

無限次元リーマン部分多様体論とゲージ理論

小池 直之 (東京理科大学)

1. イントロダクション

1989年, C. L. Terng([T1]) は, (可分な) ヒルベルト空間 V 内で, 良い焦構造をもつ余次元有限の部分多様体として, 固有フレッドホルム部分多様体という概念を導入した. 部分多様体の焦点は, その法指数写像 $\exp^\perp$ の臨界値として定義されるので, この概念は, 法指数写像に条件を課すことにより, 定義される. V が平坦であるため, 法指数写像の各点における微分は, M の形作用素によって支配される. それゆえ, M が良い焦構造をもつことと M の形作用素達 $A_\xi : T_p M \rightarrow T_p M$ ($\xi : M$ の p 法ベクトル) が良い作用素であることは, ほぼ同値であり, 実際, 固有フレッドホルム性 (固有性とフレッドホルム性) のうち, フレッドホルム性は, 部分多様体の形作用素達がコンパクト作用素であることと同値である. さらに, C. L. Terng([T1]) は, V 内の等径部分多様体を, 固有フレッドホルム部分多様体で, 切断をもち (つまり, M の各法傘が全測地的である), 法接続が平坦で, 任意の平行法ベクトル場 $\tilde{\xi}$ に対し, $A_{\tilde{\xi}_x}$ ($x \in M$) のスペクトラムが, 重複度も込めて, x から独立しているものとして, 定義した.

1995年に, C. King と C. L. Terng([KT]) は, (可分な) ヒルベルト空間間のコンパクト自己随伴作用素に対し, その ζ -トレースという概念を定義し, その後, 2006年に, Heintze, X. Liu と C. Olmos([HLO]) は, その正則化されたトレースという概念を定義した. これらのトレースは, 大抵の場合, 一致し, ζ -トレースよりも正則化されたトレースの方が取り扱いやすい. Heintze, X. Liu と C. Olmos([HLO]) は, ヒルベルト空間 V 内の固有フレッドホルム部分多様体で, その形作用素 A_ξ ($\xi \in T^\perp M$) の正則化されたトレース (これは, $\text{Tr}_r A_\xi$ と表される) と A_ξ^2 の通常のトレースが存在するようなものを, 正則化可能な部分多様体とよんだ. 彼ら ([HLO]) は, V 内の等径部分多様体を, 正則化可能な部分多様体で, 切断をもち, 法接続が平坦であり, かつ, その十分近くで平行部分多様体達が放射方向に関して一定の平均曲率をもつようなものとして定義した. 彼ら ([HLO]) は, V 内の正則化可能な部分多様体が, Terng の意味で等径であることと彼らの意味で等径であることが同値であることを示した.

リーマンヒルベルト多様体 $\widetilde{M}$ 内の部分多様体 M の法指数写像の各点における微分は, M の形作用素 A_ξ ($\xi \in T^\perp M$) だけでなく, M の法ヤコ作用素 $\tilde{R}(\cdot, \xi)\xi$, さらに, M から離れた $\widetilde{M}$ の曲率情報によって決定されるため, M の焦構造も, それらの情報によって決定される. 特に, $\widetilde{M}$ が局所対称である場合は, M の法指数写像の各点における微分は, M の形作用素と法ヤコ作用素のみによって決定されるため, M の焦構造も, 形作用素の情報だけでなくそれらの情報によって決定される. この事実を考慮して, 今回, 一般のリーマンヒルベルト多様体内で, CSJ 部分多様体という概念を定義した. M の法指数写像の各点における微分は, M の形作用素だけでは決定されないため, $\widetilde{M}$ 内の**弱等径部分多様体**という概念を曲率不変な固有フレッドホルム部分多様体で, 切断をもち (つまり, M の各法傘が全測地的である), 法接続が平坦であり, かつ, 任意の平行法ベクトル場 $\tilde{\xi}$ に対し, $A_{\tilde{\xi}_x}, \tilde{R}(\cdot, \tilde{\xi}_x)\tilde{\xi}_x|_{T_x M}$ ($x \in M$) のスペクトラムが, 各々, 重複度も込めて, x から独立しているものとして定義した. ここで, 曲率不変とは, $\tilde{R}(T_x M, \xi)\xi \subset T_x M$ ($\forall \xi \in T_x^\perp M \forall x \in M$) が成り立つことを意味する. また, 今

回, リーマンヒルベルト多様体内で, 正則化可能な部分多様体の概念を次のように定義した. M をリーマンヒルベルト多様体 $\widetilde{M}$ 内の曲率不変な CSJ 部分多様体とする. 任意の $\xi \in T_x^\perp M$ に対し, M の形作用素 A_ξ と法ヤコビ作用素 $\widetilde{R}(\cdot, \xi)\xi|_{T_x M}$ の正則化されたトレース (これは, $\text{Tr}_r A_\xi$, $\text{Tr}_r \widetilde{R}(\cdot, \xi)\xi$ と表される), 及び, A_ξ^2 , $(\widetilde{R}(\cdot, \xi)\xi|_{T_x M})^2$ の通常のトレースが存在するようなものを, **正則化可能な部分多様体** とよんだ. また, その特別なものとして, **等径部分多様体** を, 正則化可能な部分多様体で, 切断をもち, 法接続が平坦であり, かつ, その十分近くの平行部分多様体達が放射方向に関して, 一定の平均曲率をもつようなものとして定義した.

$\mathcal{G} \curvearrowright \widetilde{M}$ をヒルベルトリー群 $\mathcal{G}$ のリーマンヒルベルト多様体 $\widetilde{M}$ への C^∞ 作用とする. この作用が次の条件を満たすとする:

(HI) 任意の $g \in \mathcal{G}$ と任意の正則点 $u \in \widetilde{M}$ に対し,

$$\text{pr}_{T_{g \cdot u}^\perp(\mathcal{G} \cdot u)} \circ g_*|_{T_u^\perp(\mathcal{G} \cdot u)} : T_u^\perp(\mathcal{G} \cdot u) \rightarrow T_{g \cdot u}^\perp(\mathcal{G} \cdot u)$$

は線形等長変換である.

ここで, $\text{pr}_{T_{g \cdot u}^\perp(\mathcal{G} \cdot u)}$ は, $T_{g \cdot u} \mathcal{A}_P^{H^s}$ から $T_{g \cdot u}^\perp(\mathcal{G} \cdot u)$ への直交射影を表す. このとき, 作用 $\mathcal{G} \curvearrowright \widetilde{M}$ を**水平的等長作用**という. さらに, 水平的等長作用 $\mathcal{G} \curvearrowright \widetilde{M}$ が, 次の条件を満たすとする:

(HH) $\mathcal{G} \curvearrowright \widetilde{M}$ の余等質性が有限であり, 完備な平坦な全測地的部分多様体 Σ で, すべての $\mathcal{G}$ 軌道と直交的に交わるものが存在する.

このとき, 作用 $\mathcal{G} \curvearrowright \widetilde{M}$ を**水平的超極作用**という. また, 水平的超極作用 $\mathcal{G} \curvearrowright \widetilde{M}$ が, 次の条件を満たすとする:

(R) $\mathcal{G} \curvearrowright \widetilde{M}$ の各主軌道は, 正則化可能な部分多様体である.

このとき, 作用 $\mathcal{G} \curvearrowright \widetilde{M}$ を**正則化可能な水平的超極作用**という. 今回, これらの作用に関して, 次の事実を示した.

定理 A ([K2]).

(i) 水平的超極可能な作用の主軌道は, 弱等径部分多様体である.

(ii) 正則化可能な水平的超極作用の主軌道は, 等径部分多様体である.

G をコンパクト半単純リー群とし, P を閉リーマン多様体 B 上の G バンドルとする. また, $\mathcal{G}_P^{H^{s+1}}$ を P の H^s 級ゲージ変換群とし, $\mathcal{A}_P^{H^s}$ を P の H^s 級接続全体のつくるアフィンヒルベルト空間とする. ここで, $s > \frac{1}{2} \dim B - 1$ とする. このとき, $\mathcal{G}_P^{H^{s+1}}$ は, C^∞ 級ヒルベルトリー群になり ([P] を参照), 作用 $\mathcal{G}_P^{H^{s+1}} \curvearrowright \mathcal{A}_P^{H^s}$ は, C^∞ 級作用になる ([U] を参照). また, $\mathcal{A}_P^{H^s}$ のリーマン計量 g_s で, 作用 $\mathcal{G}_P^{H^{s+1}} \curvearrowright (\mathcal{A}_P^{H^s}, g_s)$ が等長作用になるようなものが自然な方法で定義される. 今回, G の対称部分群の組 K_1, K_2 に対し, $\mathcal{G}_P^{H^{s+1}}$ のある閉部分群 $\mathcal{G}_{K_1, K_2}^{H^{s+1}}$ とアフィンヒルベルト空間 $\mathcal{A}_P^{H^s}$ に付随するヒルベルト空間 $\Omega_{T,1}^{H^s}(P)$ のある閉部分空間 W との半直積 $\widetilde{\mathcal{G}_{K_1, K_2}^{H^{s+1}}} := \mathcal{G}_{K_1, K_2}^{H^{s+1}} \times W$ を定義し, 作用 $\widetilde{\mathcal{G}_{K_1, K_2}^{H^{s+1}}} \curvearrowright (\mathcal{A}_P^{H^s}, g_s)$ について, 次の事実を示した.

定理 B ([K2]) 作用 $\widetilde{\mathcal{G}_{K_1, K_2}^{H^{s+1}}} \curvearrowright (\mathcal{A}_P^{H^s}, g_s)$ は, 水平的超極作用であり, それゆえ, この作用の主軌道は, 弱等径部分多様体である.

2. ヒルベルト空間内の部分多様体

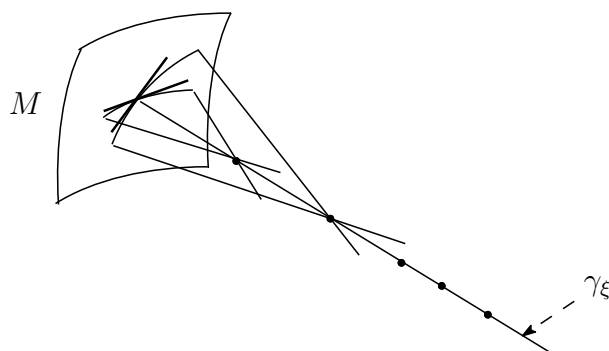
f を、ヒルベルト多様体 M から (可分な) ヒルベルト空間 V への C^∞ はめ込みとし、その誘導計量 $f^*\tilde{g}$ を g で表す. このとき, (M, g) は V 内のリーマン部分多様体とよばれる. 以下, M の余次元は有限であるとする. (M, g) が次の2条件を満たすとき, (M, g) を固有フレッドホルム部分多様体という:

- (P) 任意の $r > 0$ に対し, $\exp^\perp|_{B^{\perp r}(M)}$ は固有写像である (固有性);
- (F) 任意の $\xi \in T^\perp M$ に対し, $\exp^\perp_{*\xi}$ はフレッドホルム作用素である (フレッドホルム性).

注意 本稿では, 性質 (F) を満たす部分多様体をフレッドホルム部分多様体とよぶことにする.

命題 2.1. (M, g) が固有フレッドホルム部分多様体ならば, その形作用素 A_ξ ($\xi \in T^\perp M$) は, コンパクト作用素である.

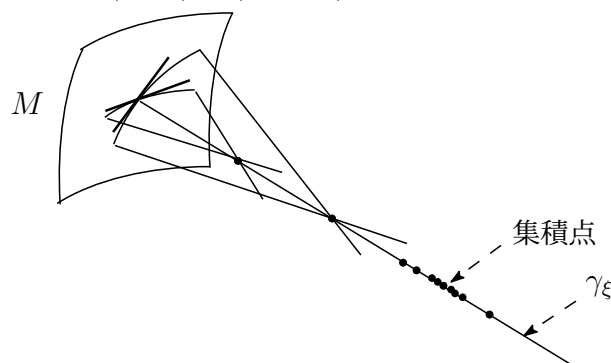
(M, g) : 固有フレッドホルム部分多様体



M の法測地線 γ_ξ に沿う焦点の全体は, 集積点をもたず, 各焦点の重複度は有限である.

図 2.1: 固有フレッドホルム部分多様体の焦構造

(M, g) : (一般の) リーマン部分多様体



M の法測地線 γ_ξ に沿う焦点の全体は, 集積点をもつ可能性があり, 各焦点の重複度は無限になる可能性がある.

図 2.2: 一般の無限次元部分多様体の焦構造

(M, g) を $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ 内の固有フレッドホルム部分多様体とする. (M, g) が, さらに, 次の3条件を満たすとき, (M, g) を**等径部分多様体**という:

(TI-i) (M, g) の法ホロノミー群は自明である;

(TI-ii) (M, g) は平坦切断をもつ;

(TI-iii) 各平行法ベクトル場 ξ に対し, A_{ξ_p} のスペクトラムは, 重複度を込めて, $p \in M$ から独立している.

この概念は, 1989 年に, C.L. Terng([T1] を参照) によって導入された. 外の空間が平坦, かつ, 法接続が平坦なので, リッチ方程式により, $\{A_\xi \mid \xi \in T_p^\perp M\}$ は対称変換の可換族になる. それゆえ, この族は, $T_p M$ のある正規直交基底に関して同時に対角化される. この可換族の同時固有空間分解を

$$T_p M = \overline{E_0^p \oplus \left(\bigoplus_{i \in I} E_i^p \right)} \quad \left(E_0^p := \bigcap_{\xi \in T_p^\perp M} \text{Ker } A_\xi \right)$$

とする. 各 $\xi \in T_p^\perp M$ に対し, $(\lambda_i^p)_\xi$ を $A_\xi|_{E_i^p} = (\lambda_i^p)_\xi \cdot \text{id}$ によって定義する. このとき, 対応 $\lambda_i^p : \xi \mapsto (\lambda_i^p)_\xi$ ($\xi \in T_p^\perp M$) は, $T_p^\perp M$ 上の線形関数になる (つまり, $\lambda_i^p \in (T_p^\perp M)^*$). $\lambda_i \in \Gamma((T^\perp M)^*)$ を $(\lambda_i)_p := \lambda_i^p$ ($p \in M$) によって定義する. この切断 λ_i を (M, g) の**主曲率**という. 法ベクトル場 $\mathbf{n}_i$ を $\lambda_i(\cdot) = \langle \mathbf{n}_i, \cdot \rangle$ によって定義する. この法ベクトル場 $\mathbf{n}_i$ を (M, g) の**主曲率法ベクトル場**という. TM の部分ベクトルバンドル E_i を $E_i := \prod_{p \in M} E_i^p$ によって定義する. この接分布 E_i を (M, g) の**主曲率分布**という. $T_p^\perp M$ のアフィン超平面 l_i^p を $l_i^p := (\lambda_i)_p^{-1}(1)$ によって定義する. このアフィン超平面 l_i^p を (M, g) の点 p における**焦超平面**という.

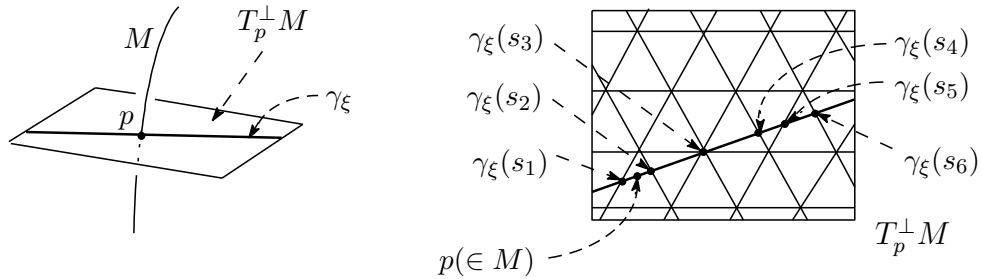


図 2.3: 焦超平面族のつくる三角形分割

3. ヒルベルト空間内の等径部分多様体の例

この節において, ヒルベルト空間内の等径部分多様体の例を紹介する. そのために, まず, 1989 年, C.L. Terng([T]) によって定義されたコンパクト半単純リー群に対する平行移動写像の概念を説明する. G をコンパクト連結半単純リー群とし, $\mathfrak{g}$ をそのリー代数とする. $\mathfrak{g}$ の $\text{Ad}(G)$ 不変な内積 B から G の両側不変なリーマン計量が決まる. 閉区間 $[0, 1]$ 上の自明な G -バンドル $[0, 1] \times G$ の H^0 接続の空間は, $[0, 1]$ を定義域とする $\mathfrak{g}$ における H^0 曲線全体のなす (可分な) ヒルベルト空間 $H^0([0, 1], \mathfrak{g})$ と同一視される. $H^0([0, 1], \mathfrak{g})$ から G への写像 ϕ を次のように定義する:

$$\begin{aligned} \phi(u) &:= g_u(1) \quad (u \in H^0([0, 1], \mathfrak{g})) \\ (g_u &\in H^1([0, 1], G) \text{ s.t. } g_u(0) = e \text{ \& } g_{u*}^{-1} g'_u = u) \end{aligned}$$

ここで、 e は G の単位元、 g'_u は g_u の弱微分、 $g_{u*}^{-1}g'_u$ は $(g_{u*}^{-1}g'_u)(t) = L_{g_u(t)*}^{-1}(g'_u(t))$ ($t \in [0, 1]$) によって定義される $H^0([0, 1], \mathfrak{g})$ の元を表す ($L_{g_u(t)}$ は $g_u(t)$ による左作用を表す). ϕ は、 G に対する平行移動写像と呼ばれる.

命題 3.1([HLO]). ϕ は、各ファイバーが極小な正則化された部分多様体であるようなリーマン沈めこみになる.

自明な G -バンドル $[0, 1] \times G$ のゲージ変換群は $[0, 1]$ を定義域とする G における H^1 曲線全体のなすヒルベルトリー群 $H^1([0, 1], G)$ と同一視される. この群は、 $H^0([0, 1], \mathfrak{g})$ にゲージ変換の接続への作用として、次のように作用する:

$$g * u := \text{Ad}(g)u - g'g_*^{-1} \quad (g \in H^1([0, 1], G) \quad (u \in H^0([0, 1], \mathfrak{g})).$$

ここで、 Ad は G の随伴表現を表し、 $g'g_*^{-1}$ は $(g'g_*^{-1})(t) = R_{g(t)*}^{-1}(g'(t))$ ($t \in [0, 1]$) によって定義される $H^0([0, 1], \mathfrak{g})$ の元を表す ($R_{g_u(t)}$ は $g_u(t)$ による右作用を表す). G の閉部分群 H, K に対し、 $P(G, H \times K)$ を

$$P(G, H \times K) := \{g \in H^1([0, 1], G) \mid (g(0), g(1)) \in H \times K\}$$

によって定義する. 特に、 $P(G, \{e\} \times \{e\})$ を $\Omega_e(G)$ と表す. このとき、次の事実が成り立つ:

命題 3.2([TT]). (i) $H^1([0, 1], G)$ の $H^0([0, 1], \mathfrak{g})$ への上述の作用は等長的である.

(ii) 上述の作用の下、 $P(G, \{e\} \times G)$ は $H^0([0, 1], \mathfrak{g})$ に推移的かつ自由に作用する.

(iii) $\phi(g * u) = g(0)\phi(u)g(1)^{-1}$ ($g \in H^1([0, 1], G)$, $u \in H^0([0, 1], \mathfrak{g})$) が成り立つ.

(iv) 上述の作用の下、 $\phi: H^0([0, 1], \mathfrak{g}) \rightarrow G$ は $\Omega_e(G)$ バンドルとみなされる.

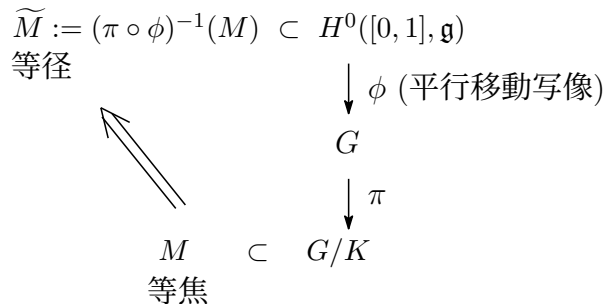
G/K をコンパクト型リーマン対称空間とし、 $\pi: G \rightarrow G/K$ を自然な射影とする. C. L. Terng と G. Thorbergsson([]) は、次の事実を示した.

定理 3.3([TT]). M が G/K 内の等焦部分多様体ならば、 $(\pi \circ \phi)^{-1}(M)$ は、 $H^0([0, 1], \mathfrak{g})$ 内の等径部分多様体になる.

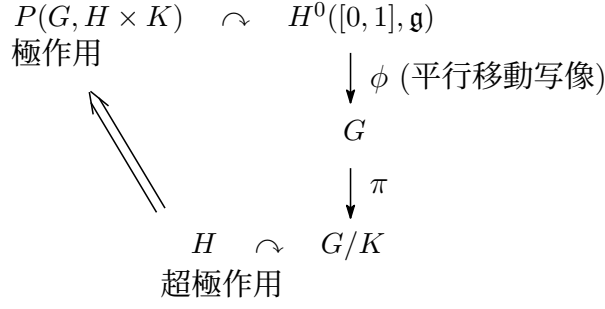
等焦部分多様体の定義については、[] を参照のこと. H を G の連結閉部分群とする. C. L. Terng([]) は、次の事実を示した.

定理 3.4([T2]). $H \curvearrowright G/K$ が超極作用ならば、 $P(G, H \times K) \curvearrowright H^0([0, 1], \mathfrak{g})$ は超極作用である.

(注) $P(G, H \times K) \curvearrowright H^0([0, 1], \mathfrak{g})$ は超極作用なので、この作用の主軌道は等径部分多様体である.



図式 3.1: ヒルベルト空間内の等径部分多様体の構成法



図式 3.2: ヒルベルト空間上の超極作用の構成法

4. ホロノミー要素写像と引き戻し接続写像

(B, g) を閉リーマン多様体, G をコンパクト半単純リー群とし, $\pi : P \rightarrow (B, g)$ を G バンドルとする. $\mathcal{A}_P^{H^s}$ を P の (ソボレフクラス) H^s 級の接続全体のなすアフィンヒルベルト空間とし, $\Omega_{T,1}^{H^s}(P, \mathfrak{g})$ を P 上の H^s 級のテンソリアル 1 次微分形式全体のなすヒルベルト空間とする. $\omega_0 \in \mathcal{A}_P^{H^s}$ を基点としてとる. $\text{Ad}(P)$ を P の随伴バンドル, つまり, P の随伴表現 Ad_G による同伴ベクトルバンドル $P \times_{\text{Ad}_G} \mathfrak{g}$ とし, $\Omega_1^{H^s}(B, \text{Ad}(P))$ を B 上の $\text{Ad}(P)$ に値をとる H^s 級の 1 次微分形式全体のなすヒルベルト空間とする. このとき, 図式 4.1 におけるように, $\mathcal{A}_P^{H^s}$, $\Omega_{T,1}^{H^s}(P, \mathfrak{g})$, $\Omega_1^{H^s}(B, \text{Ad}(P))$ の間には, 自然な 1 対 1 対応が存在する.

$$\begin{array}{ccccc}
\mathcal{A}_P^{H^s} & \approx & T_{\omega_0} \mathcal{A}_P^{H^s} = \Omega_{T,1}^{H^s}(P, \mathfrak{g}) & \approx & \Omega_1^{H^s}(B, \text{Ad}(P)) \\
\Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow \\
\omega & \longleftrightarrow & A := \omega - \omega_0 & \longleftrightarrow & \hat{A} \\
& & \hat{A}_{\pi(u)}(\pi_*(v)) = u A_u(v) \quad (u \in P, v \in T_u P)
\end{array}$$

図式 4.1: $\mathcal{A}_P^{H^s}$, $\Omega_{T,1}^{H^s}(P, \mathfrak{g})$, $\Omega_1^{H^s}(B, \text{Ad}(P))$ の間の自然な 1 対 1 対応

$\Omega_{T,1}^{H^s}(P, \mathfrak{g})$ の接続 ω に付随して, H^s 内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle_s^\omega$ が, 次式によって与えられる:

$$\begin{aligned}
\langle A_1, A_2 \rangle_s^\omega &:= \int_{x \in B} \langle (\hat{A}_1)_x, \widehat{\square_\omega^s(A_2)}_x \rangle_{B, \mathfrak{g}} dv_B \\
&\quad (A_1, A_2 \in \Omega_{T,1}^{w, 2s}(P, \mathfrak{g})) \\
&\quad \left(\square_\omega := \begin{cases} d_\omega \circ d_\omega^* + d_\omega^* \circ d_\omega + \text{id} & (k \geq 1) \\ d_\omega^* \circ d_\omega + \text{id} & (k = 0) \end{cases} \right) \\
&\quad \left(\begin{array}{l} d_\omega : \omega \text{ に関する共変外微分} \\ d_\omega^* : d_\omega \text{ の } L^2 \text{ 内積に関する随伴作用} \end{array} \right) \\
&\quad \left(\begin{array}{l} \langle \cdot, \cdot \rangle_{B, \mathfrak{g}} : g \text{ と } \mathfrak{g} \text{ の内積によって定義される} \\ T^*B \otimes \text{Ad}(P) \text{ のファイバー計量} \end{array} \right) \\
&\quad \left(dv_B : (B, g) \text{ の体積要素} \right)
\end{aligned}$$

$\mathcal{A}_P^{H^s}$ 上の C^∞ 級リーマン計量 g_s が, $(g_s)_\omega := \langle \cdot, \cdot \rangle_s^\omega$ ($\omega \in \mathcal{A}_P^{H^s}$) によって定義される.

$\mathcal{G}_P^\infty$ を, id_B をカバーする P の C^∞ 級ゲージ変換全体のなす群とし, 群 $\widehat{\mathcal{G}}_P^\infty$ を

$$\begin{aligned}\widehat{\mathcal{G}}_P^\infty := \{ \widehat{\mathbf{g}} \in H^\infty(P, G) \mid \widehat{\mathbf{g}}(ug) &= \text{Ad}_G(g^{-1})(\widehat{\mathbf{g}}(u)) \\ (\forall u \in P, \forall g \in G) \}\end{aligned}$$

によって定義する. ここで, Ad_G は, 次式によって定義される G から G の自己同型群 $\text{Aut}(G)$ への写像を表す:

$$\text{Ad}_G(g_1)(g_2) := g_1 g_2 g_1^{-1} \quad (g_1, g_2 \in G).$$

$P \times_{\text{Ad}} G$ を P の $\text{Ad}_G : G \rightarrow \text{Aut}(G)$ による同伴 G バンドルとし, $\Gamma^\infty(P \times_{\text{Ad}} G)$ を $P \times_{\text{Ad}} G$ の C^∞ 切断の空間とする. $\mathcal{G}_P^\infty, \widehat{\mathcal{G}}_P^\infty, \Gamma^\infty(P \times_{\text{Ad}} G)$ は, 自然な 1 対 1 対応の下に, 同一視される. 1987 年に, Groisser と Parker([]) は, $\Gamma^\infty(P \times_{\text{Ad}} G)$ の H^{s+1} 完備化 $\Gamma^{H^{s+1}}(P \times_{\text{Ad}} G)$ を定義した. それに伴って, $\mathcal{G}_P^\infty, \widehat{\mathcal{G}}_P^\infty$ の H^s 完備化も定義される. それらを $\mathcal{G}_P^{H^{s+1}}, \widehat{\mathcal{G}}_P^{H^{s+1}}$ と表す. $\mathcal{G}_P^{H^{s+1}}$ は, ゲージ変換の接続への作用として, $\mathcal{A}_P^{H^s}$ に作用する. 以下, $s > \frac{1}{2} \dim B - 1$ と仮定する. このとき, 次の事実が成り立つ.

定理 4.1 (R. S. Palais([P]), K. Uhlenbeck([U])).

- (i) $\mathcal{G}_P^{H^{s+1}}$ は C^∞ 級ヒルベルトリー群である ([P]).
- (ii) $\mathcal{G}_P^{H^{s+1}} \curvearrowright \mathcal{A}_P^{H^s}$ は, C^∞ 級である ([U]).
- (iii) $\mathcal{G}_P^{H^{s+1}} \curvearrowright (\mathcal{A}_P^{H^s}, \langle \cdot, \cdot \rangle_s^\omega)$ は, 等長的でない ([U]).
- (iv) $\mathcal{G}_P^{H^{s+1}} \curvearrowright (\mathcal{A}_P^{H^s}, g_s)$ は, 等長的である ([U]).

$c : [0, 1] \rightarrow B$ を, $x_0 (\in B)$ を発する定速 $a (> 0)$ の C^∞ 曲線とし, $\sigma : [0, 1] \rightarrow P$ を, c の $u_0 \in \pi^{-1}(x_0)$ を発する ω_0 に関する水平リフトとする. また, $\mathcal{P}_c^\omega$ を c に沿う ω に関する平行移動とする.

定義 写像 $\text{hol}_c : \mathcal{A}_P^{H^s} \rightarrow G$ を

$$\mathcal{P}_c^\omega(u_0) = \mathcal{P}_c^{\omega_0}(u_0) \cdot \text{hol}_c(\omega) \quad (\omega \in \mathcal{A}_P^{H^s})$$

によって定義する. この写像 hol_c を c に沿うホロノミー要素写像という. 特に, $c(0) = c(1)$ のとき, この写像を c に沿うホロノミー写像という.

— **定義** 写像 $\mu_c : \mathcal{A}_P^{H^s} \rightarrow H^s([0, 1], G)$ を

$$(\mu_c(\omega))(t) := -\omega_{\sigma(t)}(\sigma'(t)) = -(\sigma^*\omega)_t \left(\frac{d}{dt} \right) \quad (t \in [0, 1], \omega \in \mathcal{A}_P^{H^s})$$

によって定義する. この写像 μ_c を c に沿う引き戻し接続写像という.

$[0, 1]$ 上の自明な G バンドルを P^o と表す. $P = P^o$ のとき, $\mathcal{A}_P^{H^s}$ の上述の C^∞ 級リーマン計量 g_s を, g_s^o と表す.

命題 4.2. ([K1]) (i) $\mu_c : (\mathcal{A}_P^{H^s}, g_s) \rightarrow (H^s([0, 1], \mathfrak{g}), g_s^o)$ は, a 倍の相似沈め込み, かつ, 線形である.

(ii) $\phi \circ \mu_c = \text{hol}_c$ が成り立つ.

定理 4.3 ([K1]) (i) $\text{hol}_c : (\mathcal{A}_P^{H^s}, g_s) \rightarrow (G, g_G)$ は, a 倍の相似沈め込みである.

(ii) $\text{hol}_c : (\mathcal{A}_P^{H^0}, g_0) \rightarrow (G, g_G)$ は, 極小な正則化可能なファイバーをもつ.

$\mathcal{G}_P^{H^{s+1}}$ の閉部分群 $(\mathcal{G}_P^{H^{s+1}})_{x_0}$ を

$$(\mathcal{G}_P^{H^{s+1}})_{x_0} := \{\mathbf{g} \in \mathcal{G}_P^{H^{s+1}} \mid \mathbf{g}|_{\pi^{-1}(x_0)} = \text{id}_{\pi^{-1}(x_0)}\}$$

によって定義し, 作用 $(\mathcal{G}_P^{H^{s+1}})_{x_0} \curvearrowright \mathcal{A}_P^{H^s}$ の軌道写像を $\pi_{(\mathcal{G}_P^{H^{s+1}})_{x_0}}$ と表す. このとき, hol_c は, 各 $(\mathcal{G}_P^{H^{s+1}})_{x_0}$ 軌道上で一定なので, $\bar{\mu}_c \circ \pi_{(\mathcal{G}_P^{H^{s+1}})_{x_0}} = \text{hol}_c$ を満たす写像 $\bar{\mu}_c : \mathcal{A}_P^{H^s} / (\mathcal{G}_P^{H^{s+1}})_{x_0} \rightarrow G$ が存在する. このとき, 次の事実が成り立つ.

定理 4.4([K1]) M が (G, g_G) 内の等焦部分多様体ならば, $\text{hol}_c^{-1}(M)$ は, ヒルベルト空間 $(\mathcal{A}_P^{H^s}, \langle \cdot, \cdot \rangle_s^{\omega_0})$ 内の等径部分多様体になる.

$$\begin{array}{ccc} \text{hol}_c^{-1}(M) \subset (\mathcal{A}_P^{H^s}, \langle \cdot, \cdot \rangle_s^{\omega_0}) & \xrightarrow{\mu_c} & H^s([0, 1], \mathfrak{g}) \supset \phi^{-1}(M) \\ \text{等径} & \searrow \text{hol}_c & \downarrow \phi \\ & \mathcal{A}_P^{H^s} / (\mathcal{G}_P^{H^{s+1}})_{x_0} & \xrightarrow{\bar{\mu}_c} G \supset M \\ & s > [\frac{1}{2} \dim B - 1] & \text{等焦} \end{array}$$

- $\phi^{-1}(M)$: 等径 (Pinkall-Thorbergsson ([?]))
- $\text{hol}_c^{-1}(M)$: 等径 (K ([K1]))
- $\phi^{-1}(M) : \Omega_e(G)$ 不変, $\text{hol}_c^{-1}(M) : (\mathcal{G}_P^{H^{s+1}})_{x_0}$ 不変
- $(\mathcal{G}_P^{H^{s+1}})_{x_0} \curvearrowright (\mathcal{A}_P^{H^s}, \langle \cdot, \cdot \rangle_s^{\omega_0})$: 滑らかであるが, 非等長的 (Uhlenbeck([U]))

図式 4.2: $(\mathcal{A}_P^{H^s}, \langle \cdot, \cdot \rangle_s^{\omega})$ 内の等径部分多様体の構成法

$(\mathcal{A}_P^{H^s}, \langle \cdot, \cdot \rangle_s^{\omega})$ は, リーマンヒルベルト多様体 $(\mathcal{A}_P^{H^s}, g_s)$ の点 ω における接空間 $(T_\omega \mathcal{A}_P^{H^s}, (g_s)_\omega)$ とみなされるので, 自然と, 次の問題が生ずる.

問題 4.1. (G, g_G) 内の等焦部分多様体 M に対し, $\text{hol}_c^{-1}(M)$ は, リーマンヒルベルト多様体 $(\mathcal{A}_P^{H^s}, g_s)$ 内で, どのような部分多様体になるか?

$$\begin{array}{ccc} \text{hol}_c^{-1}(M) \subset (\mathcal{A}_P^{H^s}, g_s) & \xrightarrow{\mu_c} & H^s([0, 1], \mathfrak{g}) \supset \phi^{-1}(M) \\ ??? & \searrow \text{hol}_c & \downarrow \phi \quad \text{等径} \\ & \mathcal{A}_P^{H^s} / (\mathcal{G}_P^{H^{s+1}})_{x_0} & \xrightarrow{\bar{\mu}_c} G \supset M \\ & & \text{等焦} \end{array}$$

- $(\mathcal{G}_P^{H^{s+1}})_{x_0} \curvearrowright (\mathcal{A}_P^{H^s}, g_s)$: 滑らか, かつ, 等長的

図式 4.3: $\text{hol}_c^{-1}(M) \subset (\mathcal{A}_P^{H^s}, g_s)$ はどのような部分多様体か?

5. リーマンヒルベルト多様体内の等径部分多様体

この節において、 $\square$ において導入されたリーマンヒルベルト多様体内の等径部分多様体の概念を定義する．ヒルベルト空間内の場合と同様に，リーマンヒルベルト多様体内でも，同様に固有フレッドホルム部分多様体の概念を定義される． $(\widetilde{M}, \widetilde{g})$ をリーマンヒルベルト多様体とし， (M, g) を $(\widetilde{M}, \widetilde{g})$ 内のリーマンヒルベルト部分多様体とする． (M, g) が次の条件を満たすとき， (M, g) を**曲率不変**な部分多様体という：

$$\widetilde{R}(\cdot, \xi)\xi(T_p M) \subset T_p M \quad (\forall p \in M, \forall \xi \in T_p^\perp M).$$

ここで， $\widetilde{R}$ は， $(\widetilde{M}, \widetilde{g})$ の曲率テンソル場を表す．以下， (M, g) は曲率不変とする． A_ξ を (M, g) の $\xi (\in T_p^\perp M)$ に対する形作用素とし， $\widetilde{R}(\xi) := \widetilde{R}(\cdot, \xi)\xi|_{T_p M}$ とおく． $\widetilde{R}(\xi)$ は， (M, g) の $\xi (\in T^\perp M)$ に対する**法ヤコビ作用素**とよばれる．

(M, g) を $(\widetilde{M}, \widetilde{g})$ 内のリーマンヒルベルト部分多様体とする． (M, g) が次の3条件を満たすとき， (M, g) を**CSJ 部分多様体**という：

- (CSJ-i) (M, g) は曲率不変である；
- (CSJ-ii) $A_\xi (\forall \xi \in TM)$ は，コンパクト作用素である；
- (CSJ-iii) $\widetilde{R}(\xi) (\forall \xi \in TM)$ は，コンパクト作用素である．

V を(可分な)ヒルベルト空間とし， $\mathcal{A} : V \rightarrow V$ をコンパクト作用素とする． $\mathcal{A}$ が次の条件を満たすとき， $\mathcal{A}$ は**正則化可能**であるという：

$$\left\{ \begin{array}{l} \exists \text{Tr}_r \mathcal{A} (< \infty), \exists \text{Tr} \mathcal{A}^2 (< \infty) \\ \left(\begin{array}{l} \text{Tr}_r \mathcal{A} := \sum_{i=1}^{\infty} (\lambda_i + \mu_i) \\ (\text{Spec } \mathcal{A} = \{\mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots \leq 0 \leq \dots \leq \lambda_2 \leq \lambda_1\}) \\ \text{Tr} \mathcal{A}^2 := \sum_{i=1}^{\infty} \nu_i \\ (\text{Spec } \mathcal{A}^2 = \{\nu_1 \geq \nu_2 \geq \dots > 0\}) \end{array} \right) \end{array} \right.$$

(M, g) を $(\widetilde{M}, \widetilde{g})$ 内の CSJ 部分多様体とする．さらに， (M, g) が次の条件を満たすとき， (M, g) を**正則化可能部分多様体**という：

(RS) $A_\xi, \widetilde{R}(\xi) (\forall \xi \in T^\perp M)$ は正則化可能である．

(M, g) を $(\widetilde{M}, \widetilde{g})$ 内の CSJ 部分多様体で，自明な法ホロノミー群をもつようなものとする．それゆえ，任意の法ベクトルは， M 上の平行法ベクトル場に拡張される． M の平行な法ベクトル場 $\widetilde{\xi}$ に対し，写像 $\eta_{\widetilde{\xi}} : M \rightarrow \widetilde{M}$ を

$$\eta_{\widetilde{\xi}}(p) := \exp^\perp(\widetilde{\xi}_p) (= \gamma_{\widetilde{\xi}_p}(1)) \quad (p \in M)$$

によって定義する．ここで， $\gamma_{\widetilde{\xi}_p}$ は， $\widetilde{\xi}_p$ を初速度とする法測地線を表す． $M_{\widetilde{\xi}} := \eta_{\widetilde{\xi}}(M)$ とおく， $\dim M_{\widetilde{\xi}} = \dim M$ のとき， $M_{\widetilde{\xi}}$ を M の $\widetilde{\xi}$ に対する**平行部分多様体**といい， $\dim M_{\widetilde{\xi}} < \dim M$ のとき， $M_{\widetilde{\xi}}$ を M の $\widetilde{\xi}$ に対する**焦部分多様体**という．

次に，リーマンヒルベルト多様体内の等径部分多様体の概念を定義しよう． (M, g) を正則化可能部分多様体とする．さらに， (M, g) が次の3条件を満たすとき， (M, g) を**等径部分多様体**という：

- (I-i) (M, g) は自明な法ホロノミー群をもつ；
- (I-ii) (M, g) は平坦切断をもつ；
- (I-iii) (M, g) の十分近くの平行部分多様体は，放射方向に関して，一定の正則化された平均曲率をもつ．

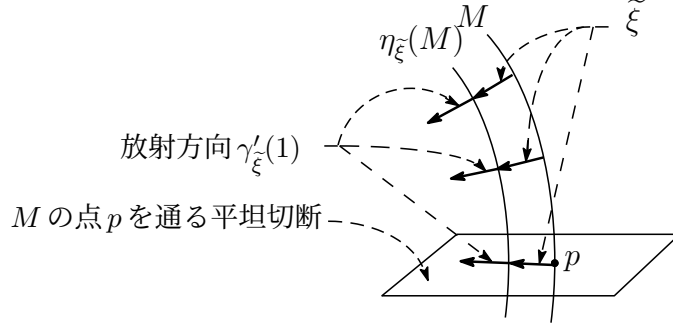


図 5.1: 平行部分多様体の放射方向

部分多様体の正則化可能性を要求せずに，リーマンヒルベルト多様体内の等径部分多様体を定義しようと思うと，次の弱等径部分多様体の定義に至る．CSJ 部分多様体 (M, g) が次の 3 条件を満たすとき， (M, g) を**弱等径部分多様体**という：

- (WI-i) (M, g) は自明な法ホロノミー群をもつ；
- (WI-ii) (M, g) は平坦切断をもつ；
- (WI-iii) (M, g) の任意の平行法ベクトル場 $\tilde{\xi}$ に対し， $A_{\tilde{\xi}_p}$ と $\tilde{R}(\tilde{\xi}_p)$ のスペクトラムは，各々，重複度を込めて $p \in M$ によらず一定である．

次に，曲率不変なリーマンヒルベルト部分多様体の curvature-adapted 性を定義する． (M, g) をリーマンヒルベルト多様体 $(\tilde{M}, \tilde{g})$ 内の曲率不変なリーマンヒルベルト部分多様体とする．

(M, g) が次の条件を満たすとき， (M, g) を **curvature-adapted 部分多様体**という：

$$[A_{\tilde{\xi}}, \tilde{R}(\tilde{\xi})] = 0 \quad (\forall p \in M, \quad \forall \tilde{\xi} \in T_p^\perp M).$$

CSJ 部分多様体のフレッドホルム性に関して，次の事実が成り立つ．

定理 5.1([K2]) 局所対称なリーマンヒルベルト多様体内の curvature-adapted な CSJ 部分多様体は，フレッドホルム部分多様体である．

CSJ 部分多様体の弱等径性に関して，次の事実が成り立つ．

定理 5.2([K2]) (M, g) を局所対称なリーマンヒルベルト多様体 $(\tilde{M}, \tilde{g})$ 内の正則化可能な部分多様体とする．このとき， (M, g) が curvature-adapted かつ弱等径ならば，等径である．

6. リーマンヒルベルト多様体上の水平的超極作用

この節において，リーマンヒルベルト多様体上の水平的超極作用を定義し，その主軌道の等径性に関する結果について述べることにする． $(\tilde{M}, \tilde{g})$ をリーマンヒルベルト多

様体, $\mathcal{G}$ を C^∞ 級ヒルベルトリー群とし, $\mathcal{G} \curvearrowright (\widetilde{M}, \widetilde{\mathfrak{g}})$ を C^∞ 級の固有作用とする. この作用が, 次の条件を満たすとき, この作用を**水平的等長作用**という:

(HI) 任意の $\mathbf{g} \in \mathcal{G}$ と任意の正則点 $u \in \widetilde{M}$ に対し,

$$\mathrm{pr}_{T_{\mathbf{g} \cdot u}^\perp(\mathcal{G} \cdot u)} \circ \mathbf{g}_*|_{T_u^\perp(\mathcal{G} \cdot u)} : T_u^\perp(\mathcal{G} \cdot u) \rightarrow T_{\mathbf{g} \cdot u}^\perp(\mathcal{G} \cdot u)$$

は, 線形等長変換である. ここで, $\mathrm{pr}_{T_{\mathbf{g} \cdot u}^\perp(\mathcal{G} \cdot u)}$ は, $T_{\mathbf{g} \cdot u} \mathcal{A}_P^{H^s}$ から $T_{\mathbf{g} \cdot u}^\perp(\mathcal{G} \cdot u)$ への直交射影を表す.

さらに, この作用が次の条件を満たすとき, この作用を**水平的超極作用**という:

(HHP) $\mathcal{G} \curvearrowright (\widetilde{M}, \widetilde{\mathfrak{g}})$ は余等質性有限であり, すべての $\mathcal{G}$ 軌道と直交的に交わる完備な平坦な全測地的部分多様体 Σ が存在する.

Σ は, この作用の**平坦切断**とよばれる. 一方, 作用 $\mathcal{G} \curvearrowright (\widetilde{M}, \widetilde{\mathfrak{g}})$ が次の条件を満たすとき, この作用を**正則化可能な作用**という:

(RA) $\mathcal{G} \curvearrowright (\widetilde{M}, \widetilde{\mathfrak{g}})$ の主軌道達は, 正則化可能である.

これ作用に関して, 次の事実が成り立つ.

定理 A ([K2]). (i) 水平的超極作用の主軌道は, 弱等径部分多様体である.

(ii) 水平的超極かつ正則化可能な作用の主軌道は, 等径部分多様体である.

7. リーマンヒルベルト多様体上の水平的超極作用の例

(B, g) を閉リーマン多様体, G をコンパクト半単純リー群とし, $\pi : P \rightarrow (B, g)$ を G バンドルとする. P の C^∞ 接続 ω_0 を $\mathcal{A}_P^{H^s}$ の基点としてとる. $c : [0, 1] \rightarrow B$ を点 $p_0 (\in B)$ を発する定速 $a (> 0)$ の C^∞ 曲線とし, $\sigma : [0, 1] \rightarrow P$ を点 $u_0 (\in \pi^{-1}(p_0))$ を発する c の ω_0 に関する水平リフトとする. 以下, 第4節の記号を用いる. K_1, K_2 を G の対称部分群とし, $\mathcal{G}_P^{H^{s+1}}$ の閉部分群 $(\mathcal{G}_P^{H^{s+1}})_{K_1, K_2}$ を

$$(\mathcal{G}_P^{H^{s+1}})_{K_1, K_2} := \{\mathbf{g} \in \mathcal{G}_P^{H^{s+1}} \mid ((\widehat{\mathbf{g}} \circ \sigma)(0), (\widehat{\mathbf{g}} \circ \sigma)(1)) \in K_1 \times K_2\}$$

によって定義する. ここで, $\widehat{\mathbf{g}}$ は,

$$\mathbf{g} \cdot u = R_{\widehat{\mathbf{g}}(u)}(u) \quad (u \in P)$$

によって定義される $\widehat{\mathcal{G}}_P^{H^{s+1}}$ の元を表す. 一方, $P^{H^{s+1}}(G, K_1 \times K_2)$ を

$$P^{H^{s+1}}(G, K_1 \times K_2) := \{\mathbf{g} \in H^{s+1}([0, 1], G) \mid (\mathbf{g}(0), \mathbf{g}(1)) \in K_1 \times K_2\}$$

によって定義する. また, 写像 $\lambda_c : \mathcal{G}_P^{H^{s+1}} \rightarrow H^{s+1}([0, 1], G)$ を

$$\lambda_c(\mathbf{g}) := \widehat{\mathbf{g}} \circ \sigma \quad (\mathbf{g} \in \mathcal{G}_P^{H^{s+1}})$$

によって定義する. このとき, $\lambda_c((\mathcal{G}_P^{H^{s+1}})_{K_1, K_2}) \subset P^{H^{s+1}}(G, K_1 \times K_2)$, 及び

$$\lambda_c(\mathbf{g}) \cdot \mu_c(\omega) = \mu_c(\mathbf{g} \cdot \omega) \quad (\mathbf{g} \in \mathcal{G}_P^{H^{s+1}}, \omega \in \mathcal{A}_P^{H^{s+1}})$$

が成り立つ. それゆえ, μ_c から, 軌道空間間の写像

$$\bar{\mu}_c : \mathcal{A}_P^{H^s} / (\mathcal{G}_P^{H^{s+1}})_{K_1, K_2} \rightarrow H^s([0, 1], \mathfrak{g}) / P^{H^{s+1}}(G, K_1 \times K_2)$$

が導かれる．軌道空間 $H^s([0, 1], \mathfrak{g})/P^{H^{s+1}}(G, K_1 \times K_2)$ は, $K_1 \setminus G/K_2$ に C^∞ 同型であることが示され, また, $K_1 \setminus G/K_2$ は, r 次元トーラス T^r (r は, ある自然数) の閉領域であることが示される．作用 $(\mathcal{G}_P^{H^{s+1}})_{K_1, K_2} \curvearrowright \mathcal{A}_P^{H^s}$ の軌道写像を π_{K_1, K_2} と表す．このとき, $\bar{\mu} \circ \pi_{K_1, K_2}$ は, 作用 $(\tilde{\mathcal{G}}_P^{H^{s+1}})_{K_1, K_2} \curvearrowright (\mathcal{A}_P^{H^s}, \mathfrak{g}_s)$ の軌道写像である．この作用は, 水平的等長作用であることが示されるので, $\bar{\mu}_c \circ \pi_{K_1, K_2}$ が $(\mathcal{A}_P^{H^s}, \mathfrak{g}_s)$ から $(T^r, \bar{g})$ が特異軌道を除いた部分でリーマン沈め込みとなるような T^r のリーマン計量 $\bar{g}$ が存在する．さらに, この計量が平坦であることが示される．

$\mu_c^{-1}(\hat{\mathbf{0}})$ は, 対応 $\omega \leftrightarrow \omega - \omega_0$ ($\omega \in \mu_c^{-1}(\hat{\mathbf{0}})$) の下に, $\Omega_{T,1}^{H^s}(P, \mathfrak{g})$ の部分ベクトル空間とみなすことにより, 加法群とみなされる．ここで, $\hat{\mathbf{0}}$ は, $\mathfrak{g}$ の零ベクトル $\mathbf{0}$ における停留曲線を表す．この加法群は,

$$\omega \cdot \bar{\omega} := \bar{\omega} + (\omega - \omega_0) \quad (\omega \in \mu_c^{-1}(\hat{\mathbf{0}}), \bar{\omega} \in \mathcal{A}_P^{H^s})$$

によって, $\mathcal{A}_P^{H^s}$ に自由に作用する． μ_c は (有界な) 線形写像なので, この作用 $\mu_c^{-1}(\hat{\mathbf{0}}) \curvearrowright \mathcal{A}_P^{H^s}$ の軌道写像とみなされることを注意しておく．この作用と作用 $(\mathcal{G}_P^{H^{s+1}})_{K_1, K_2} \curvearrowright \mathcal{A}_P^{H^s}$ により, 半直積群 $(\widetilde{\mathcal{G}_P^{H^{s+1}}})_{K_1, K_2} := (\mathcal{G}_P^{H^{s+1}})_{K_1, K_2} \ltimes \mu_c^{-1}(\hat{\mathbf{0}})$ の $\mathcal{A}_P^{H^s}$ への作用が生成される．

この作用に関して, 次の事実が成り立つ．

定理 B([K2]) $(\widetilde{\mathcal{G}_P^{H^{s+1}}})_{K_1, K_2} \curvearrowright (\mathcal{A}_P^{H^s}, \mathfrak{g}_s)$ は水平的超極作用であり, それゆえ, この作用の主軌道は弱等径部分多様体である．

参考文献

- [GP1] D. Groisser and T. H. Parker, The Riemannian geometry of Yang-Mills moduli space, Commun. Math. Phys. **112** (1987), 663–689.
- [GP2] D. Groisser and T. H. Parker, The geometry of the Yang-Mills moduli space for definite manifolds, J. Differential Geom. **29** (1989), 499–544.
- [HLO] E. Heintze, X. Liu and C. Olmos, Isoparametric submanifolds and a Chevalley type restriction theorem, Integrable systems, geometry, and topology, 151–190, AMS/IP Stud. Adv. Math. 36, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2006.
- [KT] C. King and C. L. Terng, Minimal submanifolds in path spaces, Global Analysis and Modern Mathematics, edited by K. Uhlenbeck, Publish or Perish (1993), 253–282.
- [K1] N. Koike, Isoparametric submanifolds in Hilbert spaces and holonomy maps, Illinois J. Math. **67** (2023) 153–170.
- [K2] N. Koike, Isoparametric submanifolds in a Riemannian Hilbert manifold, arXiv:math.DG /2311.10074v1.
- [P] R. S. Palais, Foundations of global non-linear analysis, New York, Benjamin, 1968.
- [T1] C. L. Terng, Proper Fredholm submanifolds of Hilbert space, J. Differential Geom. **29** (1989), 9–47.
- [T2] C. L. Terng, Polar actions on Hilbert space, J. Geom. Anal. **5** (1995), 129–150.
- [TT] C. L. Terng and G. Thorbergsson, Submanifold geometry in symmetric spaces, J. Differential Geom. **42** (1995), 665–718.
- [U] K. Uhlenbeck, Connections with L^2 bounds on curvature, Comm. Math. Phys. **83** (1982), 31–42.