すものとする。

このとき、複素球面上の等径関数 $F: \mathbb{CS}^n \rightarrow \mathbb{C}$ について、 F の各レベル超曲面 $F^{-1}(c)$ ($c \in \mathbb{C}$) の主曲率は一定である。

例 3.3 $g = 1$

固定した $w \in \mathbb{CS}^n \subset \mathbb{C}^{n+1}$ について、 $F: \mathbb{CS}^n \rightarrow \mathbb{C}$, $F(z) := (z, w)$ とすると、 F は等径関数で、 $\cos \alpha \in \mathbb{C} - \{\pm 1\}$ ($\alpha \in \mathbb{C}$) について、レベル超曲面 $M_\alpha := F^{-1}(\{\cos \alpha\})$ の主曲率は $\cot \alpha$.

さらに「ホロ球面」に対応する複素超曲面も存在する [18].

例 3.4 $g = 2$

$z = (z_1, z_2) \in \mathbb{CS}^n$ ($z_1 \in \mathbb{C}^{k+1}$, $z_2 \in \mathbb{C}^{n-k}$), について、 $F : \mathbb{CS}^n \rightarrow \mathbb{C}$, $F(z) = (z_1, z_1) - (z_2, z_2)$ とすると、 F は等径関数で、 $\cos 2\alpha \in \mathbb{C} - \{0, \pm 1\}$ ($\alpha \in \mathbb{C}$) について、レベル超曲面 $M_\alpha := F^{-1}(\{\cos 2\alpha\})$ の主曲率は $\cot \alpha$ (重複度 $2k$), $-\tan \alpha$ (重複度 $2(n-k-1)$).

例 3.5 $g = 4$, $m_1 = 1$

$\mathbb{C}^{n+1}$ の複素内積に関する Stiefel 多様体 $\tilde{V}_2 = \tilde{V}_2^{2n-1} = \{(z, w) \in \mathbb{C}^{n+1} \times \mathbb{C}^{n+1} \mid (z, z) = (w, w) = 1, (z, w) = 0\}$, を考える。このとき、 $\alpha \in \mathbb{C}^\times$, $\cos \alpha, \sin \alpha, \cos 2\alpha \neq 0$ について、写像 $f_\alpha : \mathbb{C}^\times \times \tilde{V}_2 \rightarrow \mathbb{CS}^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1} \times \mathbb{C}^{n+1}$,

$$f_\alpha(\zeta, (z, w)) = \begin{pmatrix} \cos \alpha \cos \zeta z - \sin \alpha \sin \zeta w \\ \cos \alpha \sin \zeta z + \sin \alpha \cos \zeta w \end{pmatrix},$$

の像は、主曲率が $\frac{1 + \sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}$, $\frac{-1 + \sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}$ (重複度 1), $\tan \alpha$, $-\cot \alpha$ (重複度 $n-1$). の等径超曲面である。

4 複素球面の実超曲面

複素球面においても、実超曲面を考えることができる。 M^{2n-1} を実 $(2n-1)$ 次元多様体、 $f : M^{2n-1} \rightarrow \mathbb{CS}^n$ を immersion とする。

$\forall x \in M$ で $D_x := J((f_*)_x(T_x M)) \cap (f_*)_x(T_x M)$ について $\mathcal{H}_x := \{X - iJX \in T_x^\mathbb{C} M \mid X \in D_x\}$ が非退化のとき、 M を非退化実超曲面という。このとき、 $\exists \xi_x \in D_x^\perp$, $(f_*)_x(T_x M) = D_x \oplus \mathbb{R}\{\xi_x\}$, $|(\xi_x, \xi_x)| = 1$. $N_x := J\xi_x$ を単位法ベクトル場という。

例 4.1 複素球面の「測地球面」

$$S_p(r) = \{\exp_p(rz) \in \mathbb{CS}^n \mid z \in \mathbb{C}^{n+1}, (z, p) = 0, |(z, z)| = 1\}, \quad (r > 0)$$

について、主曲率: $-1/r$ (重複度 1, 主曲率ベクトル ξ), $-\sqrt{(z, z)} \cot(r\sqrt{(z, z)})$ (重複度 $2n-2$).

例 4.2 全測地的複素超球面上の半径 $r > 0$ の tube

$$\{\exp_p(rz) \in \mathbb{CS}^n \mid p \in \mathbb{CS}^{n-1}, z \in T_p^\perp(\mathbb{CS}^{n-1}), |(z, z)| = 1\}, \quad (r > 0)$$

主曲率: $1/r$ (重複度 1, 主曲率ベクトル ξ), $-\sqrt{(z, z)} \tan(r\sqrt{(z, z)})$ (重複度 $2n-2$).

これらは「Hopf 超曲面」(ξ が主曲率ベクトル) である。さらに「 η -umbilical」であるが、非平坦複素空間形の場合と異なり、主曲率は一定ではない。

5 関連する話題

$\mathbb{C}^{n+3}$ の (複素内積に関する) 複素 2 次元等方的部分空間全体 $H_2(\mathbb{C}^{n+3}) = SO(n+3)/SO(n-1)U(2)$ は四元数対称空間 $\tilde{\mathbb{G}}_4(\mathbb{R}^{n+3})$ の twistor 空間である。

$\mathbb{CS}^n$ の Hopf 超曲面の位置ベクトル p と単位法ベクトル N_p について, 「ガウス写像」

$$(p, N_p) \mapsto \pi(\mathbb{C}(p, i, 0) + \mathbb{C}(N_p, 0, i))$$

の像が $\tilde{\mathbb{G}}_4(\mathbb{R}^{n+3})$ の半分次元の全複素部分多様体を与えるのではないか? を考える。

例 5.1 $\mathbb{CS}^n$ 内の全測地的 $\mathbb{RS}^n$ 上の半径 $r > 0$ の tube

$$\begin{aligned} f_r : V_2(\mathbb{R}^{n+1}) &\rightarrow \mathbb{CS}^n \quad (r > 0), f_r(x, y) = \cosh rx + i \sinh ry, \\ f_r(V_2(\mathbb{R}^{n+1})) &= \{\exp_p(riy) \in \mathbb{CS}^n \mid p \in \mathbb{RS}^n, y \in T_p\mathbb{RS}^n, |y| = 1\} \quad (r > 0), \end{aligned}$$

について、主曲率: 0 (重複度 1, 主曲率ベクトル ξ), $-\tanh r$ (重複度 $n-1$), $-\coth r$ (重複度 $n-1$).

そして, $f_r(V_2(\mathbb{R}^{n+1}))$ の「ガウス写像」による像は, $\tilde{\mathbb{G}}_4(\mathbb{R}^{n+3})$ の半分次元全測地的, 全複素部分多様体 $\tilde{\mathbb{G}}_2(\mathbb{R}^{n+1}) = Q^{n-1}$ である。

今後の課題

- $\mathbb{CS}^n$ の実超曲面論, Hopf 超曲面の構造
- (既約) 四元数対称空間の半分次元全複素部分多様体は, ある (概) 複素多様体の Hopf 超曲面 (の平行超曲面の族, normal line congruence) から得られるのでは?

$\mathbb{G}_2(\mathbb{C}^{n+1})$ の場合

$\mathbb{CP}^n$ の Hopf 超曲面の平行超曲面の族、すなわち normal line congruence に対して、その「Gauss 写像」を考えると、その像は $\mathbb{G}_2(\mathbb{C}^{n+1})$ の半分次元の全複素部分多様体である [11, 12].

$G_2/SO(4)$ の場合

$\mathbb{S}^6$ の Hopf 実超曲面から同様のことが言えるのでは? (cf. [3])

参考文献

- [1] D. V. Alekseevsky and S. Marchiafava, *A twistor construction of Kähler submanifolds of a quaternionic Kähler manifold*, Ann. Mat. Pura Appl. **184** (2005), no. 1, 53-74.
- [2] H. Anciaux, *Spaces of geodesics of pseudo-Riemannian space forms and normal congruences of hypersurfaces*, Trans. Amer. Math. Soc., **366** (2014), no. 5, 2699-2718.
- [3] J. Berndt, J. Bolton and L. M. Woodward, *Almost complex curves and Hopf hypersurfaces in the nearly Kähler 6-sphere*, Geom. Dedicata **56** (1995), no. 3, 237-247.
- [4] T. E. Cecil, Q-S. Chi and G. R. Jensen, *Isoparametric hypersurfaces with four principal curvatures*, Ann. of Math. (2) **166** (2007), no. 1, 1-76.
- [5] T. E. Cecil and P. J. Ryan, *Focal sets and real hypersurfaces in complex projective space*, Trans. Amer. Math. Soc. **269** (1982), no. 2, 481-499.
- [6] T. E. Cecil and P. J. Ryan, *Geometry of Hypersurfaces*, Springer Monographs in Mathematics, Springer, New York, NY (2015) DOI 10.1007/978-1-4939-3246-7

- [7] J. T. Cho and M. Kimura, *Hopf hypersurfaces in complex hyperbolic space and submanifolds in indefinite complex 2-plane Grassmannians I*, Topol. Appl., **196** (2015), 594–607.
- [8] J. T. Cho and M. Kimura, *A normal line congruence and minimal Lagrangian submanifolds in $\mathbb{CP}^n$* , Diff. Geom. Appl., **93** (2024), 102099.
- [9] J. T. Cho, M. Kimura and M. Ortega, *A twister construction of Hopf real hypersurfaces in complex hyperbolic space*, J. Math. Soc. Japan, **75** (2023), no. 3, 983–1024.
- [10] M. Kimura, *Real hypersurfaces and complex submanifolds in complex projective space*, Trans. Amer. Math. Soc., **296** (1986), 137–149.
- [11] M. Kimura, *Hopf hypersurfaces in complex projective space and half-dimensional totally complex submanifolds in complex 2-plane Grassmannians I*, Diff. Geom. Appl., **35** (2014), suppl, 156–163.
- [12] M. Kimura, *Hopf hypersurfaces in complex projective space and half-dimensional totally complex submanifolds in complex 2-plane Grassmannians II*, Diff. Geom. Appl., **54** (2017), part A, 44–52.
- [13] C. LeBrun, *Spaces of complex null geodesics in complex-Riemannian geometry*, Trans. Amer. Math. Soc., **228** (1983), 209–231.
- [14] S. Salamon, *Quaternionic Kähler manifolds*, Invent. Math. **67** (1982), no. 1, 143–171.
- [15] M. B. Stenzel, *Ricci-flat metrics on the complexification of a compact rank one symmetric space*, Manuscripta Math. **80** (1993), no. 2, 151–163.
- [16] R. Takagi, *On homogeneous real hypersurfaces in a complex projective space*, Osaka J. Math. **10** (1973), 495–506.
- [17] M. Takeuchi, *Totally complex submanifolds of quaternionic symmetric spaces*, Japan. J. Math. (N.S.) **12** (1986), no. 1, 161–189.
- [18] K. Tsukada, *Complex Lie sphere geometry and totally complex submanifolds of real Grassmann manifolds*, preprint.
- [19] J. A. Wolf, *Complex homogeneous contact manifolds and quaternionic symmetric spaces*, J. Math. Mech., **14** (1965), 1033–1047.